Inleiding

De Zandrekenaar is een tekstje geschreven door Archimedes (ca. 287-212 v. Chr.) voor koning Gelon van Sicilië, over getallen waarmee het aantal zandkorrels dat in het hele heelal past naar boven kan worden afgeschat. De koning was zelf geen wiskundige, en Archimedes heeft klaarblijkelijk moeite gedaan alles zo duidelijk mogelijk uit te leggen.

De volgende vertaling van *de Zandrekenaar* is geïnspireerd door de Franse vertaling van Mugler en de (gedeeltelijke) Nederlandse vertaling van Dijksterhuis (zie de literatuurlijst), maar de tekst is wel met het Grieks vergeleken. Om de sfeer van de grondtekst zoveel mogelijk te behouden zijn de getallen niet vertaald. Hierbij is de Griekse digamma (=6) weergegeven als f, en de Griekse qoppa (=90) als q. Zie het overzicht van de getalswaarden van de Griekse letters. aan het eind. Woorden tussen haakjes komen niet in de grondtekst voor. Voor de duidelijkheid zijn sommige woorden in de vertaling gecursiveerd.

De zandrekenaar

Er zijn mensen, koning Gelon, die denken dat het aantal zandkorrels oneindig groot is. Ik bedoel niet alleen van het zand in Syracuse en op de rest van Sicilië, maar in de hele bewoonde en onbewoonde wereld. Anderen nemen weliswaar niet aan dat het oneindig groot is, maar zij denken dat er geen getal genoemd kan worden dat zo groot is dat het die hoeveelheid zandkorrels overtreft. Wanneer de mensen die dat denken zich een hoeveelheid zand voorstellen die zo groot is als de aarde, waarbij alle zeeën en valleien zijn opgevuld tot de hoogte van de hoogste bergen, dan is duidelijk dat zij nog vele malen minder zullen denken dat er een getal genoemd kan worden dat dat aantal zandkorrels overtreft.

Maar ik zal proberen je te laten zien, door middel van meetkundige bewijzen die jij zult kunnen volgen, dat er sommige getallen zijn, die ik in mijn verhandelingen aan Zeuxippos een naam heb gegeven en heb gepubliceerd, die niet alleen groter zijn dan het aantal zandkorrels die gelijk in grootte zijn aan de opgevulde aarde, zoals ik heb gezegd, maar ook groter dan het aantal zandkorrels gelijk in grootte aan de hele kosmos.

Je weet dat de meeste astrologen onder de kosmos de bol verstaan met middelpunt het middelpunt van de aarde en straal de rechte tussen de middelpunt van de aarde en het middelpunt van de zon. Want dat zul je gehoord hebben uit de bewijzen die de astrologen hebben geschreven. Maar Aristarchos van Samos heeft enkele hypothesen gepubliceerd, en uit de aannames daarvan volgt dat de kosmos vele malen groter is dan wat wij zojuist gezegd hebben. Hij veronderstelt namelijk dat de vaste sterren en de zon onbeweeglijk blijven en dat de aarde in een cirkel draait om de zon, die in het midden van die beweging ligt, en dat de bol van de vaste sterren om het zelfde middelpunt ligt als de zon, en zo groot is dat de cirkel waarop de aarde verondersteld wordt rond te draaien dezelfde verhouding heeft tot de afstand van de vaste sterren als het middelpunt van de bol tot zijn oppervlakte. Maar het is heel duidelijk dat dit onmogelijk is. Want omdat het middelpunt van een bol geen afmeting heeft, kan ook niet aangenomen worden dat dit een verhouding tot de oppervlakte van een bol heeft. Waarschijnlijk heeft Aristarchus het volgende bedoeld. Omdat aangenomen is dat de aarde het middelpunt van de kosmos is, is de verhouding van de aarde tot datgene wat wij (normaliter) de kosmos noemen gelijk aan de verhouding van de bol, waarin de cirkel ligt waarover de aarde verondersteld wordt rond te draaien, tot de bol van de vaste sterren. Want zijn bewijzen van de (hemel)verschijnselen passen bij deze aanname, en in het bijzonder schijnt hij de grootte van de bol, waarop hij de aarde laat bewegen, gelijk te stellen aan wat wij (normaliter) de kosmos noemen.

Ik beweer nu, dat zelfs als er uit zand een bol gemaakt zou worden, die even groot is als wat Aristarchus als bol van de vaste sterren veronderstelt, er bewezen kan worden dat er sommige getallen zijn, die in de *Beginselen*[1] een naam gekregen hebben, die groter zijn dan het aantal zandkorrels die (samen) de grootte hebben van de genoemde bol.

