Historisch-litterarische Abteilung.

Die Kreisquadratur des Ibn el-Haiṯam.

Zum ersten Mal nach den Manuskripten der königl. Bibliothek in Berlin und des Vatikans herausgegeben und übersetzt

von

HEINRICH SUTER
in Zürich.

Einleitung.

Von verschiedenen Seiten ist schon längst der Wunsch geäussert worden, es möchte die Abhandlung des **Ibn el-Haiṯam**, die sich mit der Quadratur des Kreises beschäftigt, einmal veröffentlicht werden; so sagt unter anderen Herr M. **Cantor** in seinen Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* es sei „ungemein zu bedauern, dass sie noch keinen Bearbeiter gefunden habe, weil sie die erste Abhandlung dieses Titels seit **Archimedes** ist, von deren Erhaltung wir Kenntnis haben, und weil nach der Bedeutung des Verfassers zu urteilen, sicherlich interessante Versuche darin zu erwarten sind, dem Werte der Kreisfläche so nahe als möglich zu kommen.“ Dieser Umstand selbstverständlich verbunden mit meinem besonderen Interesse für historische Forschungen auf dem Gebiete der arabischen Mathematik haben mich bewogen, diese Arbeit zu unternehmen.

Leider aber erfahren diejenigen, die ihre Hoffnungen auf die wissenschaftliche Bedeutung Ibn el-Haiṯams gegründet haben, eine herbe Enttäuschung; er mag wohl ein recht bedeutender, in den Schriften der Alten sehr bewanderter Mathematiker gewesen sein, dazu kam aber ein bei den Orientalen sehr verbreiteter, durch ihre Beschäftigung mit neupythagoräischer und neuplatonischer Philosophie wesentlich genährter Zug zur spekulativen Philosophie und Mystik und überdies noch ein starker Hang zur Vielschreiberei, werden doch von ihm gegen 120 Schriften mathematischen, astronomischen und philosophischen Inhalts erwähnt, mehr als von irgend einem anderen mathematischen Schriftsteller der Araber. So ist denn aus diesen

* Bd. 1 I. Aufl. S. 678, II. Aufl. S. 744.

Gründen Ibn el-Haitams Arbeit eine seltsame Mischung von geometrischen Wahrheiten mit philosophischen Argumenten, sie bietet keine vollständige Durchführung der Kreisquadratur dar, sondern giebt nur einen teils mathematischen, teils philosophischen Beweis der Möglichkeit der Quadratur, dessen erster mathematischer Teil über die Hippokratischen Mondfiguren gar nicht nötig wäre.

El-Hasan* ben el-Hasan** ben el Haitam, Abû ʿAlî, geb. c. 354 (965) in Basra, bekannt unter dem Namen Ibn el-Haitam, oder auch Abû ʿAlî el-Basrî, war ein vortrefflicher Mensch, besass hohe Intelligenz und grosses Wissen, es kam ihm keiner seiner Zeit gleich, ja nicht einmal nahe in den mathematischen Wissenschaften; er war ausdauernd in der Arbeit, fruchtbar als Schriftsteller und sehr enthaltsam im Leben. Er lebte anfänglich in Basra und bekleidete auch einige Zeit das Amt eines Wezirs; sein Geist neigte sehr zur Gelehrsamkeit und zur Kontemplation hin, so dass er gerne den Beschäftigungen entsagt hätte, die ihn am wissenschaftlichen Arbeiten hindern konnten. Infolge seiner eifrigen Studien und seiner übrigen angestrengten Beschäftigung trat eine Geistesstörung bei ihm ein, so dass er sein Amt niederlegen musste. Nachdem er wieder geheilt war, begab er sich nach Ägypten und liess sich in Kairo nieder, wo er neben der Moschee el-Azhar wohnte. Dem Beherrscher von Ägypten, el-Hâkim, waren die grossen wissenschaftlichen Kenntnisse des Ibn el-Haitam zu Ohren gekommen und er verlangte nach seinem Rat. Es war ihm auch mitgeteilt worden, dass er gesagt habe: „Wenn ich in Ägypten wäre, so würde ich den Nil so korregieren, dass er in jedem Zustand, bei Zu- und Abnahme des Wasserstandes, nutzbringend sein würde.“ Dies bewog el-Hâkim, ihm dieses Unternehmen anzuvertrauen, er versah ihn mit allen möglichen Hilfsmitteln und Ibn el-Haitam reiste nach den südlichen Nilgegenden ab. Dort erkannte er aber, dass die Ausführung des Unternehmens nicht möglich sei und beschämt und niedergeschlagen kehrte er nach Kairo zurück; er fiel dadurch bei el-Hâkim in Ungnade und sah seine Stellung und sogar sein Leben gefährdet. Um sich zu retten, kam er auf den Gedanken sich wahnsinnig zu stellen; diese List gelang ihm, er wurde in seiner Wohnung eingeschlossen und bewacht und sein Vermögen konfisziert. In diesem Zustande musste er nun aushalten bis zum Tode el-Hâkims, worauf er wieder frei wurde und sein Gut wieder zurückerhielt; er lebte dann in Kairo mit wissenschaftlichen Arbeiten beschäftigt bis zu seinem Tode, der Ende des Jahres 430 (1039), oder kurze Zeit nachher erfolgte. — Was seine Schriften betrifft, so verweise ich den Leser auf das Verzeichnis derselben bei Woepcke,***

* Statt dieses Namens hat Ibn Abî Usaibi'a „Muhammed“.

