и др.; о весах, рассматриваются вопросы практической геометрии, разъясняются правила измерения треугольника, четырехугольников разного вида, круга, сектора, сегмента, многоугольника, а также тела, в частности, конуса; специальные главы посвящены измерению арок и взвешиванию различных тел.

В третьей книге «Об основных вопросах алгебры и алмукабалы» определяются степени чисел, даются правила умножения и деления одночленов и многочленов, рассматривается теория отношений, приводятся правила действий с корнями. Она состоит из введения и девяти глав, каждая из которых разбита на разделы. Здесь рассматриваются, в частности, арифметические действия над корнями из многочленов, а также частный случай «бинома Ньютона» для $n=3$. Большое внимание уделено решению неопределенных уравнений.

Значительную часть сочинения составляет четвертая книга «О числовых задачах, решаемых с помощью алгебры и алмукабалы». Она представляет собой большой сборник задач, подразделенных на пять групп, как и в «ал-Фахри».

Пятая книга, как уже упоминалось, в рукописи отсутствует.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ващенко-Захарченко М. Е. История математики, Киев, 1883.
2. Матвиевская Г. П. Учение о числе на средневековом Востоке, Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1967.
3. Медовой М. И. Об арифметическом трактате Абу-л-Вафы, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XIII, М., Физматгиз, 1960, с. 253—324.
4. Розенфельд Б. А. Алгебраический трактат ас Самав'ала, В сб. «Историко-математические исследования», вып. XX, М., «Наука», 1975, с. 125—149.
5. Цейтен Г. Г. История математики в древности и средние века, перевод П. С. Юшкевича, М., Физматгиз, 1938.
6. Юшкевич А. П. История математики в средние века, М., Физматгиз, 1961.
7. Cantor M. Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, B. I., Berlin—Leipzig, 1922.
8. Luckey P. Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters. «Forschungen und Forschritte», Bd 24, 1948, Nr. 17/18, s. 15—75.
9. Hochheim Kāfī fil Hisāb des Abū Bekr Muhammed ben Alhusein Alkarchi, I—III, Halle, 1878—1880.
10. Levi della Vida G. Appunti e quesiti di storia litteraria araba, Rivista degli studi orient, vol. XIV, 1933, Fasc. III, p. 249—283.
11. Rashed R. Al-Ķaraji. «Dictionary of sci. biography», vol. 7, 1973, p. 240—346.
12. Rashed R. L'arifmetisation de la algebre de XI—eme siecle. Труды XIII Международного конгресса по истории науки, секции III—IV, М., 1974, с. 63—69.
13. Saidan A. S. Arabic arithmetic. The arithmetic of Abu al-Wafa al-Buzajani, 10-th century, Mss. Or. 103 Leiden and 42 m Cairo, Edited with the introduction and commentaries with ample reference to the arithmetic of al-Ķaraji (11-th century), ms 855 Istanbul, Amman, 1971.
14. Suter H. Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke. «Abhandl. zur Gesch. d. math. Wiss.», Heft X, Leipzig, 1900.
15. Woepcke F. Extrait du Fakhrī, précédé d'un memoire sur l'algébre indéterminée chez les arabes, Paris, 1853.

16. Абу Бакр Мухаммад ибн ал-Хасан ал-Хасиб ал-Ķараджи. «Китаб ал мухит фи-ал хисаб» (Объемлющая книга об арифметике), рукопись на арабском языке, Бухара, библиотека имени Ибн Сины, № 24.
17. Ал-Ķараджи. Ал-Бади фи-л-хисаб Таккик Адил Анбуба, Бейрут, 1964 (на арабском языке).

УДК 51(091)

А. АХМЕДОВ

«ĶНИГА ОБ ИЗВЛЕЧЕНИИ РЕБРА КУБА» АЛ-ХАСАН ИБН АЛ-ХАЙСАМА

«Ķнига об извлечении ребра куба» (قول فى إستخراج ضلع المكعّب) переведена с арабской рукописи, находящейся в Куйбышевской областной библиотеке, и представляет собой сборник трактатов по математике, физике и астрономии. В рукопись включена также часть «Ķниги вразумления начаткам науки о звездах» (Тафхим) Абу Райхана Беруни.