Hierbij maak ik de volgende aannamen:

- Ten eerste, de omtrek van de aarde is $\overline{\tau}$ tienduizenden stadia,[2] en niet meer, hoewel sommigen hebben geprobeerd te bewijzen, zoals je ook wel gehoord zal hebben, dat die $\overline{\lambda}$ tienduizenden stadia is. Maar ik ga hier bovenuit en stel dat de omtrek van de aarde maximaal tien keer de omtrek is die door mijn voorgangers aangenomen is, dus $\overline{\tau}$ tienduizenden stadia.

- Daarnaast, dat de diameter van de aarde groter is dan de diameter van de maan en dat de diameter van de zon groter is dan die van de aarde, in overeenstemming met wat de meeste astrologen voor mij hebben aangenomen.

- Daarnaast, dat de diameter van de zon dertig keer de diameter van de maan is, niet meer. Van de eerdere astrologen heeft Eudoxos hem bepaald als negen keer zo groot en mijn vader Pheidias als twaalf keer zo groot, en Aristarchos heeft geprobeerd te bewijzen dat de diameter van de zon groter dan achttien keer en kleiner dan twintig keer de diameter van de maan is. Ik ga daar bovenuit en stel de diameter van de zon maximaal dertig keer de diameter van de maan, opdat mijn bewering ondubbelzinnig bewezen wordt.

[1] Hier volg ik de vertaling van Dijksterhuis, p. 256 noot 8; *"Beginselen"* zou dan de titel van de aan Zeuxippos gerichte verhandelingen zijn. Mugler vat het Griekse *katonomaxian* veel vager op als "vermelden," de vertaling wordt dan: de getallen die in het begin vermeld zijn.

[2] Het Griekse woord *stadion* (Latijnse vorm: stadium, meervoud in Grieks en Latijn: stadia) geeft een afstandsmaat aan van ca. 190 meter.

- Tenslotte, dat de diameter van de zon groter is dan de zijde van de (regelmatige) duizendhoek ingeschreven in de grootste cirkel van de kosmos.[3]

Ik veronderstel dit, omdat Aristarchos gevonden heeft dat de zon verschijnt als het zeven honderd twintigste deel van de dierenriem. Ik heb hier over nagedacht en zelf ook geprobeerd met instrumenten de hoek te meten waarin de zon past, als het hoekpunt in het oog ligt. Het is niet gemakkelijk die hoek nauwkeurig te meten, omdat noch het oog, noch de handen, noch de instrumenten waarmee je die hoek moet bepalen, betrouwbaar genoeg zijn om die hoek nauwkeurig te bepalen. Maar ik vind dit geen goed moment om hier lang bij stil te staan, omdat dit soort zaken vaak beschreven zijn. Voor het bewijs van mijn bewering is het voor mij voldoende een hoek te nemen die niet groter is dan de hoek waarin de zon past als het hoekpunt in het oog ligt, en een andere hoek die niet kleiner is dan de hoek waarin de zon past als het hoekpunt in het oog ligt. Daarom (heb ik) een lange lat op een verticale voet geplaatst zodat de opgaande zon kan worden waargenomen, en bij het opgaan van de zon heb ik een (kleine) cylinder recht op die lat geplaatst. Toen heb ik, terwijl de zon nog vlakbij de horizon stond zodat je er recht in kon kijken, de lat naar de zon gericht, en mijn oog bij het eind van de lat gehouden. De cylinder die tussen mijn oog en de zon was, bedekte de zon. Daarna heb ik de cylinder van mijn oog afgeschoven totdat een klein stukje van de zon aan beide kanten van de cylinder zichtbaar werd. Als het oog uit één punt zou zien, en rechten getrokken zouden worden vanuit het uiteinde van de lat, waar het oog zich bevond, die de cylinder raken, dan zou de hoek tussen die getrokken rechten kleiner zijn dan de hoek waarin de zon past en waarvan het hoekpunt in het oog ligt, omdat iets van de zon aan beide kanten van de cylinder zichtbaar was. Maar omdat het oog niet vanuit één punt ziet, maar vanaf een of andere (kleine) afstand, moet je een rond voorwerp nemen niet kleiner dan het oog, en dat aan het eind van de lat plaatsen, op de plaats waar het oog zich bevond, en rechten trekken die dat voorwerp en de cylinder raken; dan is de hoek die door die rechten bevat is kleiner dan de hoek waarin de zon past en die het hoekpunt in het oog heeft.