** Hier hat Abûlfaraǵ „Husain“.

*** L'Algèbre d'Omar Alkhayyâmî, etc. Paris 1851, p. 73 flg.

darunter befindet sich auch die Quadratur des Kreises (Nr. 30). Er bearbeitete und kommentierte auch einen grossen Teil der Aristotelischen Schriften, wie auch der Schriften des Galenus und war bewandert in den Prinzipien der Medizin, in allen ihren Regeln und Praktiken, doch fungierte er nie als Arzt, seine therapeutischen Kenntnisse waren gering. Von seinen Schriften ist noch eine bedeutende Zahl in den Bibliotheken Europas und des Orientes vorhanden, worauf wir später an einer andern Stelle zu sprechen kommen werden. Neben der Abfassung eigener Arbeiten schrieb er für seinen Lebensunterhalt eine grosse Menge mathematischer und anderer Werke ab, so jedes Jahr einmal die Elemente des Euklides, die mittlern Bücher und den Almagest; er schrieb schön und fehlerlos. (Nach Ibn Abî Usaibiʿa, Edit. Müller, II. 90, Abûlfaraǵ, Edit. Pocock, 340 und Ibn el-Kiftî [bei Casiri I. 414]).

Die Berliner königl. Bibliothek besitzt zwei Manuskripte der Kreisquadratur des Ibn el-Haitam, das eine befindet sich im Codex Mf. 258, das andere im Codex Mq. 559; beide Codices habe ich in der Bibliotheca mathematica 1898 Nr. 3 beschrieben, ich verweise den Leser auf diese Abhandlung. Hier bleibt mir nur noch übrig, der Verwaltung der königl. Bibliothek zu Berlin meinen ergebensten Dank auszusprechen für die Erlaubnis der Benutzung der beiden Manuskripte für längere Zeit auf der Kantonsbibliothek in Zürich.

Einen unschätzbaren Dienst hat mir sodann Herr Prof. C. A. Nallino am königl. orientalischen Institute in Neapel erwiesen, indem er die Güte hatte, meine Abschrift aus den Berliner Codices mit dem Manuskripte des Vatikans zu collationieren, von ihm ist auch die folgende genaue Beschreibung des Manuskriptes; diesem hochgeachteten Gelehrten spreche ich hiermit ebenfalls meinen ergebensten Dank aus.

Das Manuskript des Vatikans trägt jetzt die Nummer CCCXX nach dem Katalog der arabischen, persischen, türkischen etc. Manuskripte des Vatikans von Angelo Maio, Rom 1831, p. 467; dasselbe besteht aus sieben Blättern (Bombyc.-Papier) von 138 mm Höhe und 98 mm Breite, von denen das letzte leer ist, jede Seite hat 15 Linien, die Schrift ist das Nastaʿlîq.

Es wurde nach dem Jahre 1622 aus Persien nach Europa gebracht von Pietro Della Valle, dem berühmten italienischen Reisenden, wie sich aus folgenden auf fol. 1 r. stehenden Worten ergiebt: „De quadratura circuli author Arabs antiquus. Opusculum hoc celeberrimi cujusdam Mathematici, apud Orientales cognomine Ben Hithem notissimi, ante septingentos circiter annos compilatum fuisse, dum ipse in Persidis civitate, Lar nuncupata, commorarer anno Dñi 1622, author mihi fuit Moullà Zeineddin Larita Astrologus et Mathematicus pariter insignis, quocum arctissima intercedebat mihi necessitudo. Petrus De Valle.“

3*

In den Noten zum arabischen Text bezeichnet A das Berliner Manuskript Mf. 258, B das Manuskript Mq. 559 derselben Bibliothek und C dasjenige der Vatikanischen Bibliothek. Um eine zu grosse Zahl der Noten zu vermeiden, gebe ich geringe Abweichungen der Manuskripte, wie z. B. solche in den diakritischen Punkten, nicht an. — Was die Figuren anbetrifft, so sind dieselben in den beiden Berliner Manuskripten nicht ganz korrekt, doch in B bedeutend besser als in A.

Übersetzung.

Im Namen Gottes des Barmherzigen und Gnädigen,
des Herrn, der Erfolg verleiht!

Abhandlung des Ibn el-Haiṯam über die Quadratur des Kreises — Es glauben viele Philosophen, dass es unmöglich sei, dass die Fläche des Kreises gleich einem Quadrate sei und weisen diese Ansicht in vielen ihrer Streitschriften und Kontroversen zurück; in der That finden wir bei keinem der ältern und neuern Geometer eine geradlinige Figur, die gleich einer Kreisfläche bis zur äussersten Grenze der Genauigkeit wäre, denn was die von Archimedes in seiner Kreismessung erwähnte (Figur) anbetrifft, so wird dazu nur ein Teil der Fläche (?) verwendet.* Diese Thatsache neben andern Gründen war es, was die Philosophen in ihrem Glauben bestärkt hat. Da sich nun dies so verhält, so haben wir eifrig unsere Gedanken auf diesen Gegenstand gerichtet und es schien uns, dass die Sache möglich und nicht schwierig sei; zur Bekräftigung dieser Ansicht dienen die Beispiele, dass es eine von zwei Kreisbogen begrenzte Mondfigur giebt, die gleich einem Dreieck ist, dass ferner eine Mondfigur und ein Kreis zusammen gleich einem Dreieck sind; wir haben verschiedene Fälle dieser Art in unserm Buche über die Mondfiguren erwähnt.**

Nachdem wir nun die Sache bis zu diesen Eigenschaften der Mondfiguren gebracht hatten, wurden wir in der Ansicht bestärkt, dass es möglich sei, dass die Fläche des Kreises gleich derjenigen eines Quadrates sein könne, und wir haben eifrig darüber nachstudiert, bis der Beweis klar vor uns lag, dass die Sache möglich sei und darüber kein Zweifel mehr bestehen könne. Dann haben wir darüber folgende Abhandlung verfasst.

* Ich glaube, dass Ibn el-Haiṯam hier sagen will, Archimedes nehme statt des ganzen Kreises nur das 96-Eck.

