Tekst 8

Archimedes, *De methode van de mechanische stellingen*, inleiding en propositie 2.

De volgende vertaling is gebaseerd op de editie van Heiberg, vol. 2, pp. 426-430, 438-446, vergeleken met de vertaling van E.J.Dijksterhuis in *Euclides* 17 (1940-1), pp. 8-10 en Paul Ver Eecke, vol. 2, p. 477-480, 484-488. De indeling in paragrafen is van de vertaler. De Griekse tekst van prop. 2 is toegevoegd.

De methode van Archimedes over de mechanische stellingen, aan Eratosthenes.

[1] Van Archimedes aan Eratosthenes, (ik hoop dat) het (je) goed gaat.

[2] Ik had je vroeger (enkele) van de (door mij) gevonden stellingen gestuurd, waarvan ik de beweringen[1] had opgeschreven en gevraagd had de bewijzen te vinden, die ik op dat moment niet vermeld had. Van de stellingen die ik toen gestuurd had waren de beweringen deze:

[3] Ten eerste: als in een recht prisma dat een parallelogram[2] als basis heeft een cylinder wordt ingeschreven, die zijn basisvlakken heeft in de tegenover elkaar liggende parallelogrammen (van het prisma) en de zijden op de overige vlakken van het prisma, en als een vlak aangebracht wordt door het middelpunt van de cirkel die de basis van de cylinder is, en één van de zijden van het vierkant in het er tegenover liggende vlak, dan zal het aangebrachte vlak een stuk van de cylinder afsnijden dat omvat wordt door twee vlakken en de oppervlakte van de cylinder, namelijk het vlak dat we aangebracht hadden, het vlak waarin de basis van de cylinder ligt, en het oppervlak van de cylinder tussen de twee genoemde vlakken. Het van de cylinder afgesneden stuk is één-zesde deel van het hele prisma.

[4] Van de andere stelling is de bewering deze: Als in een kubus een cylinder ingeschreven wordt waarvan de basisvlakken in de tegenover elkaar liggende parallelogrammen (van de kubus) liggen en waarvan het oppervlak de overige vier vlakken raakt, en een andere cylinder in dezelfde kubus wordt ingeschreven waarvan de basisvlakken in twee andere parallelogrammen (van de kubus) liggen en het oppervlak de overige vier vlakken raakt, dan is de figuur die overblijft onder de oppervlakken van de cylinders, (d.w.z.) die binnen beide cylinders ligt, twee derde van de hele kubus.

[1] Grieks: protasis, het eerste deel van de Griekse meetkundige stellingen en constructies, volgens het stramien van Euclides.

[2] Uit de rest van het boek blijkt dat de basis van het prisma een vierkant moet zijn.

[5] Nu is het zo dat deze stellingen anders zijn dan de stellingen die we eerder gevonden hadden. Want in die stellingen hadden wij figuren van conoïden en spheroïden en stukken daarvan, in grootte met kegels en cylinders vergeleken, maar van geen daarvan hadden wij gevonden dat hij gelijk is aan een lichaam dat bevat is door platte vlakken. Maar nu hebben we gevonden dat elk van deze beide figuren, die begrensd worden door platte vlakken en oppervlakken van cylinders, gelijk is aan een lichaam dat door platte vlakken wordt begrensd.

Van deze stellingen stuur ik je de bewijzen op schrift in dit boek.

[6] Omdat ik, zoals ik zei, jou zie als een ijverig persoon, noemenswaardig als onderwijzer van filosofie, en ook geacht in de wiskunde in de onderhavige beschouwingswijze, heb ik gedacht voor jou in dit zelfde boek ook een speciale methode op te schrijven en uiteen te zetten, waarmee het jou mogelijk zal zijn steun te krijgen bij het kunnen zien van bepaalde dingen in de wiskunde met behulp van de mechanika. Ik geloof dat dit niet minder nuttig is ook voor het bewijs van die stellingen zelf. Want sommige dingen die mij eerst door de mechanica duidelijk geworden zijn, zijn later meetkundig bewezen, omdat de zienswijze volgens deze methode (d.w.z. met mechanica) geen bewijskracht heeft. Nadat je door de methode wat kennis over de gezochte dingen gekregen heeft is het gemakkelijker het bewijs te vinden dan wanneer je moet zoeken terwijl je niets weet. Daarom komt ook van de stellingen die Eudoxos als eerste bewezen heeft, over de kegel en de pyramide, (namelijk) dat de kegel een derde deel is van de cylinder, en de pyramide een derde van het prisma met dezelfde basis en hoogte, geen gering deel van de eer aan Demokritos toe, die als eerste de uitspraak over de genoemde figuren zonder bewijs gedaan heeft. Ook bij ons is het zo dat van de hier beschreven stelling(en) de ontdekking zich net zo heeft afgespeeld als bij de eerdere stellingen. . . .