Een voorwerp dat niet kleiner is dan het oog kan als volgt worden gevonden: men neme twee kleine cylindertjes van gelijke dikte, de ene wit, de andere niet wit, en plaatse ze voor het oog, de witte op enige afstand, de niet witte zo dicht mogelijk bij het oog zodat hij bijna het gezicht raakt. Als de cylindertjes kleiner zijn dan het oog, dan wordt de cylinder die het dichtst bij het oog is, door het gezichtsveld omgeven, en de witte cylinder wordt (helemaal) gezien, als ze veel kleiner zijn (dan het oog). Als ze niet veel kleiner zijn, dan worden stukjes van de witte cylinder gezien aan beide kanten van de (donkere) cylinder dichtbij het oog; maar als de beide cylinders met een bepaalde geschikte dikte gekozen worden, zal

[3]Nota bene: Archimedes gebruikt het woord “kosmos” hier in de zin die in zijn tijd gebruikelijk was: de bol met middelpunt de aarde en straal de afstand van de aarde tot de zon.

de ene de andere precies bedekken. Dan zal een voorwerp evengroot als de dikte van die cylinders wat groter zijn dan het oog en niet kleiner.

De hoek die niet kleiner is dan de hoek waarin de zon past, met hoekpunt in het oog, heb ik op de volgende manier bepaald: Nadat de cylinder op de lat geplaatst was zodat hij de hele zon bedekte, en raaklijnen getrokken waren van het uiteinde van de lat waar het oog zich bevond, was de hoek tussen die raaklijnen aan de cylinder niet kleiner dan de hoek waarin de zon past, met het hoekpunt in het oog.

Nadat een rechte hoek gemeten was met de zo genomen hoekjes, en de rechte hoek in $\overline{\rho\xi\delta}$ delen verdeeld was, was de (hoek) in het punt kleiner dan één van die delen, en de kleinere (hoek) was, nadat de rechte hoek in $\overline{\sigma}$ delen verdeeld is, groter dan één deel daarvan. Het is dus duidelijk dat de hoek waarin de zon past, met hoekpunt in het oog, kleiner is dan één deel van een rechte hoek in $\overline{\rho\xi\delta}$ delen verdeeld, en groter dan één deel van een rechte hoek in $\overline{\sigma}$ delen verdeeld.

Nadat we ons van dit alles overtuigd hebben, wordt (als volgt) bewezen dat de diameter van de zon groter is dan de zijde van de (regelmatige) duizendhoek in de grootste cirkel in de kosmos ingeschreven. (Figuur 1)

Beschouw een vlak door het middelpunt van de zon, het middelpunt van de aarde en het oog, terwijl de zon een klein stukje boven de horizon is. Laat het vlak de kosmos volgens cirkel $AB\Gamma$ snijden en de aarde volgens cirkel ΔEZ, en de zon volgens ΣH, laat het middelpunt van de aarde Θ, het middelpunt van de zon K en het oog Δ zijn; laat raaklijnen getrokken zijn, aan cirkel ΣH uit Δ raaklijnen $\Delta\Lambda$, $\Delta\Xi$, die in N en T raken, uit Θ raaklijnen ΘM, ΘO, die in X en P raken, en laten ΘM, ΘO cirkel $AB\Gamma$ snijden in A en B.

Nu is ΘK groter dan ΔK, omdat verondersteld is dat de zon boven de horizon is. Dus is de hoek bevat door $\Delta\Lambda$ en $\Delta\Xi$ groter dan de hoek bevat door ΘM en ΘO. Echter, de hoek bevat door $\Delta\Lambda$ en $\Delta\Xi$ is groter dan het tweehonderdste deel van een rechte hoek en kleiner dan één deel van een rechte hoek verdeeld in $\overline{\rho\xi\delta}$ delen, omdat hij gelijk is aan de hoek waarin de zon past, met hoekpunt in het oog. Dus is de hoek tussen ΘM en ΘO kleiner dan één deel van een rechte hoek verdeeld in $\overline{\rho\xi\delta}$ delen, en de rechte AB is kleiner dan de koorde van het segment van cirkel $AB\Gamma$ verdeeld in $\overline{\chi\nu f}$ delen