** Dieses Buch findet sich in der That im Verzeichnis seiner Schriften bei Ibn Abî Usaibi'a und zwar in einer kürzeren und einer ausführlicheren Fassung; Woepcke übersetzt unrichtig: „Abrégé sur les figures de la nouvelle lune", und „Mémoire développé sur les figures de la nouvelle lune." Die ausführlichere Fassung ist noch vorhanden in der Bibliothek d. India Office (im Catalog von O. Loth, London 1877, sub Nr. 734, 12°).

Wir sagen: Wir ziehen in einem beliebigen Kreis einen Durchmesser, nehmen dann auf einem der Halbkreise einen beliebigen Punkt an, und ziehen von demselben zwei Gerade nach den beiden Endpunkten des Durchmessers; hierauf beschreiben wir über diesen beiden Geraden zwei Halbkreise, so sind die von den beiden Halbkreisen und den Bogen des ersten Kreises begrenzten Mondfiguren zusammen gleich dem Dreieck im ersten Kreis. Wir haben diesen Satz schon in unserm Buche über die Mondfiguren bewiesen, doch wollen wir den Beweis hier nochmals wiederholen: Es sei der Kreis ABG gegeben (Fig. 1), sein Mittelpunkt sei D, wir ziehen durch D den Durchmesser ADG und nehmen auf dem Umfang des Kreises den Punkt B an, ziehen dann die beiden Geraden BG und AB, und beschreiben über denselben die beiden Halbkreise AEB und BZG; nun sagen wir, dass die beiden Monde $AEBH$ und $BZGT$ zusammen gleich dem

Fig. 1.

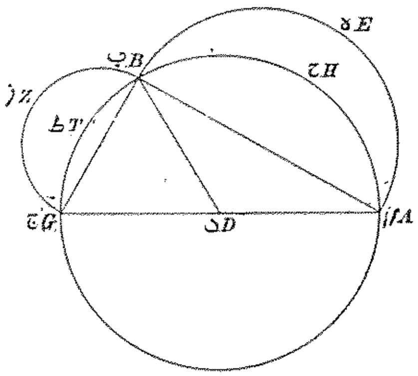
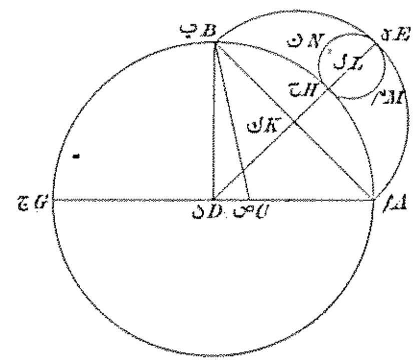


Fig. 2.



Dreieck ABG seien. Beweis: Von irgend zwei Kreisen verhält sich der eine zum anderen wie das Quadrat des Durchmessers des einen zum Quadrat des Durchmessers des andern, wie im zweiten Satze des 12. Buches der Elemente bewiesen worden ist, also

$$\text{Kreis } BZG : \text{Kreis } BEA = BG^2 : AB^2;$$

durch Zusammenziehung ergiebt sich:

$$BG^2 + AB^2 : AB^2 = BZG + BEA : BEA;$$

nun ist aber $BG^2 + AB^2 = AG^2$, also

$$AG^2 : AB^2 = BZG + BEA : BEA.$$

Aber es ist auch $AG^2 : AB^2 = \text{Kreis } ABG : \text{Kreis } BEA$, also hat man:

$$BZG + BEA : BEA = ABG : BEA,$$

mithin ist Kreis $ABG = BZG + BEA$, also auch

$$\text{Halbkreis } ABG = \text{Halbkreise } BZG + BEA.$$

Wenn wir nun die beiden Segmente AHB und BTG, die dem Kreise ABG und den beiden Kreisen AEB und BZG gemeinschaftlich sind, (beiderseits) wegnehmen, so bleibt: Dreieck ABG = den beiden Monden $AEBH$ und $BZGT$ zusammen, w. z. b. w.* — Wenn nun die beiden Bogen AHB und BTG einander gleich sind, so sind auch AB und BG einander gleich, ebenso die beiden Kreise AEB und BZG, also auch ihre Hälften und ebenso die Monde $AEBH$ und $BZGT$; ziehen wir noch BD, so sind auch die beiden Dreiecke ABD und BDG einander gleich, also ist auch jeder einzelne der beiden Monde gleich jedem einzelnen der beiden Dreiecke, also z. B. der Mond $AEBH$ gleich dem Dreieck ABD.

Nachdem nun dies bewiesen ist, so nehmen wir wieder den Kreis (ABG, Fig. 2) mit dem Monde $AEBH$ und dem Dreieck ABD und teilen AB in zwei gleiche Teile im Punkte K, so dass K der Mittelpunkt des Kreises AEB ist; dann ziehen wir DK und verlängern es, bis es die Bogen AHB und AEB in den Punkten H und E trifft, so ist $DKH(E)$ ein Durchmesser (Halbmesser) des Kreises ABG und zugleich des Kreises AEB, weil er durch die Mittelpunkte beider geht; hierauf teilen wir EH in zwei gleiche Teile im Punkte L und nehmen L als Mittelpunkt eines Kreises an, den wir um L mit dem Radius LH beschreiben, es sei dies der Kreis $HMEN$, so berührt dieser Kreis den Kreis ABG von aussen und den Kreis AEB von innen, weil er jeden der beiden Kreise in den Endpunkten eines ihnen und ihm selbst gemeinschaftlichen Durchmessers trifft. Nun liegt der Kreis $HMEN$ ganz im Innern des Mondes $AEBH$, also ist er ein Teil dieses Mondes. Nun hat jede Grösse zu jeder Grösse, die ein Teil von ihr ist, ein gewisses bestimmtes Verhältnis, wenn auch niemand dieses Verhältnis kennt und nicht zu seiner Kenntnis zu gelangen vermag; denn das Verhältnis zwischen den (beiden) Grössen existiert nicht bloss dann, wenn** es den Menschen bekannt ist, oder wenn sie vermögen es aufzufinden und zu erkennen (sondern absolut, ohne Rücksicht hierauf). Das Verhältnis zwischen zwei Grössen ist aber nur eine wesentliche Eigenschaft für Grössen derselben Art; wenn also irgend zwei Grössen derselben Art gegeben sind, und jede von ihnen ist begrenzt, endlich, in ihrer Grösse verharrend, in keiner Weise sich ändernd, weder durch Zunahme noch Abnahme, noch in Bezug auf die Art, so hat die eine zur andern ein bestimmtes einziges Verhältnis, das sich in keiner Weise ändert. Wenn ferner ein Teil irgend einer Grösse, der mit ihr von gleicher Art ist, ebenfalls begrenzt, endlich ist, sich weder in Hinsicht auf die Art, noch auf die Grösse, noch auf die Form ändert und dasselbe auch vom Ganzen