2

. . .

[1] Op de volgende manier kan met dezelfde methode worden ingezien dat elke bol (gelijk) is (aan) vier maal de kegel met basis gelijk aan de grootste cirkel in de bol en hoogte gelijk aan de straal van de bol, en dat de cylinder met basis gelijk aan de grootste cirkel van de bol en hoogte de middellijn van de bol, anderhalf maal de bol is.

[2] Laat er een bol zijn met grootste cirkel $AB\Gamma\Delta$, met middellijnen $A\Gamma$, $B\Delta$ loodrecht op elkaar, en laat er in de bol een (andere) cirkel zijn met middellijn $B\Delta$ loodrecht op cirkel $AB\Gamma\Delta$. Laat op deze loodrechte cirkel een

kegel beschreven zijn met top punt A, en nadat het oppervlak (van de kegel) verlengd is, laat de kegel een vlak door Γ evenwijdig aan de basis snijden. Zo zal een cirkel loodrecht op $A\Gamma$ gemaakt worden met diameter EZ. Laat op deze cirkel een cylinder beschreven zijn met as gelijk aan $A\Gamma$ en laat de zijden van de cylinder $E\Lambda$, ZH geconstrueerd zijn.

[3] Laat ΓA verlengd zijn, en laat $A\Theta$ gelijk daaraan gesteld zijn. Laat een balans $\Gamma\Theta$ gedacht zijn, met steunpunt A. Laat een lijn MN evenwijdig aan $B\Delta$ getrokken zijn, en laat deze lijn de cirkel $AB\Gamma\Delta$ in Ξ, O snijden, de middellijn $A\Gamma$ in Σ, de rechte AE in Π, AZ in P. Laat op de rechte MN een vlak opgericht zijn loodrecht op $A\Gamma$. Dan snijdt dit (vlak) de cylinder in een cirkel met middellijn MN, en de bol $AB\Gamma\Delta$ in een cirkel met middellijn ΞO, en de kegel AEZ in een cirkel met middellijn ΠP.

[4] Omdat de onder[3] $\Gamma A, A\Sigma$ gelijk is aan de onder $M\Sigma, \Sigma\Pi$, want $A\Gamma$ is gelijk aan ΣM en $A\Sigma$ is gelijk aan $\Pi\Sigma$, is het van $A\Xi$ gelijk aan de onder $\Gamma A, A\Sigma$, dat wil zeggen, de van $\Xi\Sigma, \Sigma\Pi$. Dus is de onder $M\Sigma, \Sigma\Pi$ gelijk aan de van $\Xi\Sigma, \Sigma\Pi$.

Maar omdat ΓA staat tot $A\Sigma$ als $M\Sigma$ tot $\Sigma\Pi$, dat is het van $M\Sigma$ tot de onder $M\Sigma, \Sigma\Pi$, en aangetoond is dat de onder $M\Sigma, \Sigma\Pi$ gelijk is aan de van $\Xi\Sigma, \Sigma\Pi$, staat dus $A\Theta$ tot $A\Sigma$ als het van $M\Sigma$ tot de van $\Xi\Sigma, \Sigma\Pi$.

Echter, het van $M\Sigma$ staat tot de van $\Xi\Sigma, \Sigma\Pi$ als het van MN tot de van ΞO, ΠP.

[5] En het van MN staat tot de van ΞO, ΠP als de cirkel met middellijn MN in de cylinder, tot de beide (andere) cirkels, die met middellijn ΠP in de kegel en die met middellijn ΞO in de bol.

Dus ΘA staat tot $A\Sigma$ als de cirkel in de cylinder tot de (andere) cirkels, in de bol en in de kegel.