Maar de verhouding van de omtrek van de genoemde veelhoek tot de straal van cirkel $AB\Gamma$ is kleiner dan de verhouding van $\overline{\mu\delta}$ tot $\overline{\zeta}$ omdat de verhouding van elke ingeschreven veelhoek tot de straal van de cirkel kleiner is dan de verhouding van $\overline{\mu\delta}$ tot $\overline{\zeta}$. Want je weet dat door mij is aangetoond dat de omtrek van elke cirkel minder dan het zevende deel (van een diameter) groter is dan drie maal de diameter, en dat de omtrek van een ingeschreven veelhoek kleiner is dan die (cirkelomtrek). Dus is de verhouding van BA tot ΘK kleiner dan de verhouding van $\overline{\iota\alpha}$ tot $\prime\overline{\alpha\rho\mu\eta}$. Dus is BA kleiner dan het honderdste deel van ΘK. De diameter van cirkel ΣK is gelijk aan BA, omdat de helft daarvan, ΦA, gelijk is aan KP. Want de segmenten ΘK en ΘA zijn gelijk, en vanaf hun eindpunten zijn loodlijnen getrokken onder dezelfde hoeken. Het is dus duidelijk dat de diameter van cirkel ΣH kleiner is dan het honderdste deel van ΘK. Maar diameter $E\Theta Y$ is kleiner dan de diameter van cirkel ΣH, omdat cirkel ΔEZ kleiner is dan cirkel ΣH. Dus zijn $\Theta Y, K\Sigma$ samen kleiner dan een honderdste deel van ΘK. Dus is the verhouding van ΘK tot $Y\Sigma$ kleiner dan de verhouding van $\overline{\rho}$ tot $\overline{q\theta}$. Maar omdat ΘK niet kleiner is dan ΘP, en ΣY kleiner is dan ΔT, heeft ΘP ook een kleinere verhouding tot ΔT dan $\overline{\rho}$ tot $\overline{q\theta}$. Omdat van de rechthoekige driehoeken $\Theta KP, \Delta KT$ de zijden KP, KT gelijk zijn, en $\Theta P, \Delta T$ ongelijk zijn, waarbij ΘP groter is, is de verhouding van de hoek bevat door ΔT en ΔK tot de hoek bevat door ΘP en ΘK groter dan de verhouding van ΘK en ΔK, maar kleiner aan de verhouding van ΘP tot ΔT. Want als in twee rechthoekige driehoeken twee rechthoekszijden gelijk zijn en de twee andere ongelijk, is de verhouding van de grootste hoek grenzend aan een van de ongelijke rechthoekszijden tot de kleinste hoek (grenzend aan een van de ongelijke rechthoekszijden) groter dan de verhouding van de grootste schuine zijde tot de kleinste schuine zijde, maar kleiner dan de verhouding van de grootste rechthoekszijde tot de kleinste.

Omdat de verhouding van de hoek bevat door $\Delta\Lambda$ en $\Delta\Xi$ tot de hoek bevat door ΘO en ΘM kleiner dan de verhouding van ΘP tot ΔT, die op zijn beurt kleiner is dan de verhouding van $\overline{\rho}$ tot $\overline{q\theta}$, is de verhouding van de hoek bevat door $\Delta\Lambda$ en $\Delta\Xi$ tot de hoek bevat door ΘO en ΘM kleiner dan de verhouding van $\overline{\rho}$ tot $\overline{q\theta}$. En omdat de hoek bevat door $\Delta\Lambda$ en $\Delta\Xi$ groter is dan het tweehonderdste deel van een rechte hoek, is de hoek bevat door ΘM en ΘO groter dan $\overline{q\theta}$ delen van een rechte hoek verdeeld in tweeduizend delen. Dus is hij (die hoek) groter dan één deel van een rechte hoek verdeeld in $\overline{\sigma}$ en $\overline{\gamma}$ delen. Dus is BA groter dan een koorde van de (sector) van cirkel $AB\Gamma$ verdeeld in $\overline{\omega\iota\beta}$ delen. Dus is het duidelijk dat de diameter van de zon groter is dan de zijde van de regelmatige duizendhoek.

Nadat deze dingen zijn aangenomen, kan bewezen worden dat de diameter van de kosmos kleiner is dan tienduizend maal de diameter van de aarde, en dat de diameter van de kosmos kleiner is dan $\overline{\rho}$ maal tienduizend maal tienduizend stadia. Want als aangenomen is dat de diameter van de zon niet groter is dan dertig maal de diameter van de maan, en dat de diameter van de aarde groter is dan de diameter van de maan, is het duidelijk dat de diameter van de zon kleiner is dan dertig maal de diameter van de aarde. Want opnieuw, omdat bewezen is dat de diameter van de zon groter is dan de zijde van de duizendhoek ingeschreven in de grootste cirkel in de kosmos, is het duidelijk dat de omtrek van de genoemde veelhoek kleiner is dan duizend maal de diameter van de zon. Maar de diameter van de zon is kleiner dan dertig maal de diameter van de aarde. Dus is de omtrek van de duizendhoek kleiner dan dertigduizend maal de diameter van de aarde. Omdat de omtrek van de duizendhoek dus kleiner is dan dertigduizend maal de diameter van de aarde, maar ook groter dan drie maal de diameter van de kosmos, - er is namelijk aangetoond dat in elke cirkel de diameter kleiner is dan een derde deel van de omtrek van elke (ingeschreven) veelhoek, die gelijkzijdig is en meer hoeken heeft dan een zeshoek - is de diameter van de kosmos kleiner dan tienduizend maal de diameter van de aarde. Dus is aangetoond dat de diameter van de kosmos kleiner is dan tienduizend maal de diameter van de aarde.