* Dieser Satz findet sich in dieser Allgemeinheit bei Hippokrates nicht (vergl. das von Simplicius im Kommentar zur Physik des Aristoteles uns erhaltene Fragment des Eudemus), er darf also wohl dem Ibn el-Haitam zugesprochen werden.

** Eigentlich „deswegen weil".

gilt, so hat die ganze Grösse zu ihrem Teile ein bestimmtes einziges Verhältnis, das sich in keiner Weise ändert. — Wenn nun also der Kreis ABG gegeben ist, so ist auch sein Umfang gegeben, ebenso sein Durchmesser und sein Mittelpunkt, ebenso ist der Bogen AB als ein Viertel des Kreisumfangs gegeben, also ist auch die Sehne AB gegeben, ebenso BD, also auch das Dreieck ABD; unter „gegeben" verstehe ich bei allen diesen Grössen, was ich als Eigenschaft des Kreises ABG angenommen habe, dass sie unveränderlich sind, fest in ihrem Zustand beharren; denn das „Gegebene" heisst bei den Mathematikern das, was sich nicht ändert. Also ist ferner der Halbkreis AEB gegeben, weil sein Durchmesser AB gegeben ist, also auch der Bogen AEB, ebenso der Bogen AHB, mithin ist auch der Mond $AEBH$ gegeben, d. h. er ist fest in seinen Eigenschaften, unveränderlich sowohl in Hinsicht auf die Art, als auch auf die Grösse, als auch auf die Form; unter „Art" verstehe ich, dass er eine ebene Fläche ist; also ist ferner die Linie KE als Halbmesser des Kreises AEB gegeben, ebenso die Linie KH, weil ihre beiden Endpunkte bestimmt sind, mithin auch die Linie HE, d. h. sie ist unveränderlich sowohl in Bezug auf Grösse, als auch in Bezug auf Art und Form; HE ist aber der Durchmesser des Kreises $HMEN$, also ist auch dieser Kreis gegeben, d. h. unveränderlich in Bezug auf seine Grösse und seine Form. Dieser Kreis $HMEN$ ist aber ein Teil des Mondes $AEBH$ und beide, Mond und Kreis, sind unveränderlich in ihren Eigenschaften und von einer Art, weil der eine ein Teil des andern ist; also hat der Mond $AEBH$ zum Kreis $HMEN$ ein feststehendes Verhältnis, das sich in keiner Weise ändert. Nun kann jedes Verhältnis einer Grösse zu einem Teil derselben gleichgesetzt werden dem Verhältnis irgend einer anderen Grösse zu einem entsprechenden Teil derselben; also sei z. B. das Verhältnis des Mondes $AEBH$ zum Kreis $HMEN$ gleich dem Verhältnis der Linie AD zu einem Teil derselben, ob wir diesen Teil kennen oder nicht, ob wir im stande sind, ihn aufzufinden oder nicht (kommt hier nicht in Betracht), genug dieser Teil sei DC; also ist das Verhältnis des Mondes $AEBH$ zum Kreise $HMEN$ gleich dem Verhältnis $AD:DC$, das ein unveränderliches ist, weil das erstere es ist; wenn aber dieses Verhältnis ein unveränderliches ist, so ist auch die Linie DC eine ganz bestimmte, unveränderlich in ihrer Grösse, weil die Linie AD eine der Grösse nach gegebene, unveränderliche ist. Wir ziehen noch BC und erhalten so das Dreieck BDC; nun verhält sich

$$\text{Dreieck } ABD : \text{Dreieck } BDC = AD : DC,$$

aber

$$AD : DC = \text{Mond } AEBH : \text{Kreis } HMEN;$$

also

$$\text{Dreieck } ABD : \text{Dreieck } BDC = \text{Mond } AEBH : \text{Kreis } HMEN,$$

oder durch Umstellung:

Dreieck ABD : Mond $AEBH$ = Dreieck BDC : Kreis $HMEN$; nun haben wir aber bewiesen, dass der Mond $AEBH$ = Dreieck ABD ist, also ist der Kreis $HMEN$ = Dreieck BDC. Da nun jedes Dreieck gleich einem Quadrate ist, wie im zweiten Buche der Elemente bewiesen wird, so können wir also ein Quadrat zeichnen, das gleich dem Dreieck BDC ist, es sei dies das Quadrat $SOFQ$ (Fig. 3), also ist nun auch der Kreis $HMEN$ = dem Quadrat $SOFQ$. Es ist ferner das Verhältnis der beiden Durchmesser $AG : EH$ ein gegebenes, weil jeder der beiden Durchmesser (der Grösse nach) gegeben ist, und es sei dieses Verhältnis = $XQ : FQ$, also hat man auch

$$AG^2 : EH^2 = XQ^2 : FQ^2;$$

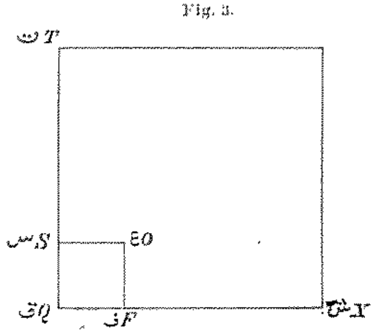
konstruieren wir also über XQ ein Quadrat, es sei dies TX, so hat man:

$$AG^2 : EH^2 = \text{Quadrat } TX : \text{Quadrat } OQ.$$

Aber es ist $AG^2 : EH^2$ = Kreis ABG : Kreis $HMEN$, mithin Quadrat TX : Quadrat OQ = Kreis ABG : Kreis $HMEN$. Da nun Quadrat OQ = Kreis $HMEN$ ist, so ist auch Quadrat TX = Kreis ABG. Aus diesem Beweise geht also klar hervor, dass jeder Kreis gleich einem Quadrate ist.