В трактате Ибн ал-Хайсам излагает способ извлечения кубического корня «с помощью индийской арифметики», т. е. древнеиндийским способом, совпадающим с методом Руффини-Горнера. Этот способ изложен в «Принципах индийской арифметики» Кушьяра ибн Лаббана и в «Достаточном об индийской арифметике» Абу-л-Хасана ан-Насави.

Ибн ал-Хайсам также излагает так называемый «метод сделок» طريق المعاملات, т. е. приближенный метод, который впоследствии был улучшен Насир ад-Дином ат-Туси (см. примеч. 3).

Ниже приводятся перевод трактата «Ķнига об извлечении ребра куба» и примечания к нему.

Книга об извлечении ребра куба*

451 || Во имя Аллаха милостивого, милосердного!
об. Ķнига ал-Хасана ибн ал-Хасана [ибн] ал-Хайсама об извлечении ребра куба[1].

Кубическое число — это произведение числа на произведение этого же числа на равное себе. Извлечение ребра куба производится тогда, когда число предполагается кубическим, а его ребро неизвестно. Нужно определить его ребро, т. е. число, которое, если умножить его на равное себе, а затем умножить его квадрат

* Перевод и примечания А. Ахмедова.

[на равное ему], то в произведении получится предположенное кубическое число. Обычно ребро куба извлекают с помощью индийской арифметики[2]. Никто не знает способа извлечения ребра куба не с помощью индийской арифметики. [Однако] если рассмотреть свойства этого числа, очевидные для нас, то можно извлечь ребро из этого числа «методом сделок»[3], не пользуясь индийской [арифметикой]. Об этом мы и составили эту книгу. В этой статье мы расскажем, как извлечь ребро куба «методом сделок» и с помощью индийской арифметики, так как возможно, что изучающий эту книгу не знает индийского метода и в его душе возникает желание узнать этот способ. Поэтому мы присоединим это к вычислительному «методу сделок», чтобы для желающего узнать это число сделать полным его знание обоих методов.

Способ извлечения ребра кубического числа таков: если предположено кубическое число, то находится произвольное число, умножается на равное себе, затем произведение умножается на первое число. То, что получилось, [может] не быть предположенным числом. Если оно равно ему, то первое взятое число—это ребро предположенного куба. Если же то, что получилось при умножении, не равно предположенному числу, то оно либо меньше его, либо больше его. Если оно больше предположенного числа, то оставь это взятое число и возьми другое, меньше его, умножь его на равное себе, а затем на его квадрат, а его квадрат—это его произведение на равное себе. Это произведение либо меньше предположенного числа, либо равно ему.

Если произведение равно данному числу, то взятое число — это ребро предположенного [кубического] числа. Если же оно меньше его, то умножь взятое число на три, умножь его квадрат на три. Сложи их и прибавь к ним числовую единицу: то, что получилось, прибавь к числу, получившемуся от умножения взятого числа на его квадрат. Если эта сумма равна данному числу, то прибавь к первому взятому числу единицу. И сумма первого числа с единицей — это ребро предположенного куба. Если же число суммы не равно предположенному числу, то оно будет меньше его, а не больше, если предположенное число было кубом. Если же оно меньше его, то умножь первое число вместе с единицей на три, умножь его квадрат также на три. Сложи их и прибавь к сумме числовую единицу, а то, что получилось, прибавь к первому числу суммы; которое было меньше предположенного числа. Если эта сумма равна предположенному числу, прибавь к числу, являющемуся суммой первого числа с единицей, другую единицу. Это и будет искомым ребром. Если же это число не равно предположенному, то оно будет меньше его. С полученным таким образом вторым числом будем поступать так же, как и с первым. И всегда умножай получившееся число на три, умножай его квадрат на три, прибавляй к их сумме единицу, затем каждый раз к полученному числу прибавляй единицу до тех пор, пока полученное число суммы не будет равно предположенному кубическому

числу. Если оно будет равно ему, то полученное число является ребром предположенного числа.

