Pappus van Alexandrië, *Verzamelwerk*, Boek VII.

Pappus van Alexandrië leefde omstreeks 250 na Christus. Hij schreef een groot Wiskundig Verzamelwerk *("Mathematical Collection", "Collectio") in 8 boeken, waarvan de meeste bewaard zijn. Boek 7 is historisch gezien het belangrijkste boek, en het heeft in de zeventiende eeuw een enorme invloed gehad. Pappus begint Boek 7 met een bespreking van "analyse" en "synthese" als Griekse methodes om wiskundige problemen op te lossen en bewijzen te vinden . We vertalen deze klassieke passage en ook de opsomming van boeken die volgens Pappus hierbij kunnen worden gebruikt. Deze boeken zijn geschreven door meetkundigen die meer dan vier eeuwen voor Pappus leefden, Euclides (ca. 300 v. Chr), Apollonius (ca. 200 v. Chr), Aristarchus (derde eeuw voor Christus) en Eratosthenes (ook derde eeuw voor Christus). Daarna geeft Pappus samenvattingen van diverse van deze boeken, onder andere de* Kegelsneden *van Apollonius. In aansluiting daarop bespreekt Pappus het probleem van de "locus van 3 en 4 lijnen" en hij formuleert een generalisatie die in de Griekse wiskunde niet is opgelost. Dit probleem is later door René Descartes weer opgepakt.*

De Griekse grondtekst van Pappus met Engelse vertaling[1] *is te vinden in Alex Jones,* Pappus of Alexandria: Book 7 of the Collection*, New York: Springer, 1986, vol. 1, pp. 82-85, 114-124. Vergelijk ook de zeer letterlijke vertaling in Paul Ver Eecke,* Pappus d'Alexandrie: La Collection Mathématique*, Paris-Brugge 1933, vol. 2, pp. 503-512. Lange Griekse zinnen zijn in de vertaling gesplitst, en passages tussen haakjes zijn door de vertaler toegevoegd. De tekst van Pappus is vaak niet helder en vol tegenstrijdigheden (dit zou ook kunnen komen doordat de tekst verkeerd is gekopiëerd; het oudste bewaarde manuscript is geschreven in de tiende eeuw* na *Christus), en over de betekenis van sommige van de passages wordt getwist. Het is belangrijk te weten dat Pappus geen hoge dunk had van Apollonius.*

Pappus van Alexandrië, Boek 7 van het Verzamelwerk, dat de lemmas bevat voor het (gebied) van Analyse.

Dat wat het (gebied) van de Analyse[2] genoemd wordt, mijn zoon Hermodoros, is in mijn opvatting een hulpmidel dat na het samenstellen van de

[1]Onze vertaling is gebaseerd op de Griekse grondtekst en komt niet overal met de vertaling van Jones overeen.

[2]Het Griekse woord *analyomenos* betekent letterlijk "het opgelost wordende". Het wordt meestal vertaald als *Gebied van Analyse*.

gewone *Elementen* (d.w.z. van Euclides) is opgezet voor degenen die in (het gebied van) lijnen (d.w.z. in de meetkunde) het vermogen willen verwerven om problemen die aan hen worden voorgelegd op de lossen. En het heeft alleen hiervoor nut. Het is door drie mannen geschreven: Euclides, de auteur van de *Elementen*; Apollonius van Perga, en Aristaeus de Oudere. De methode ervan is met analyse en synthese.

Analyse is de weg van het gezochte, alsof we het er al over eens zijn, via de dingen die daaruit volgen, naar iets waar we het al over eens waren op grond van een synthese. Want in de analyse veronderstellen we dat het gezochte al geproduceerd is, en we zoeken naar datgene waaruit het afkomstig is, en dan naar wat daar weer voor komt, totdat we door zo terug te gaan bij iets aankomen wat behoort tot de dingen die al bekend zijn, of de plaats heeft van een (onbewezen) principe.[3] En dit soort methode noemen we "analyse", dat wil zeggen "terug (ana) losmaken (lyse)" In de synthese keren we dit om en nemen we het laatste wat in de analyse overgebleven is. We gaan dit aannemen als iets dat al geproduceerd is, en de dingen die (in de analyse) later kwamen zetten we hier eerder; we zetten ze daardoor in hun natuurlijke volgorde en passen ze aan elkaar, en aan het eind bereiken we de voltooiïng van de constructie van wat gevraagd was. Dat noemen we synthese.