[6] Omdat nu ΘA staat tot $A\Sigma$ als de cirkel in de cylinder, in dezelfde positie blijvend, tot de cirkels met middellijnen ΞO en ΠP, nadat die verplaatst zijn en in Θ geplaatst zijn zodat het zwaartepunt van allebei in Θ ligt, zullen zij op A in evenwicht zijn.

[7] Op dezelfde manier wordt aangetoond dat als een andere (rechte) wordt getrokken in het parallelogram ΛZ evenwijdig aan EZ, en door de getrokken (rechte) een vlak wordt opgericht loodrecht op $A\Gamma$, dat dan de cirkel die in de cylinder ontstaat, als die in zijn positie blijft, in evenwicht is om punt A met beide cirkels die in de cirkel en de kegel ontstaan nadat ze verplaatst zijn en op de balans op punt Θ worden geplaatst zodat Θ het zwaartepunt van allebei is. Omdat de cylinder wordt opgevuld met de achtergebleven (d.w.z niet verplaatste) cirkels en de bol en de kegel (met de

[3]Lees "de onder" als "de rechthoek met zijden gelijk aan", "het van" als "het vierkant van", en "de van …" als "de vierkanten van …".

verplaatste cirkels), zal de cylinder, die op zijn plaats blijft, om het punt A in evenwicht zijn met de bol en de kegel als die verplaatst zijn en opgesteld op de balans aan punt Θ, zodat het zwaartepunt van allebei Θ is.

[8] Omdat de genoemde lichamen dus om A in evenwicht zijn, en K het zwaartepunt is van de cylinder die op zijn plaats blijft, en de verplaatste bol en kegel, zoals gezegd is, om het zwaartepunt Θ zijn, staat ΘA tot AK als de cylinder tot de bol en de kegel. Maar ΘA is het dubbele van AK. Dus is de cylinder het dubbele van de bol en de kegel samen. Maar hij (de cylinder) is het drievoudige van de kegel, dus drie kegels zijn gelijk aan twee dezelfde kegels en twee bollen. Laat de twee gemeenschappelijke kegels weggenomen zijn. Dan is één kegel met driehoek door de as AEZ gelijk aan de genoemde twee bollen. Maar een kegel met driehoek door de as AEZ is gelijk aan acht kegels met driehoek door de as $AB\Delta$, doordat EZ het dubbele van $B\Delta$ is. Dus acht van de genoemde kegels zijn gelijk aan twee bollen. Daarom is de bol met grootste cirkel $AB\Gamma\Delta$ gelijk aan vier maal de kegel met top het punt A en basis de cirkel met middellijn $B\Delta$ loodrecht op $A\Gamma$.

[9] Laten nu in het parallelogram $A\Gamma$ door de punten B en Δ lijnen $\Phi B\Xi, \Psi\Delta\Omega$ evenwijdig aan $A\Gamma$ getrokken zijn, en laat een cylinder gedacht zijn met basisvlakken de cirkels met middellijn $\Phi\Psi, X\Omega$, en as $A\Gamma$. Omdat de cylinder met $\Phi\Omega$ als parallelogram door de as het dubbele is van de cylinder met $\Phi\Delta$ als parallogram door de as, en die laatste drie maal de kegel is met $AB\Delta$ als driehoek door de as, volgens de *Elementen*, is de cylinder met $\Phi\Omega$ als parallelogram door de as zes maal de kegel met $AB\Delta$ als driehoek door de as.

Er was aangetoond dat de bol met grootste cirkel $AB\Gamma\Delta$ viermaal die kegel is. De cylinder is dus anderhalf maal de bol. Dat moest aangetoond worden.

[10] Nadat dat ingezien was, en omdat elke bol viermaal de kegel is met basis de grootste cirkel en hoogte gelijk aan de straal van de bol, kwam de gedachte op, dat het oppervlak van elke bol vier maal de grootste cirkel in de bol is. Want het was een veronderstelling, dat zoals elke cirkel gelijk is aan een driehoek met basis de omtrek van de cirkel en hoogte gelijk aan de straal, zo ook elke bol gelijk is aan een kegel met basis het oppervlak van de bol en hoogte gelijk aan de straal van de bol.