Was nun den Weg betrifft, auf welchem dieses Quadrat gefunden wird, so werden wir darüber eine besondere Abhandlung veröffentlichen,*, da der Zweck dieser Arbeit nur war zu zeigen, dass die Sache möglich sei, damit dadurch einmal die Verkehrtheit der Meinung derjenigen klar gelegt werde, welche glauben, dass es nicht wahr sei, dass ein Kreis einem Quadrate gleich sein könne. Wir haben im vorhergehenden Beweise klar gezeigt, dass jeder Kreis gleich einem Quadrate ist, also ist die Verkehrtheit der Meinung jener Leute offenbar. Es steht also fest, dass jeder Kreis gleich einem Quadrate ist, denn die vom Verstande erfassten Wahrheiten brauchen nicht bis zur thatsächlichen Ausführung gebracht zu werden, sondern der Beweis braucht bloss bis zur Feststellung der Möglichkeit der behaupteten Sache zu gehen, so steht auch die Thatsache schon fest, ob sie dann der Mensch zur wirklichen Ausführung bringe oder nicht. Doch genug über die Feststellung dieser Thatsache, wir haben nicht mehr bezweckt mit unserer Abhandlung. Ende.**

Fig. 3.



* Befindet sich im Verzeichnis seiner Werke nicht und ist jedenfalls nie erschienen.

** Das Manuskript C hat hier nach den üblichen religiösen Schlussworten (Lob sei Gott, etc.) noch: „Beendigt (d. h. die Abschrift) am Montag den 14. Ǧumâdâ II. 1031 d. H.“ (Ende April 1622).

(In den beiden Berliner Manuskripten folgt nachstehender Zusatz, wahrscheinlich vom Abschreiber hinzugefügt):

Ich sage zu dieser Abhandlung: Wenn zum Beweise des Geforderten der Beweis seiner Möglichkeit nach der Weise, wie er ihn geführt hat, genügen würde, so gäbe es eine Stelle dafür (oder von ihm, d. h. von Ibn el-Haiṯam), die frei ist von jener Weitschweifigkeit und keiner Erläuterungen von solcher Ausdehnung bedarf;* es ist dies die folgende: Es sei AB (Fig. 4) eine gegebene Strecke, wir konstruieren über ihr das Quadrat BG, das also ebenfalls gegeben ist und in dieses den Kreis DE, sein Durchmesser DE ist gleich AB, somit auch gegeben; weil nun der Kreis ein gegebener Teil einer gegebenen Grösse, d. h. des Quadrates, ist, so hat er zu diesem ein bestimmtes Verhältnis, es sei dieses das Verhältnis $BZ : AB$. Wir verlängern AB bis H, so dass BH das geometrische Mittel zwischen BZ und AB sei, also die Proportion bestehe

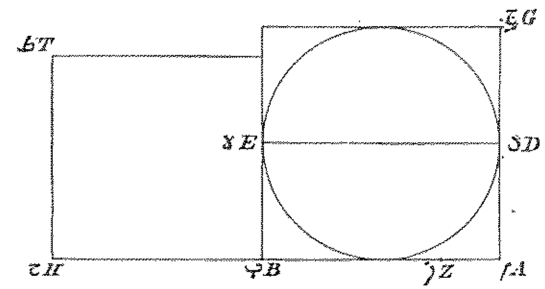
$$AB : BH = BH : BZ,$$

und konstruieren über BH das Quadrat BT, so ist das Verhältnis $AB : BZ$, oder das Verhältnis

$$\text{Quadrat } BG : \text{Kreis } DE = \text{Quadrat } BG : \text{Quadrat } BT;$$

hieraus folgt, dass Kreis DE = Quadrat BT ist.** Wir haben also gefunden, was wir suchen wollten; dazu hätten also weder die alten (Geometer) noch die neuern jene weitläufige Auseinandersetzung nötig gehabt.

Fig. 4.



* Der Text ist hier jedenfalls inkorrekt, daher die Übersetzung unsicher.

** Dieser Beweis ist etwas kurz, es fehlt ein vermittelndes Verhältnis, nämlich $AB^2 : AB \cdot BZ$, es sollte also heissen:

$$AB : BZ = AB^2 : AB \cdot BZ = \text{Quadrat } BG : \text{Quadrat } BT;$$

aber $AB : BZ$ = Quadrat BG : Kreis DE nach Voraussetzung, also etc. — Man vergleiche mit dieser Darstellung der Kreisquadratur diejenige des Jordanus Nemorarius im vierten Buche seiner Geometria (herausgegeben von M. Curtze in den Mitteilungen des Coppernicus-Vereins für Wissenschaft und Kunst, VI. Heft, S. 36, Thorn 1887).

Arabischer Text.