Er zijn twee soorten analyse. De ene zoekt de waarheid (van een stelling) en heet "theoretisch". De andere probeert te verschaffen wat men zich voorgenomen heeft (d.w.z. een meetkundige figuur te construeren) en heet "problematisch". In de ene "theoretische" soort (analyse) nemen we het gezochte aan als iets wat verondersteld is en iets wat waar is. Daarna doorlopen we de dingen die eruit volgen, en we nemen aan dat ze waar zijn en in overeenstemming met de veronderstelling, totat we aankomen bij iets waar we het over eens zijn. Als datgene waar we het over eens zijn, waar is, dan zal ook het gezochte waar zijn, en dan is het bewijs het omgekeerde van de analyse. Als we op iets stuiten waarvan we het er over eens zijn dat het niet waar is, zal het gezochte ook onwaar zijn.

In de "problematische" soort (analyse) nemen we het voorgenomene (d.w.z. de te construeren figuur) aan als bekend. Daarna doorlopen we de dingen die eruit volgen, en we nemen aan dat ze waar zijn en in overeenstemming met de veronderstelling, totat we aankomen bij iets waar we het over eens zijn. Als dat iets is dat mogelijk is en dat gevonden is - dat is wat de wiskundigen

[3]Pappus heeft blijkbaar niet in de gaten dat de voorafgaande twee zinnen niet logisch equivalent zijn. Dit is een goed voorbeeld van de vaagheid en verwardheid in zijn denken.

"iets gegevens" noemen - zal het voorgenomene ook mogelijk zijn, en het bewijs zal weer het omgekeerde van de analyse zijn. Als we op iets stuiten waarvan we het er over eens zijn dat het onmogelijk is, zal het probleem ook onmogelijk (d.w.z. onoplosbaar) zijn. De *diorismos* is het van te voren zeggen wanneer en hoe (d.w.z. in welke zin) en hoeveel maal het probleem oplosbaar is.[4]

Tot zover over analyse en synthese.

De volgorde van de bovengenoemde boeken in het *Gebied van de Analyse* is deze: Van Euclides over Gegevene Dingen 1 boek.[5] Van Apollonius over het Afsnijden in een Verhouding 2,[6] over het Afsnijden m.b.t. een Oppervlak 2, over de Snede met Diorismos 2, Aanrakingen 2, van Euclides over Porismata (d.w.z. Verschaffingen) 3, van Apollonius over Neigingen 2, van dezelfde: Vlakke Plaatsen 2,[7] Kegelsneden 8,[8] van Aristaeus Lichamelijke (Meetkundige) Plaatsen 3, van Euclides (Meetkundige) Plaatsen op Oppervlakken 2, van Eratosthenes over Middelevenredigen 2.[9] Dit worden 32 boeken. Hiervan heb ik voor jou (korte) omschrijvingen geschreven om te bestuderen, en ook alle (meetkundige) plaatsen en de *diorismoi* en de (verschillende) gevallen (voor elk probleem) in ieder boek. Maar ook de hulpstellingen die gezocht worden. Volgens mij heb ik niets achterwege gelaten wat nodig is voor het doorwerken van de (d.w.z. deze) boeken.

[4] We bekijken het probleem van de constructie van een driehoek met een gegeven basis AB en de twee overige zijden gelijk aan twee gegeven lijnstukken P en Q. Diorismos: dit probleem is oplosbaar dan en slechts dan als $P + Q > AB$, $P + AB > Q$, $Q + AB > P$. Als aan deze voorwaarde voldaan is, zijn er twee oplossingen aan beide zijden van de lijn door A en B.

[5] Dit boek is bewaard in het Grieks.

[6] Deze 2 boeken zijn bewaard in Arabische vertaling.

[7] Van de voorafgaande 13 boeken zijn, behalve de informatie in het boek van Pappus, nog enkele sporen in het Arabisch bewaard gebleven.

[8] Hiervan zijn de eerste 4 boeken in het Grieks bewaard, en de eerste 7 in het Arabisch. Boek 8 is verloren gegaan.

[9] Deze laatste zeven boeken zijn niet bekend in het Grieks en hebben, voorzover bekend, ook geen sporen in het Arabisch nagelaten.