Uit het volgende blijkt dat de diameter van de kosmos kleiner is dan $\overline{\rho}$ tienduizend maal tienduizend stadia. Omdat aangenomen is dat de omtrek van de aarde niet groter is dan driehonderd maal tienduizend stadia, en dat de omtrek van de aarde groter is dan drie maal de diameter, omdat in elke cirkel de omtrek groter is dan drie maal de diameter, is duidelijk dat de diameter van de aarde kleiner is dan ρ maal tienduizend stadia. Omdat dus de diameter van de kosmos kleiner is dan het tienduizendvoudige van de diameter van de aarde, is duidelijk dat de diameter van de kosmos kleiner is dan ρ maal tienduizend maal tienduizend stadia. Deze dingen worden dus over de grootten en de afstanden verondersteld.

Over het zand (veronderstel ik) het volgende. Als er een hoeveelheid zand is die niet meer is dan een papaverzaadje, is het aantal (korrels) daarvan niet meer dan tienduizend, maar de diameter van het papaverzaadje is niet minder dan een veertigste van een vinger. Deze dingen veronderstel ik op basis van waarnemingen op de volgende manier: papaverzaadjes werden in een rechte lijn op een gladde lat gelegd zodat ze elkaar raakten, en $\overline{\kappa\epsilon}$ papaverzaadjes namen meer plaats in dan een vingerlengte. Daarom is de diameter van een papaverzaadje op minimaal een veertigste van een vinger gesteld, omdat ik mijn bewering in alle opzichten ondubbelzinnig wil bewijzen.

Tot zover dus mijn hypotheses. Maar ik denk dat het ook nuttig is de naamgeving van de getallen uit te leggen, opdat ook de andere lezers die het werk dat ik aan Zeuxippos heb geschreven niet hebben, niet op een dwaalspoor worden gebracht doordat ik hierover in dit boek niets zeg. Het is zo dat de namen van getallen tot en met tienduizend aan ons zijn overgeleverd, en om boven de tienduizend getallen te onderscheiden, noemen we de tienduizenden op, tot tienduizend tienduizenden. Wij zullen daarom de bovengenoemde getallen tot tienduizend tienduizenden de *eerste getallen* noemen.

Wij zullen tienduizend tienduizenden een eenheid van de *tweede getallen* noemen, en wij zullen van de tweede getallen eenheden tellen, en van de eenheden tientallen, en honderden, en duizenden, en tienduizenden, tot tienduizend tienduizenden. Nog een keer zullen we tienduizend tienduizenden van de tweede getallen een eenheid van de *derde getallen* noemen, en we zullen van de derde getallen eenheden tellen, en tientallen, en honderden, en duizenden, en tienduizenden, tot tienduizend tienduizenden. Op dezelfde manier zullen we tienduizend tienduizenden van de derde getallen een eenheid van de *vierde getallen* noemen, en tienduizend tienduizenden van de vierde getallen een eenheid van de *vijfde getallen*, en zo altijd maar verder gaande krijgen de getallen namen tot tienduizend tienduizenden van de *tienduizend tienduizendste getallen*.

De getallen die we tot zover onderscheiden hebben zijn wel voldoende, maar het is mogelijk nog verder te gaan. Laten we de getallen die we nu opgenoemd hebben de *eerste periode* noemen, en laten we het laatste getal van de eerste periode de eenheid van de *eerste getallen* van de tweede periode noemen. Laten we opnieuw tienduizend tienduizenden van de *eerste getallen* van de *tweede periode* de eenheid van de *tweede getallen* van de *tweede periode* noemen. Op dezelfde manier noemen we het laatste getal daarvan de eenheid van de *derde getallen* van de *tweede periode*. Enzovoort, tot tienduizend tienduizenden van de *tienduizend tienduizendste getallen* van de *tienduizend tienduizendste periode*.