بسم الله الرحمن الرحيم [هو رب يسر][1]

رسالة لابن الهيثم فى تربيع الدايرة نقول[3] قد اعتقد[4] كثير من المتفلسفين ان سطح الدايرة لا يمكن [ان يكون][5] مساويا لسطح مربع مستقيم الخطوط ورد[6] هذا المعنى فى كثير من محاوراتهم ومناظراتهم ولم نجد[7] لاحد من المتقدمين ولا المتاخرين شكلا مستقيم الخطوط مساويا لسطح دايرة على غاية التحقيق والذى ذكره ارشميدس فى مساحة الدايرة فانما استعمل فيه بعض المسح(?)[8] وهذا المعنى هو احد ما قوى راى[9] المتفلسفين فى اعتقادهم ولما كان ذلك كذلك انعمنا النظر الفكرى فى هذا المعنى فلاح[10] لنا انه ممكن وغير متعذر وله نظاير وهو انه قد يوجد هلال[11] يحيط به قوسان من دايرتين وهو مع ذلك مساو لمثلث وقد يوجد هلال ودايرة مساويان بمجموعهما[12] لمثلث[13] وقد ذكرنا من هذا النوع اشكالا كثيرة مختلفة [فى كتابنا][14] فى الهلاليات ولما وجدنا [الامر][15] على هذه الصفة فى الاشكال الهلالية[16] قوى فى نفوسنا [انه من][17] الممكن ان يكون سطح الدايرة مساويا لسطح مربع مستقيم الخطوط فاستقصينا الفكر فى ذلك الى ان يتبين[18] لنا بالبرهان ان هذا المعنى ممكن ولا شبهة فى امكانه فالفنا فيه هذا القول فنقول ان كل دايرة نخرج فيه قطرا[19] من اقطارها ثم نعلم[20] على احد نصفيها نقطة كيفما[21] اتفق[22] ونوصل بينها وبين طرفى القطر بخطين مستقيمين ثم نعمل على هذين الخطين المستقيمين نصفى دايرتين فان الهلالين الذين يحدثان من محيطى النصفين مع محيط

1) Fehlt in C. 2) Der Anfang lautet in C: قول للشيخ ابى على الحسين بن الحسين بن الهيثم فى تربيع الدايرة. 3) Fehlt in C. 4) In A u. B يعتقد. 5) Fehlt in C. 6) C يتردد. 7) A u. B يوجد. 8) C المسمح. 9) A u. B اراد. 10) A u. B فيلوح. 11) A هلالى. 12) A u. B مجموعها. 13) A المثلث. 14) Fehlt in A u. B. 15) Lücke in C. 16) A الهلالى. 17) Lücke in C. 18) A u. B بين. 19) A u. B قط. 20) A نعيم(?). 21) A u. B كيف ما. 22) C اتفقت.

الدايرة الاولى [مساويان بمجموعهما[23] للمثلث الحادث فى الدايرة الاولى][24] وقد بينا هذا المعنى فى كتابنا فى الهلاليات نحن نعيد البرهان عليه فى هذا الموضع فليكن دايرة عليها[25] ا ب ج وليكن مركزها د ونجيز[26] على د خط ا د ج فيكون ا ج قطر الدايرة ونعلم[27] على محيط الدايرة نقطة ب ونصل خطى ا ب ب ج ونعمل على خطى ا ب ب ج نصفى دايرتين هما ا ه ب ب ز ج فاقول ان هلالى ا ه ب ح ب ز ج ط مساويان بمجموعهما[28] لمثلث ا ب ج برهان ذلك ان كل دايرتين فان[29] نسبة احداهما[30] الى الاخرى كنسبة مربع قطر احداهما[30] الى مربع قطر الاخرى كما تبين فى [شكل ب من][31] مقالة[32] يب من الاصول[33] فنسبة دايرة ب ز ج الى دايرة ب ه ا كنسبة مربع ج ب الى مربع ب ا وبالتركيب يكون نسبة مربعى ج ب ا ب الى مربع ا ب كنسبة دايرتى ب ز ج ب ه ا الى دايرة ب ه ا ومربعا ج ب ا ب هما مربع ا ج [فنسبة مربع ا ج الى مربع ا ب كنسبة دايرتى ب ز ج ب ه ا الى دايرة ب ه ا ونسبة مربع ا ج الى مربع ا ب كنسبة دايرة ا ب ج الى دايرة ب ه ا][34] فنسبة دايرتى ب ز ج ب ه ا الى دايرة ب ه ا كنسبة دايرة ا ب ج الى دايرة ب ه ا فدايرة ا ب ج مساوية لدايرتى ب ز ج ب ه ا[35] فنصف دايرة ا ب ج مساو لنصفى دايرتى ا ه ب ب ز ج فاذا اسقطنا قطعتى ا ح ب ب ط ج المشتركتين[36] لدايرة ا ب ج ودايرتى ا ه ب ب ز ج بقى مثلث[37] ا ب ج مساويا لهلالى[38] ا ه ب ح ب ز ج ط وذلك ما اردنا بيانه[39] فان كان قوسا ا ح ب ب ط ج متساويين فان خطى ا ب ب ج يكونان متساويين ويكون[40] دايرتى ا ه ب ب ز ج متساويتين ويكون نصفاهما متساويين ويكون هلالا[41] ا ه ب ح ب ز ج ط متساويين [ونصل ب د فيكون مثلثا ا ب د ب د ج متساويين][42] وقد[43] تبين ان الهلالين متساويان[44] ومثلثا ا ب د ب ج د متساويان[45] فان كل واحد

23) A u. B مجموعها. 24) Fehlt in C. 25) A u. B عليه. 26) A نجر, C نحر. 27) C ومتعلم. 28) A u. B مجموعهما. 29) Fehlt in A. 30) A, B u. C احديهما. 31) Fehlt in C. 32) C المقالة. 33) C كتاب اقليدس. 34) A: او نسبة مربع فنسبة مربع ا ج الى مربع ا ب هى; C: ا ج الى مربع ا ب كنسبة دايرة ا ب ج الى دايرة ا كنسبة دايرة ا ب ج الى دايرة ب ه ا. 35) Fehlt in A: 36) A u. B المشتركتين, C المشتركين. 37) Fehlt in A. 38) A u. B هلالى. 39) ان نبين. 40) B يكونا. 41) A هلاليا. 42) Fehlt in B. 43) قد fehlt in C. 44) C fügt hier noch hinzu: بمجموعهما لمثلث ا ب ج فان كان الهلالان متساويين, 45) A u. B متساويين.