Число, которое мы называем полученным,— это число суммы первого взятого числа с единицами, которые я прибавлял по одной к этому числу. У этого действия имеется также разновидность, в которой первое взятое число умножается на равное себе, затем умножается на свой квадрат. То, что получается, вычитается из предположенного кубического числа, и от куба до него имеется остаток; умножь взятое число на три и его квадрат умножь на три и сложи их оба. Прибавь к сумме единицу, а затем эту сумму вычти из остатка от куба. Затем к взятому числу прибавь единицу. Тогда остаток от куба будет вторым остатком. Полученное число умножь на три, и его квадрат на три, а к сумме прибавь единицу, а всю сумму вычти из второго остатка. К полученному числу также всегда прибавляй единицу до тех пор, пока не получится предположенное кубическое число и не будет никакого остатка. При этом сумма является кубическим числом, это число и будет ребром предположенного кубического числа и искомое число — ребро куба. Это и есть тот способ, которому мы следовали и о котором упоминали выше. Несомненно, что когда полученное
252 число — кубическое, || никаких остатков не будет.

Пример всего упомянутого нами. Пусть предположенное кубическое число — тысяча семьсот двадцать восемь[4] и надо извлечь его ребро. Возьми число десять, умножь его на себя, получится сто. Затем умножь десять на сто, получится тысяча. Сравни его с предположенным числом, т. е. тысячей семистами двадцатью восемью. Тысяча меньше предположенного. Умножь десять на три, получится тридцать, умножь сто на три, получится триста. Сложи их, получится триста тридцать. Прибавь к сумме единицу, получится триста тридцать один. Это меньше предположенного числа. Прибавь к десяти единицу, получится одиннадцать, т. е. ребро куба тысячи трехсот тридцати одного, так как если умножить одиннадцать на равное себе, а затем произведение умножить на одиннадцать, получится тысяча триста тридцать один.

Затем умножь одиннадцать на себя, получится сто двадцать один. Умножь одиннадцать на три, будет тридцать три. Умножь сто двадцать один на три, получится триста шестьдесят три. Сложи их вместе с единицей, [в сумме] будет триста девяносто семь. Прибавь это к первой сумме, т. е. к тысяче тремстам тридцати одному, получится тысяча семьсот двадцать восемь. Это равно предположенному числу. Прибавь к одиннадцати единицу, будет двенадцать. Это и есть ребро предположенного куба, т. е. тысячи семисот двадцати восьми.

Если мы вычтем тысячу из тысячи семисот двадцати восьми, из остатка вычтем триста тридцать один, а из [второго] остатка — триста девяносто семь, то получим предположенное число. Прибавляя каждый раз к первому числу [произведения], мы закончим действие, прибавив две единицы. Проверка правильности этого действия такова. Последнее полученное число (в этом примере двенадцать) умножь на равное себе, получится сто сорок четыре. Затем двенадцать умножь на сто сорок четыре, получится тысяча семьсот двадцать восемь.

Однако не всякое число является кубом и не для всякого предположенного числа можно искать его ребро, считая его кубом. Для всякого числа, не являющегося кубом, нет точного ребра куба. Но ребро куба числа, не являющегося кубом, извлекается приближенно так же, как приближенно извлекается корень числа, не являющегося квадратом.

Если предположено число и мы хотим вычислить его ребро куба, то последуем изложенному способу. Если это число — куб, то наше действие, безусловно, приводит к числу, равному требуемому, и если мы будем производить вычитание, то не останется никакого остатка. Если же число не куб, то обязательно будет остаток. А если умножить полученное число на три и его квадрат умножить на три и сложить их вместе с единицей, то возможно, что сумма будет больше остатка. Поскольку действие достигло этой границы, умножь полученное число на равное себе, затем умножь его квадрат на три, а остаток от предположенного числа раздели на квадрат, умноженный на три. Частное от деления—доли единицы. Прибавь эти доли к полученному числу. Сумма будет приближенным ребром куба предположенного числа.

