Overgedrukt uit: „De Zee" No. 10, jaargang 1920.

Abhandlung des Hasan ben al-Husain ben al-Haitam über eine Methode, die Polhöhe mit grösster Genauigkeit zu bestimmen.

Aus dem Arabischen übersetzt und mit Erläuterungen versehen von Dr. phil. nat. et rer. techn. *Carl Schoy*, Privatdocent für Geschichte der Geographie und Astronomie an der Universität zu Bonn, in Essen a. d. R.

Seit Jahren mit Studien über die Geschichte der geographischen Ortsbestimmung beschäftigt, ist es mein Bestreben tunlichst aus primären Quellen Methoden des Ortsbestimmungsproblems ausfindig zu machen, die bis jetzt noch keine Beachtung gefunden haben. Und in dieser Hinsicht scheint die Durchforschung arabisch-astronomischer Handschriften ein dankbares Unternehmen zu sein. So bin ich bei Durchsicht einzelner Teile der grossen *Hâkemitischen Tafeln* des *Ibn Yûnus*, einem der bedeutendsten Werke arabischer Astronomie, von dem das *Legatum Warnerianum zu Leiden* die ersten 22 Kapitel als Mscr. No. 143 bewahrt, bereits auf mehrere Methoden zur Bestimmung der geographischen Breite geführt worden, nach welchen der Astronom *Ibn Yûnus* (+ 1009) für seinen Wohnort Kairo die auffallend genaue Ortsbreite $\varphi = 30^\circ\ 3'$ fand. [1]) Besonders interessiert dabei das Verfahren, die Breite aus der Sonnenhöhe im Ostwest-Vertikal zu finden, dessen Anwendung man bekanntlich einer sehr viel späteren Zeit zuschreibt. Doch davon werde ich ein anderes Mal berichten. Hier interessiert uns eine kurze Abhandlung des arabischen Astronomen, Mathematikers und Naturforschers *Ibn al-Haitam*, bekannt unter dem Namen *Alhazen* (* 965 in Basra + 1039 in Kairo). Über das Leben dieses trefflichen Ge-

[1]) Baedekers „Ägypten", Leipzig, 1913, gibt S. 39 für Kairo den Wert $\varphi = 30^\circ 4'$.

lehrten mag man bei H. Suter [1]) nachsehen und über seine zahlreichen Schriften besonders bei F. Woepcke. [2]) Wegen des vorstehenden Traktates habe ich mich an Herrn Dr. C. van Arendonk in Leiden gewandt, der sich in entgegenkommendster Weise die Mühe genommen hat, für meinen Gebrauch eine Abschrift der Leidener Handschrift zu machen (Catalogus cod. orient bibl. acad. Lugd. Batav. auctore R. Dozy, P. de Jong et M. J. de Goeje, Leiden, 1851—1877, III, 94 = Hdschr. Leiden, 14. XI, p. 246—254) Ich möchte dafür Herrn Dr. van Arendonk auch an dieser Stelle meinen herzlichsten Dank aussprechen.

Zum leichteren Verständnis der Übersetzung selbst seien hier erst einige Bemerkungen voraus geschickt: Ibn al-Haitam empfiehlt, sich zur genauen Ermittlung der Polhöhe eines hellen Fixsterns zu bedienen, der in seiner oberen Culmination gerade zum Zenit gelangt oder wenigstens nahe an dasselbe herankommt. Der erste Fall ist wohl ein idealer. In grosser Zenitnähe des Fixsterns sollen dann 2 sog. correspondierende Höhen desselben auf der Ost- und Westhälfte genommen werden, was mittels des Astrolabs geschieht. Ibn al-Haitam will damit der Refraktion aus dem Wege gehen, die in geringerer Erhebung des Gestirns über den Horizont einen merklichen Fehler in der Gestirnshöhe hervorbringt; denn er sagt ausdrücklich, dass die Lichtstrahlen an der Basis des Himmelsgewölbes gekrümmt seien. Die Zeit, die vergeht, bis der Fixstern von der östlichen Höhe über das Zenit oder die obere Culmination gegangen ist und eine ebenso grosse westliche Höhe erreicht hat, wird auf das Genaueste mit einer Wasseruhr gemessen. Aus der ausführlichen Anleitung, wie dieses Zeitmesswerk zu handhaben sei, erkennt man die grosse Vertrautheit unseres Gelehrten mit den Clepsydren. [3]) Sie hiessen bei den Arabern „binkâmât",

[1]) Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke, Leipzig, 1900, S. 91 ff.