من الهلالين يكون مساويا لكل واحد[46] من المثلثين ويكون هلال[47] اهبج مساويا لمثلث ابد واذا تبين[48] ذلك فلنعد[49] الدايرة وهلال اهبج ومثلث ابد ونقسم خط اب بنصفين على نقطة ك فيكون نقطة ك مركز دايرة اهب ونصل دك وننفذه[50] على استقامته وليقطع قوسى احب اهب على نقطتى ح ه فيكون دكح قطر الدايرة ابج وقطر الدايرة اهب لانه مار بمركزهما ونقسم خط هح بنصفين على نقطة ل ونجعل ل مركزا وندير ببعد حل دايرة ليكن دايرة حمهن فيكون هذه الدايرة [مماسة لدايرة][51] ابج من خارج ومماسة لدايرة اهب من داخلها لانها يلقى كل واحدة من الدايرتين على طرف قطر مشترك لهما[52] وللدايرة المماسة لهما فدايرة حمهن جميعها[53] فى داخل هلال اهبج فهذه الدايرة اذن هى بعض هذا الهلال وكل مقدار فله الى كل مقدار هو بعضه نسبة ما وان[54] لم يعلم احد تلك النسبة ولم يقدر على الوصول الى علمها لان النسبة بين المقادير[55] ليس هى[56] من اجل علم الناس بها ولا من اجل قدرتهم على[57] استخراجها ومعرفتها وانما النسبة بين المقادير يعنى خاص للمقادير التى يكون[58] من جنس واحد فاذا [كان مقداران][59] من جنس واحد [وكان كل واحد][60] منهما[61] محصورا متناهيا ثابتا[62] باقيا[63] على مقداره لا يتغير[64] بوجه من[65] الوجوه لايتغير[66] زيادة ولا يتغير[66] نقصان ولا يتغير[66] جنس فان لاحدهما الى الاخر نسبة واحدة بعينها[67] لاينتقل ولا يتغير[68] عن صورتها بوجه من الوجوه وكل مقدار فبعضه هو من جنسه اذا[69] كان ذلك البعض محصورا متناهيا لا يتغير[70] لا فى جنسه ولا فى مقداره ولا فى شكله ولا فى هيئته[71] وكان المقدار الاعظم[72] ثابتا على حاله لا يتغير[73] لا فى شكله ولا فى مقداره ولا فى جنسه ولا فى هيئته[71] واذا كان المقدار

46) A u. B لواحد statt لكل واحد. 47) A u. B هلالى. 48) B u. C قد تبين (in C unpunktiert). 49) Undeutlich in A u. B. 50) So schlägt Herr C. A. Nallino vor, wie es oft bei al-Battânî vorkomme; A, B u. C. وبمعده oder بمعده. 51) Fehlt in A. 52) A u. B مشتركهما. 53) A u. B جميعا. 54) C اين. 55) C العادية. 56) C مال. 57) A الى. 58) So in A, B u. C. 59) A u. B كل مقدارين. 60) B وكل. 61) A u. B منها. 62) Fehlt in B. 63) Fehlt in C. 64) A u. B يغير. 65) Fehlt in A. 66) B u. C تغير. 67) C noch ثابتة. 68) B u. C لايتغير ولا ينتقل. 69) B و. 70) A u. B يغير 71) A u. B هيبانه. 72) C hat noch ايضا. 73) A تغير.

وبعضه على هذه الصفة فان لجملة المقدار الى بعضه نسبة واحدة بعينها لا يتغير ولا يختلف بوجه من الوجوه واذا كانت دايرة ابج معلومة القدر فان محيطها يكون معلوما وقطرها يكون معلوما ايضا ومركزها يكون معلوما فقطر اج يكون معلوما وقوس اب [التى هى][74] ربع محيطها [تكون معلومة][75] وخط اب يكون معلوما وخط بد يكون معلوما ومثلث ابد يكون معلوما واعنى بكل معلوم [ما ذكرته][76] فى صفة دايرة ابج انه ثابت على حاله لا يتغير لان المعلوم عند اصحاب التعاليم هو الذى لا يتغير ويكون نصف دايرة اهب معلوما لان خط اب الذى هو قطرها هو معلوم ويكون قوس اهب معلومة[77] لانها لا تتغير[78] وقوس احب معلومة فيكون هلال اهبح معلوما اعنى انه يكون ثابتا على صفة واحدة لا يتغير فى جنسه ولا فى مقداره ولا فى شكله واعنى بجنسه انه سطح مستو ويكون خط كه الذى هو نصف قطر الدايرة معلوما ويكون خط كح معلوما لان نقطتى ك ح معلومتان فيبقى[79] خط هح معلوما اعنى لا يتغير لا فى مقداره ولا فى جنسه ولا فى هيئته[80] وخط هح هو قطر دايرة حمهن فدايرة حمهن معلومة لا يتغير مقدارها ولا شكلها ولا هيئتها[81] ودايرة حمهن هى بعض هلال اهبح وكل واحد[82] من هلال اهبح ودايرة حمهن لا يتغير فى حال من الاحوال وهما من جنس واحد لان احدهما بعض الاخر فلهلال اهبح الى دايرة حمهن نسبة ثابتة على صفة[83] واحدة [لا تتغيرا][84] بوجه من الوجوه وكل نسبة لمقدار من المقادير الى بعضه فهى نسبة كل مقدار الى بعضه النظير لذلك البعض فنسبة هلال اهبح الى دايرة حمهن هى نسبة خط اد[85] الى بعضه علمنا مقدار ذلك البعض او كنا لا نعلم مقدار ذلك البعض ولا نقدر على استخراجه ولا نصل الى وجوده فليكن ذلك البعض دص [فيكون نسبة اد الى دص][86] هى نسبة هلال اهبح الى دايرة حمهن فاذن[87] نسبة اد الى دص نسبة ثابتة لا تتغير ابدا[88] واذا كانت نسبة اد الى دص نسبة ثابتة لا تتغير ابدا[89]

74) A u. B هو. 75) A, B u. C يكون معلوما. 76) C ذكربه. 77) A u. B معلوما. 78) A, B u. C يتغير. 79) A فبقى. 80) A u. B هيبانه. 81) A u. B هيبانها. 82) A u. B واحدة. 83) B هيباة. 84) Fehlt in B. 85) A لد. 86) Fehlt in A u. B, dann folgt وهى. 87) C ويكون. 88) C hat hier noch: لان نسبة الهلال الى الدايرة نسبة ثابتة لا يتغير. 89) Fehlt in C.