We vertalen nu een deel van Pappus' bespreking van de Kegelsneden *van Apollonius, omdat hierin het beroemde probleem over de "locus (d.w.z. meetkundige plaats) van drie en vier lijnen" wordt uitgelegd.*

Kegelsneden, 8 (boeken)

Apollonius, die de 4 boeken over *Kegelsneden* van Euclides[10] heeft aangevuld en er 4 aan heeft toegevoegd, heeft (dus) in totaal 8 delen over *Kegelsneden* uitgegeven. Aristaeus heeft 5 delen over *Lichamelijke (Meetkundige) Plaatsen* geschreven, die tot in de huidige tijd samen met de *Kegelsneden* zijn overgeleverd. Hij noemde, net als de andere voorgangers van Apollonius, de drie (soorten) lijnen die ontstaan als snede van een kegel: de "snede van een scherphoekige," "van een rechthoekige", en "van een stomphoekige kegel". Maar omdat die drie lijnen in elk van deze drie kegels voorkomen, als ze op verschillende manieren gesneden worden, begreep Apollonius blijkbaar niet, waarom zijn voorgangers de (kegel)snede "van een scherphoekige kegel" noemden wanneer hij ook van een rechthoekige en een stomphoekige kegel kan zijn, en hem "van een rechthoekige kegel" noemden wanneer hij ook van een scherphoekige en een stomphoekige kegel kan zijn, en hem "van een stomphoekige kegel" noemden wanneer hij ook van een scherphoekige en een rechthoekige kegel kan zijn. Daarom veranderde hij de namen en hij noemde de (snede) die (daaarvoor) "van een scherphoekige (kegel)" genoemd werd, "ellips", die van een rechthoekige (kegel) "parabool", en die van een stomphoekige (kegel) "hyperbool". Elke snede werd genoemd naar een bepaalde eigenschap die hij speciaal had. Want een bepaalde figuur die aan een bepaalde lijn wordt aangelegd is in de snede van een scherphoekige kegel een vierkant[11] minder, in de snede van een stomphoekige kegel een vierkant meer, en in de snede van een rechthoekige kegel niet minder en niet meer (dan een bepaalde rechthoek).

Dat (waanidee) had hij opgedaan omdat hij niet begrepen had[12] dat de verschillende typen krommen in elk van de (drie) kegels ontstaan bij een speciale ligging van het vlak dat de kegel snijdt en de krommen voortbrengt. Daarom hadden zij ze naar de eigenschap van de kegel genoemd. Want als

[10] Deze vier boeken zijn verloren gegaan. Waarschijnlijk had Pappus deze boeken ook niet.

[11] Wat in de tekst staat is niet correct; het had "rechthoek" moeten zijn.

[12] Het is ondenkbaar dat Apollonius dit niet begreep.

het snijvlak loodrecht op[13] een zijde van de kegel getrokken wordt, ontstaat slechts één van deze krommen, altijd dezelfde, die Aristaeus de snede noemde van het soort kegel dat gesneden werd.

In elk geval heeft Apollonius de inhoud van de acht Boeken van de *Kegelsneden* aangegeven in de volgende korte samenvatting in het voorwoord van Boek 1: "Het eerste (boek) behandelt het ontstaan de drie kegelsneden en de "tegenovergestelde (hyperbool)sneden" en hun basiseigenschappen, uitgebreider en veel algemener onderzocht dan in de geschriften van anderen. Het tweede gaat over de eigenschappen van middellijnen en assen van de kegelsneden en de tegenovergestelde sneden en over de asymptoten, en andere dingen die een speciaal en noodzakelijk nut hebben voor de (bepaling van de) *diorismoi*[14] Wat ik middellijnen noem en wat assen zul je in dit boek zien. Het derde bevat vele verschillende nuttige zaken, voor de synthese van *lichamelijke plaatsen* en hun diorismoi. Toen we de meeste hiervan, die mooi en buitengewoon zijn, hadden ingezien, vonden we dat de synthese van de *locus van drie en vier lijnen* slechts ten dele door Euclides gegeven was, en niet op een elegante manier. Want het is niet mogelijk de synthesis zonder de genoemde dingen te voltooien. ...

Pappus kritiseert dan Apollonius omdat deze Euclides bekritiseerde, en daarna gaat Pappus verder:

De "locus (meetkundige plaats)[15] van drie of vier lijnen - waarover hij opschept dat hij (Apollonius) er zelf aan bijgedragen heeft, in plaats van dat hij de eer geeft aan degene (Euclides) die er als eerste over geschreven heeft, is deze:

Als drie rechte lijnen in positie gegeven zijn, en vanaf een en hetzelfde punt rechte lijnen worden getrokken naar die drie (lijnen) onder gegeven hoeken, en als de verhouding gegeven is van de rechthoek die bevat is door twee van de getrokken lijnen tot het vierkant van de resterende getrokken lijn, dan zal het punt liggen op een "lichamelijke locus", dat is één van de drie kegelsneden.