[2]) L'algèbre d'omar Alkhayyâmi, Paris, 1851, pag. 73 ff.

[3]) Nach Woepcke (a. a. O. pag. 76) hat al-Haitam auch eine Abhandlung über Wasseruhren geschrieben.

(Singular: binkâm) was auch Sand- oder Räderuhren bedeuten kann. [1]) Wenn nun der betrachtete Fixstern bei seiner oberen Culmination nicht in das Zenit kommt, so wird seine obere Culminationshöhe $= \eta$ gemessen. Ferner seien in beiden Fällen die correspondierenden Höhen $= h$, und der östliche und westliche Stundenwinkel sei $= s$. Für den ersten Fall ist die Ortsbreite bekanntlich der Deklination δ des Sterns gleich. Dann also wird φ für einen Zenitalstern aus h und s, für einen beliebigen Stern aus h, s und η gewonnen. Wir sind gewohnt bei derartigen Aufgaben uns des Cosinus-Satzes der sphärischen Trigonometrie zu bedienen, den wir auf das sog. Astronomische Dreieck: Zenit — Pol — Stern anwenden. Es folgt dann für einen beliebigen Stern:

$$\sin h = \sin \delta . \sin \varphi + \cos \delta . \cos \varphi . \cos s \quad . \quad . \quad . \quad \text{I)}$$

Da aber ausserdem

$$\eta = 90^0 - \varphi + \delta$$

ist, so kann man in I) δ durch $(\eta + \varphi - 90^0)$ ersetzen und es bleibt nur die eine Unbekannte φ übrig. Ist dann noch in dem Spezialfalle, wo der Stern durch des Zenit geht, $\delta = \varphi$, schreibt sich I) einfacher:

$$\sin h = \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi . \cos s \quad . \quad . \quad . \quad . \quad \text{II)}$$

Allein die Araber kannten den Cosinus—Satz nicht in seiner fertigen Gestalt, [2]) sondern lösten die sich ihnen darbietenden Aufgaben der sphärischen Astronomie meist rein geometrisch (mit der sog. Projektionsmethode) auf, wie dies auch unser Autor in sehr origineller Weise im vorliegenden Falle tut. Die Lösung Ibn al-Haitams durch eine planimetrische Konstruktion gibt trefflichen Übungsstoff für den Unterricht in der mathematischen Geographie.

Übersetzung.

pag. 246 „Im Namen Gottes, des mitleidigen Erbarmers!

[1]) Vgl. zu den arab. Wasseruhren Eilhard Wiedemann, Beiträge zur Geschichte der Naturwissenschaften III, Erlangen, 1905 (Sitzungsbericht d. Physikal-Medicin. Societät, Bd. 17) S. 255 ff.

[2]) Er tritt erst bei *Regiomontan* auf (Vergl. A. von Braunmühl: Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie, I Teil, Leipzig, 1900, S. 130).