Nu we de getallen zo namen gegeven hebben, als er een rij getallen in (constante) verhouding is, te beginnen met de één, en de volgende is tien, dan zullen de eerste acht daarvan, met inbegrip van de één, tot de *eerste getallen* behoren, de volgende acht tot de *tweede getallen*, en de rest zal op de zelfde manier behoren tot de getallen met een naam die afhangt van de afstand van hun *octade* (groep van acht) getallen tot de eerste *octade* getallen. Het achtste getal (in de rij) van de eerste *octade* getallen is duizend tienduizenden, en het eerste getal van de tweede *octade* is het tienvoud van zijn voorganger (in de rij), dus tienduizend tienduizenden. Dat is dus de eenheid van de tweede *octade*. Het achtste getal (in de rij) van de tweede *octade* is dus duizend tienduizenden van de *tweede getallen.* Nog een keer is het eerste getal van de derde *octade* het tienvoudige van zijn voorganger, dus tienduizend tienduizenden van de *tweede getallen*. Dat is dus de eenheid van de *derde getallen*. Het is duidelijk dat wat we gezegd hebben ook geldt voor een willekeurige *octade*.

Het is ook nuttig het volgende te weten. Als er een rij getallen is die met de één begint en in (constante) verhouding is, en als twee getallen uit die rij met elkaar vermenigvuldigd worden, dan is het product in de rij evenver verwijderd van het grootste als het kleinste verwijderd is van de één. Het product zal één minder van de één verwijderd zijn dan de som van de afstanden van de twee getallen tot de één.

(Bewijs:) Laat $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ een rij getallen in (constante) verhouding zijn, en laat A één zijn, en laat Δ met Θ vermenigvuldigd worden, en stel het product X. Laat in de rij Λ zover van Θ af liggen als Δ van A. Nu moet bewezen worden dat X gelijk is aan Λ. (Bewijs:) Omdat de getallen in (constante) verhouding zijn en Δ even ver van A vandaan ligt als Λ van Θ, is de verhouding van Δ tot A even groot als de verhouding van Λ tot Θ. Nu is Δ het product van A en Δ. Dus is Λ het product van Δ en Θ. Dus is Λ gelijk aan X.

Het is dus duidelijk dat het product in de rij voorkomt, en dat het evenver van het grootste van de twee met elkaar vermenigvuldigde getallen vandaan ligt als het kleinste van de één. Het is ook duidelijk dat het product één (stap) minder van de één vandaan ligt dan de som van de afstanden van de beide getallen Δ, Θ tot de één. Want $A, B, \Gamma, \Delta, E, Z, H, \Theta$ zijn de getallen waarbij Θ van de één vandaan ligt, en I, K en Λ zijn één minder (getallen) dan Δ van de één vandaan ligt, met de (afstand van) Θ (tot één) zijn ze evenveel (als de afstand van Λ tot de één).

Nu deze dingen voor een deel aangenomen zijn en voor een deel bewezen, zal de bewering bewezen worden.

Omdat aangenomen is dat de diameter van een papaverzaadje niet kleiner is dan een veertigste deel van een vinger, is duidelijk dat de bol met diameter gelijk aan een vinger niet groter is dan de inhoud van vier en zestig duizend papaverzaadjes. Want die bol is dat getal maal een bol met diameter een veertigste van een vinger, er is namelijk bewezen dat de verhouding van bollen de drievoudige verhouding is van hun diameters. Omdat is aangenomen dat het aantal zandkorrels dat een grootte heeft zo groot als een papaverzaadje niet meer is dan tienduizend, is duidelijk dat wanneer de bol met diameter een vinger met zand gevuld wordt, het aantal zandkorrels daarin niet groter is dan vierenzestig duizend tienduizenden. Dat getal is $\overline{f}$ eenheden van de tweede getallen en vierduizend tienduizenden van de eerste getallen, het is dus kleiner dan $\bar{\iota}$ eenheden van de tweede getallen.

De bol met een diameter van $\overline{\rho}$ vingers is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter één vinger, omdat bollen de drievoudige verhouding hebben van hun diameters. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van $\overline{\rho}$ vingers, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van tien eenheden van de tweede getallen maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat tien eenheden van de tweede getallen het tiende getal is in de rij die met één begint in een (constante) verhouding van (de volgende) tien keer zo groot (als de vorige), en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het zestiende in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Want er is bewezen dat dat (product) één (stap) minder van de één verwijderd is als de som van de afstanden van beide getallen die met elkaar vermenigvuldigd zijn tot de één. Van die zestien (getallen) worden de eerste acht, met inbegrip van de eenheid, *eerste* (getallen) genoemd, en de laatste ervan (die zestien getallen) is duizend tienduizenden van de *tweede getallen*. Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ vingers kleiner is dan duizend tienduizenden van de *tweede getallen*.