---

[13]In de Griekse tekst (Jones p. 117 regel 15) staat "evenwijdig aan", maar dit moet volgens mij (JPH) een fout van een latere afschrijver zijn.

[14]Het voorwoord van Apollonius is bewaard, en het blijkt dat Pappus onnauwkeurig citeert.

[15](Meetkundige) plaats is de letterlijke vertaling van het Griekse woord *topos*, maar omdat het probleem bekend staat als "locus", het Latijnse woord voor plaats, zullen we dat ook gebruiken.

En wanneer ze (d.w.z. de lijnen vanuit het punt) naar 4 in positie gegeven rechte lijnen onder gegeven hoeken worden getrokken, en de verhouding gegeven is van de (rechthoek) bevat door twee van de getrokken lijnen tot de (rechthoek) bevat door de overige twee getrokken lijnen, zal het punt op dezelfde manier liggen op een kegelsnede die gegeven is in positie.

Indien ze slechts naar twee lijnen getrokken worden, is bewezen dat de locus "vlak" is. Maar als ze naar meer dan vier getrokken worden, dan zal het punt liggen op loci (meetkundige plaatsen, d.w.z. krommen) die nog niet bekend zijn - maar waarvan alleen gezegd kan worden dat het lijnen zijn, en waarvan nog niet (iets gezegd kan worden) over hun oorsprongen of wat voor eigenschappen dan ook. Ze hebben van geen enkele, zelfs niet van degene die de eerste en duidelijkste schijnt te zijn, een constructie gegeven, waarmee ze het nut ervan aantoonden.[16]

De beweringen ervan (d.w.z. van deze problemen) zijn als volgt: Als van een of ander punt naar vijf in positie gegeven rechte lijnen (andere) rechte lijnen worden getrokken onder gegeven hoeken, en de verhouding gegeven is van het rechthoekig blok bevat door drie van de getrokken lijnen tot het rechthoekig blok dat bevat is door de twee overige getrokken lijnen en een of andere gegeven lijn, dan zal het punt liggen op een (kromme) lijn die gegeven is in positie. En als (de lijnen) naar 6 (gegeven rechte lijnen) getrokken worden, en de verhouding gegeven is tussen het (blok) van drie van de getrokken (lijnen) en het bovengenoemde lichaam van de overige drie, dan zal het punt weer liggen op een in positie gegeven (kromme lijn). Als ze naar meer dan 6 getrokken worden, kan men niet meer zeggen dat de verhouding gegeven is tussen iets wat door de 4 (getrokken lijnen) bevat is tot hetgeen door de overige (lijnen) bevat is, want er is niet iets dat door meer dan de drie dimensies wordt bevat.

Onze directe voorgangers hebben zichzelf toegestaan om betekenis te geven aan dit soort dingen. Maar ze drukken niets zinnigs uit wanneer ze zeggen "de (rechthoek) bevat door deze (twee)", te weten "het vierkant van dit" en "de rechthoek van die". Maar met behulp van samengestelde verhoudingen was het was mogelijk om deze dingen in het algemeen uit te spreken en te bewijzen, zowel voor de voorafgaande beweringen als voor deze

[16]Ik volg hier de interpretatie van Jones en Ver Eecke. In zijn Latijnse vertaling interpreteerde Commandinus deze passage als volgt: "Van deze (lijnen) hebben zij slechts een, niet eens de eerste of meest duidelijke, geconstrueerd, waarbij zij aantoonden dat hij nuttig was." Deze foute vertaling heeft Descartes geïnspireerd zo'n kromme opnieuw te vinden.

beweringen, op de volgende manier:

Als rechte lijnen uit een of ander punt worden getrokken onder gegeven hoeken naar rechte lijnen die gegeven zijn in positie, en de verhouding gegeven is die ontstaat uit de vermenigvuldiging van de (verhouding) van een getrokken lijn tot een andere, maal de (verhouding) van weer een andere tot nog een andere, maal de (verhouding) van weer een andere tot nog een andere, maal de (verhouding) van de overblijvende tot een gegeven lijn als er 7 zijn, of als er 8 zijn de verhouding van de twee laatste lijnen, dan zal het punt op een (kromme) lijn liggen die gegeven is in positie. En op dezelfde manier voor hoeveel (lijnen) er zijn, even of oneven in aantal. Zoals ik gezegd heb hebben ze van geen enkele die na de locus van 4 lijnen komt een synthese gemaakt, zodat de (kromme) lijn gekend is.