Пример этого. Если данное число — тысяча восемьсот и мы хотим найти его ребро куба, то последуем нашему способу, изложенному выше. Поскольку у нас имеется двенадцать, то их куб — тысяча семьсот двадцать восемь. Если мы вычтем это число из тысячи восьмисот, останется семьдесят два. Если умножим двенадцать на три, а квадрат этого числа, т. е. сто сорок четыре, умножим на три и к их сумме прибавим единицу, то вся сумма будет четыреста шестьдесят девять. Эта сумма больше остатка, т. е. семидесяти двух. Умножим квадрат двенадцати на три, получится четыреста тридцать два. Разделим семьдесят два на четыреста тридцать два. Но семьдесят два — одна шестая от четырехсот тридцати двух. Прибавим к двенадцати одну шестую, получится двенадцать и одна шестая. Это приблизительное ребро куба тысяча восемьсот. Для проверки этого умножим двенадцать и одну шестую на двенадцать и одну шестую, получится сто сорок восемь и одна тридцать шестая. Затем умножим двенадцать и одну шестую на сто сорок восемь. [Получится тысяча восемьсот и две тысячи, умножим двенадцать и одну шестую на одну тридцать шестую, получится треть и одна шестая одной тридцать шестой][5].

Примечания

[1] „Книга об извлечении ребра куба" (قول فى إستخراج ضلع المكعّب) знаменитого египетского математика Ибн ал-Хайсама (965—1039), переведена с уникальной рукописи Куйбышевской областной библиотеки, описанной Б. А. Розенфельдом [1]. Трактат занимает лл. 451 об. и 452 рукописи. „Ребро куба" — кубический корень. В первой строчке трактата Ибн ал-Хайсам назван не ал-Хасаном, а ал-Хусейном.

[2] Извлечение куба „с помощью индийской арифметики"—извлечение по методу Руффини—Горнера, совпадающему с древнеиндийским способом из математики в десяти книгах, изложенное в „Принципах индийской арифметики" Кушьяра ибн Лаббана (971—1029) [2] и в „Достаточном об индийской арифметике" Абу-л-Хасана ан-Насави (ок. 970—ок. 1070гг.) [3]. О совпадении этого метода с методом Руффини—Горнера см. [3], с. 426—427.

[3] „Метод сделок" (طريق المعاملات)—метод, предлагаемый Ибн ал-Хайсамом, согласно которому $\sqrt[3]{n}$ находится следующим образом:

1) в случае, когда n—кубическое число и a таково, что $a^3 < n$, находятся $a_1^3 = a^3 + 3a^2 + 3a + 1$, $a_2^3 = a_1^3 + 3a_1^2 + 3a_1 + 1$ и т. д. и для некоторого k $a_k^3 = n$;

2) в случае, когда n—не кубическое число и если $n = a + r, a^3 < n^3 < (a+1)^3$, за приближенное значение корня принимается $n \approx a + \frac{r}{3a^2}$. Это значение более грубое, чем значение $n = a + \frac{r}{(a+1)^2 - a^3} = a + \frac{r}{3a^2 + 3a + 1}$, принимавшееся Насир ад-Дином ат-Туси (1201—1274 гг.) в его „Сборнике по арифметике с помощью доски и пыли" [4] и, возможно, Хайямом (1048—1131 гг.) в недошедших до нас „Проблемах арифметики"; промежуточным между приближенными значениями Ибн ал-Хайсама и ат-Туси является приближенное значение ан-Насави

$$n \approx a + \frac{r}{3a^2 + 1}.$$

[4] Здесь и ниже вместо 1728 ошибочно написано 1723.