Nog een keer, de bol met een diameter van tienduizend vingers is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ vingers. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van tienduizend vingers, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van duizend tienduizenden van de tweede getallen maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat duizend tienduizenden van de tweede getallen het zestiende getal is in de rij die met één begint, en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het tweeëntwintigste in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Van die tweeëntwintig (getallen) worden de eerste acht, met inbegrip van de eenheid, *eerste* (getallen) genoemd, de acht daaropvolgende *tweede getallen*, en de rest *derde getallen*, en de laatste ervan is is tien tienduizenden van de *derde getallen*. Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand in een ruimte even groot als de bol met diameter tienduizend vingers kleiner is dan tien tienduizenden van de *derde getallen*. Omdat een bol met straal één stadion kleiner is dan een bol met diameter tienduizend vingers, is duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter één stadion kleiner is dan $\overline{\iota}$ tienduizenden van de *derde getallen*.

Nog een keer, de bol met een diameter van $\overline{\rho}$ stadia is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter één stadion. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van $\overline{\rho}$ stadia, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van tien tienduizenden van de derde getallen maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat tien tienduizenden van de derde getallen het tweeëntwintigste getal is in de rij die met één begint, en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het achtentwintigste in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Van die achtentwintig (getallen) worden de eerste acht, met inbegrip van de eenheid, *eerste* (getallen) genoemd, de acht daaropvolgende *tweede getallen*, de acht daaropvolgende *derde getallen* en de overige vier *vierde getallen*, en de laatste ervan is is duizend eenheden van de *vierde getallen*. Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ stadia kleiner is dan duizend eenheden van de *vierde getallen*.

Nog een keer, de bol met een diameter van tienduizend stadia is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ stadia. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van tienduizend stadia, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van duizend eenheden van de *vierde getallen* maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat duizend eenheden van de *vierde getallen* het achtentwintigste getal is in de rij die met één begint, en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het vierendertigste in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Van die vierendertig (getallen) worden de eerste acht, met inbegrip van de eenheid, *eerste* (getallen) genoemd, de acht daaropvolgende *tweede getallen*, de acht daaropvolgende *derde getallen*, de acht daaropvolgende *vierde getallen* en de overige twee *vijfde getallen*, en de laatste ervan is is tien eenheden van de *vijfde getallen*. Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter tienduizend stadia kleiner is dan tien eenheden van de *vijfde getallen*.

Nog een keer, de bol met een diameter van $\overline{\rho}$ tienduizenden stadia is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter van tienduizend stadia. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van $\overline{\rho}$ tienduizenden stadia, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van tien eenheden van de *vijfde getallen* maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat tien eenheden van de *vijfde getallen* het vierendertigste getal is in de rij die met één begint, en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het veertigste in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Van die veertig (getallen) worden de eerste acht, met inbegrip van de eenheid, *eerste* (getallen) genoemd, de acht daaropvolgende *tweede getallen*, de acht daaropvolgende *derde getallen*, de acht daaropvolgende *vierde getallen* en de acht daaropvolgende *vijfde getallen*, en de laatste ervan is is duizend tienduizenden van de *vijfde getallen*. Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ tienduizenden stadia kleiner is dan duizend tienduizenden van de *vijfde getallen*.

Nog een keer, de bol met een diameter van tienduizend tienduizenden stadia is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ tienduizenden stadia. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van tienduizend tienduizenden stadia, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van duizend tienduizenden van de *vijfde getallen* maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat duizend tienduizenden van de *vijfde getallen* het veertigste getal is in de rij die met één begint, en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het zesenveertigste getal in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Van die zesenveertig (getallen) worden de eerste acht, met inbegrip van de eenheid, *eerste* (getallen) genoemd, de acht daaropvolgende *tweede getallen*, de acht daaropvolgende *derde getallen*, de acht daaropvolgende *vierde getallen*, de acht daaropvolgende *vijfde getallen*, en de overige zes *zesde getallen*, en de laatste ervan is is $\overline{\iota}$ tienduizenden van de *zesde getallen*. Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter tienduizend tienduizenden stadia kleiner is dan $\overline{\iota}$ tienduizenden van de *zesde* *getallen.*

Nog een keer, de bol met een diameter van $\overline{\rho}$ tienduizend tienduizenden stadia is $\overline{\rho}$ tienduizenden keer zo groot als de bol met diameter tienduizend tienduizenden stadia. Als er dus een bol is gevuld met zand, van dezelfde grootte als een bol met een diameter van $\overline{\rho}$ tienduizend tienduizenden stadia, is het duidelijk dat het aantal zandkorrels daarin kleiner is dan het product van $\overline{\iota}$ tienduizenden van de *zesde getallen* maal $\overline{\rho}$ tienduizenden. Maar omdat tien tienduizenden van de *zesde getallen* het zesenveertigste getal is in de rij die met één begint, en de $\overline{\rho}$ tienduizenden het zevende getal zijn vanaf de één in dezelfde rij, is het duidelijk dat het product het tweeënvijftigste getal in dezelfde rij zal zijn vanaf de één. Van die tweeënvijftig (getallen) worden de eerste acht en veertig, met inbegrip van de eenheid, *eerste, tweede, derde, vierde, vijfde* en *zesde getallen* genoemd, en de overige vier *zevende* getallen, de laatste is duizend eenheden van de *zevende getallen.* Het is dus duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de bol met diameter $\overline{\rho}$ tienduizend tienduizenden stadia kleiner is dan duizend eenheden van de *zevende getallen.*