فان[90] خط دص واحد بعينه لا يتغير لان خط اد خط معلوم القدر لا يتغير مقداره ونصل بص [ليكن بصد مثلثا و][91] نسبة مثلث ابد الى مثلث بصد كنسبة خط اد الى خط دص ونسبة اد الى دص هى نسبة هلال اهبج الى دايرة جمهن فنسبة مثلث ابد الى مثلث بدص كنسبة هلال اهبج الى دايرة جمهن فاذا بدلنا[92] كانت نسبة مثلث ابد الى هلال اهبج كنسبة مثلث بدص الى دايرة جمهن وهلال اهبج قد تبين انه مساو لمثلث ابد فدايرة جمهن مساوية[93] لمثلث بدص وكل مثلث فهو مساو لمربع وقد تبين ذلك فى اخر[94] المقالة الثانية من الاصول[95] ولنعمل مربعا مساويا لمثلث بدص وليكن مربع سفقع فيكون دايرة جمهن مساوية لمربع سفقع ونسبة قطر اج الى قطر هح نسبة معلومة لان كل واحد من هذين القطرين معلوم المقدار وليكن نسبة اج الى هح كنسبة [شق الى فق][96] فيكون نسبة مربع اج الى مربع هح كنسبة مربع شق الى مربع فق ونعمل على خط شق مربعا وليكن مربع شت فيكون نسبة مربع اج الى مربع هح كنسبة مربع شت الى مربع قع فنسبة مربع اج الى مربع هح هى نسبة دايرة ابج الى دايرة جمهن فنسبة مربع شت الى مربع قع كنسبة دايرة ابج الى دايرة جمهن ومربع قع مساو لدايرة جمهن فمربع شت مساو لدايرة ابج وقد تبين من هذا البيان ان كل دايرة فهى مساوية لمربع مستقيم الخطوط واما كيف يوجد هذا المربع فانا نستأنف فيه مقالة مفردة اذ ليس غرضنا فى هذه المقالة سوى ان نبين ان هذا المعنى ممكن ليتبين[97] به فساد اعتقاد من اعتقد ان الدايرة لا يصح ان تساوى[98] مربعا مستقيم الخطوط وقد تبين بالبراهين التى ذكرناها فى هذا القول ان كل دايرة فهى مساوية لمربع مستقيم الخطوط فقد تبين من ذلك فساد اعتقاد هذه الطايفة ووضح[99] ان كل دايرة فهى مساوية لمربع مستقيم الخطوط والمعانى المعقولة ليس يحتاج حقايقها الى وجود الانسان [لها واخراجها الى الفعل][100] بل اذا قام البرهان على امكان[101] المعنى فقد صح

90) *B* وان. 91) *C* فيكون. 92) *A* ابدلنا. 93) *A* u. *B* مساو. 94) Fehlt in *A* u. *B*. 95) *C* كتاب اقليدس فى الاصول. 96) *A* شق ف. 97) *A* u. *B* لبس(?)؛ 98) *A* يساوى. 99) *A* u. *B* وصح. 100) *A* لها وآخرا الى الفعل; *B* ايها بالفعل. 101) *A* امكانا.

ذلك المعنى اخرجه الانسان الى الفعل ام[102] لم يخرجه وفيما ذكرناه من تحقيق[103] هذا المعنى كفاية وهو الذى قصدنا له فى هذا القول [تمت المقالة][104].

[اقول[105] على هذه المقالة لوكفى(?) فى اثبات هذا المطلوب اثبات امكانه بالوجه الذى ذكره لمكان(?) له عن جميع هذا التطويل غنى(?) بهذا القدر من[106] البيان وهو ان يقال ليكن اب خطا معلوما ونعمل عليه مربع بج فهو معلوم وفيه دايرة ده فهى معلومة يكون قطرها وهو ده المساوى لاب معلوما ولان الدايرة جزء معلوم من كل معلوم وهو المربع يكون لها اليه نسبة فليكن نسبة اب الى بز ونخرج بح وسطا فيما بينهما فى النسبة ليكن نسبة اب الى بح كنسبة بح الى بز ونعمل على بح[107] مربع بط فيكون نسبة اب الى بز اعنى نسبة مربع بج الى دايرة ده كنسبة مربع بج الى مربع بط فنسبة مربع بج الى دايرة ده والى مربع بط واحدة فدايرة ده مساوية لمربع بط فاذا وجدنا ما[108] طلبنا وليس هذا مما يوجب كل هذا التحرير للمتقدمين والمتأخرين فيه][109].

102) *A* u. *B* او. 103) *A* u. B تحقق. 104) Hierfür hat *C*: تم القول والحمد لله رب العالمين والصلوة على رسوله محمد وآله اجمعين ودفع الفراغ منه فى يوم الاثنين رابع عشر شهر جمادى الثانى سنه احدى وثلثين الف (sic) من الهجرة النبوية. 105) Fehlt in *A*. 106) So in *A* u. *B*, ich glaube, es sollte heissen عن. 107) *B* رح. 108) *A* اذ. 109) Die ganze eingeklammerte Schlussstelle fehlt in *C*.