[5] Здесь рукопись обрывается. В примере Ибн ал-Хайсама

$$\sqrt[3]{1800} \approx 12 + \frac{72}{3 \cdot 144} = 12\frac{1}{6}.$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Б. А. Розенфельд. Ценная находка в области истории математики, физики и астрономии. В сб. «Вопросы истории естествознания и техники», вып. 5, М., «Наука», 1974.
2. Kushyar ibn Labban. Principles of Hindu Reckoning, ed. and transl. by M. Lévey and M. Petruck, Madison—Milwau Kee, 1965.
3. Абу-л-Хасан ан-Насави. Достаточное об индийской арифметике, ИМИ, Пер. М. И. Медового, вып. 15, М., «Наука», 1963, с. 381—430.
4. Насир ад-Дин ат-Туси. Сборник по арифметике с помощью доски и пыли, ИМИ, Пер. С. А. Ахмедова и Б. А. Розенфельда, вып. 15, М., «Наука», 1963, с. 431—444.

УДК 51(091)

П. Г. БУЛГАКОВ

БЕРУНИ И ХОРЕЗМИ

Задача историков науки — не только выявить вклад того или иного ученого в развитие отдельных отраслей знания, но

J. P. Hogendijk
gift from Tashkent 1984

АКАДЕМИЯ НАУК УЗБЕКСКОЙ ССР
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ им. В. И. РОМАНОВСКОГО

МАТЕМАТИКА И АСТРОНОМИЯ В ТРУДАХ УЧЕНЫХ СРЕДНЕВЕКОВОГО ВОСТОКА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «ФАН» УЗБЕКСКОЙ ССР
ТАШКЕНТ—1977

УДК 51(091)

А. Ахмедов. **«Книга об извлечении ребра куба» Ал-Хасан ибн ал-Хайсама.** Сб. «Математика и астрономия в трудах ученых средневекового Востока», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1977. Библ.—4 назв., с. 113—117.

Статья включает в себя предисловие, перевод с арабского и примечания к указанному трактату Ибн ал-Хайсама. Имеет ценность с точки зрения истории математики.

УДК 51(091)

П. Г. Булгаков. **Беруни и Хорезми.** Сб. «Математика и астрономия в трудах ученых средневекового Востока», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1977, с. 117—122.

Рассматривается вопрос об отношении выдающегося хорезмского ученого-энциклопедиста XI в. Абу Райхана Беруни (ум. в 1048 г.) к научному наследию своего великого предшественника, также уроженца Хорезма, математика, астронома и географа Мухаммада ибн Мусы Хорезми (ум. после 847 г.). Впервые устанавливается факт заимствования Беруни величин географических координат населенных пунктов западной части ойкумены из «Географии» Хорезми, а также обобщаются данные об исследовании и популяризации Беруни математических и астрономических трудов Хорезми.

УДК 51(091)

И. С. Аржаных. **Комментарии и дополнения к некоторым классическим математическим фактам.** Сб. «Математика и астрономия в трудах ученых средневекового Востока», Ташкент, Изд-во «Фан» УзССР, 1977, с. 123—138.

Дается комментарий с точки зрения современной математики к некоторым результатам, полученным математиками прошлого (Омаром Хайямом и др.).

СОДЕРЖАНИЕ

Предисловие 3
Г. П. Матвиевская. Десятая книга «Начал» Евклида в средневековых арабских комментариях 4
Г. П. Матвиевская, Х. Тллашев. Абу Наср Мансур ибн Ирак и его обработка «Сферики» Менелая. 81
Х. Тллашев, С. А. Рамазанова. Трактаты Абу Насра Ибн Ирака об астролябии. . . . .
С. А. Рамазанова. Восточные средневековые теории движения Луны и планет. 89
М. Абрарова. Ал-Караджи и его «Объемлющая книга об арифметике». 107
А. Ахмедов. «Книга об извлечении ребра куба» Ал-Хасан ибн ал-Хайсама 113
П. Г. Булгаков. Беруни и Хорезми 117
И. С. Аржаных. Комментарии и дополнения к некоторым классическим математическим фактам. 123