Omdat is aangetoond dat de diameter van de kosmos minder is dan $\overline{\rho}$ tienduizend tienduizenden stadia, is duidelijk dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de kosmos kleiner is dan duizend eenheden van de *zevende getallen.* Er is nu dus aangetoond dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft van wat de meeste astrologen als de kosmos beschouwen, kleiner is dan duizend eenheden van de *zevende getallen.*

Er zal nu worden aangetoond dat de hoeveelheid zand even groot als de bol van de vaste sterren zoals Aristarchos die veronderstelt, kleiner is dan $\overline{{}_{\prime}\alpha}$ tienduizenden van de *achtste getallen.* Omdat aangenomen is dat de aarde dezelfde verhouding heeft tot wat wij de kosmos noemen als de verhouding van die genoemde kosmos tot de bol van de vaste sterren, zoals Aristarchus veronderstelt, hebben de diameters van die bollen ook gelijke verhouding tot elkaar. Er is aangetoond dat de diameter van de kosmos kleiner is dan tienduizend maal de diameter van de aarde. Het is dus duidelijk dat de diameter van de sfeer van de vaste sterren kleiner is dan tienduizend maal de diameter van de kosmos. Aangezien bollen de drievoudige verhouding van de diameters tot elkaar hebben, is het duidelijk dat de bol van de vaste sterren, zoals Aristarchos die veronderstelt, kleiner is dan tienduizend maal tienduizend maal tienduizend maal de kosmos. Er is aangetoond dat de hoeveelheid zand die een grootte heeft even groot als de kosmos kleiner is dan $\overline{{}_{\prime}\alpha}$ eenheden van de *zevende getallen.* Dus is duidelijk dat de hoeveelheid zand even groot als de bol van de vaste sterren zoals Aristarchos die veronderstelt, kleiner is dan een aantal zandkorrels dat het product is van de duizend eenheden met tienduizend maal tienduizend maal tienduizend. En omdat de $\overline{{}_{\prime}\alpha}$ eenheden van de *zevende getallen* het tweeënvijftigste getal is in de rij vanaf de één, en de tienduizend maal tienduizend maal tienduizend het dertiende getal vanaf de één, is het duidelijk dat het product het vierenzestigste is in dezelfde rij vanaf de één. Dat is dus het achtste van de *achtste getallen*, dat is

$\overline{͵\alpha}$ tienduizenden van de *achtste getallen.*

Ik veronderstel, koning Gelon, dat deze dingen voor de vele mensen die niet bekend zijn met wiskunde ongeloofwaardig zullen lijken. Maar voor mensen met een wiskundige vorming, die over de afstanden en de grootten van de aarde, zon, maan en van de hele kosmos hebben nagedacht, zullen ze door het (d.w.z. mijn) bewijs acceptabel zijn. Daarom heb ik gemeend dat het ook voor jou niet oninteressant is hiervan kennis te nemen.

Literatuur

1. *Archimède tome II, Des spirales, De l'équilibre des figures planes, L'Arénaire, La quadrature de la parabole*, texte établi et traduit par Charles Mugler, Paris: Les Belles Lettres, 1971.

2. E.J. Dijksterhuis, Archimedes, Hoofdstuk XIII: De Zandrekenaar, *Euclides* **17** (1940-1), pp. 253-265.

3. *The Arenarius of Archimedes, with glossary, edited by E.J. Dijksterhuis*, Leiden: E.J. Brill, 1956. Textus Minores vol. XXI.

Getalswaarden en namen van de Griekse letters

1	2	3	4	5	6	7	8	9
α	β	γ	δ	ϵ	f	ζ	η	θ
alpha	beta	gamma	delta	epsilon	digamma	zeta	eta	theta
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ι	κ	λ	μ	ν	ξ	o	π	q
iota	kappa	lambda	mu	nu	ksi	omikron	pi	qoppa
100	200	300	400	500	600	700	800	900
ρ	σ	τ	υ	ϕ	χ	ψ	ω	(sampi)
rho	sigma	tau	upsilon	phi	chi	psi	omega	sampi

$1000 = {}_{\prime}\alpha \ldots 9000 = {}_{\prime}\theta$ $10000 = \mathrm{M}$

Figuur 1