Abhandlung des Hasan ben al-Husain ben al-Haitam über die möglichst genaue Bestimmung der Polhöhe. Es gibt keine astronomischen Wahrheiten, die nicht durch die Beobachtungen erschlossen worden sind und wobei nicht die Kenntnis der Polhöhe des Beobachtungsortes erforderlich wäre. Aber die Auffindung der Bewegungen am Himmel ist nur mit den Instrumenten vollkommen möglich, nach genauer Bestimmung ihrer Lage zum Horizont, aber man kann die genau richtige Position des Instrumentes bezüglich des Horizontes nur erreichen mittels einer genauen Kenntnis der Polhöhe. Schon die Alten und auch die Späteren haben die Erhebung des Pols durch die Sonnenhöhe oder die Höhe der Fixsterne bestimmt, doch ist keine ihrer Bestimmungen mehr als ein merklich guter Näherungswert inbetreff der Genauigkeit der Polhöhe, und das kommt daher, dass die Stelle der Sonne in der Ekliptik bis zu unserer Zeit nicht ganz genau angegeben werden kann; weil die Dauer eines Jahres bisher nicht mit ganzer Schärfe festgesetzt worden ist. Auch die Örter der Fixsterne sind nicht allzu genau bestimmt, weil die Leute dieser Kunst von einander abweichen hinsichtlich der Grösse ihres Eifers. (der Art ihres Verfahrens) Und sie halten dafür, dass die Lichtstrahlen von der Sonne und den Sternen, sowie die Gesichtslinien geradlinig zwischen Sonne und Mittelpunkt des Instruments, Stern und Mittelpunkt des Instruments und zwischen Gesicht und Sternen verlaufen. Aber die Sache verhält sich nicht so, und schon Ptolemaeus hat sich in diesem Sinne in der fünften Abhandlnng seines Buches über die Optik ausgesprochen. Er sagt nämlich, dass es klar sei, dass die Gesichtslinie, falls sie sich bis zum Gestirn erstreckt, bei der Basis des Himmelsgewölbes gekrümmt sei [1]) und keinesfalls geradlinig verlaufe, und es folge dies mit Notwendigkeit und würde besonders deutlich beim Sonnenstrahl, was besagt, dass der Sonnenstrahl, wenn er von der Sonne bis zur Erde geht, an der Basis des Firmaments gebogen wird, und falls die Strahlen

[1]) Ich denke, dass das arabische maq'ad („Basis") hier mit „horizontnah" übersetzt werden kann.

gebogen sind, so endigen sie nicht geradlinig, und damit kommt die Höhe des Pols nicht sehr genau heraus.

Da wir aber ein weitgehendes Interesse an der Sache haben, so haben wir einen Weg für die Ermittlung der Polhöhe gefunden, der, falls er beschritten wird, ein ausserordentlichgenaues Resultat für die Höhe des Poles liefert, und wir treten in dieser Abhandlung auf ihn ein, und dies ist der Zeitpunkt wo wir damit beginnen, und wir sagen in ihr, dass der Weg dazu der ist, dass wir die Fixsterne in Betracht ziehen, und wenn sich unter ihnen ein sehr grosser gefunden hat, so sei es ein Stern, der sich nicht entzündet und sich nicht verändert. [1]) Und er geht durch das Zenit, wessentwegen er (scheitelrecht) über dem verlangten Horizont sein wird, und die Ermittlung der Polhöhe stützt sich auf diesen Stern. Und wenn sich kein Stern findet, der durch das Zenit geht, so hält man sich an einen von den grössten Fixsternen oder einen von nicht geringer Grösse, der nahe dem Zenit ist und näher dem Zenit als alle anderen sehr grossen Sterne, in der Zeit, wo er (in der oberen Culmination) den Meridian passiert, d. i. in der Zeit, da die Polhöhe genommen wird, weil nicht jeder Stern durch das Zenit geht oder demselben nahekommt, und es sich nicht jede Nacht ereignet, dass ein Stern den Meridian passiert. Und wenn die Bestimmung der Polhöhe mit einem der Fixsterne erfolgt, so stützen wir uns bei der Durchführung dieser Aufgabe auf einen fehlerlosen binkâm, und er soll eine von den Wasseruhren sein, die für 12, oder für nicht weniger als 6 Stunden konstruiert sind, und seine Stunden werden in Teile geteilt sein, und wenn man an einem binkâm für die (in Betracht kommende) Zeit keine Einteilung der Stunden in Teile (Grade) findet, so stützt man sich auf einen anders geteilten binkâm und fixiert und

pag. 247

[1]) Da ich nicht sicher bin, ob damit ein Planet gemeint ist, der sich also durch Beleuchtung mit Sonnenlicht erst „entzündet", so habe ich ganz wörtlich übersetzt: Die 8. Form von „schab," (angezündet werden, brennen) die der Autor gebraucht, findet sich im Wörterbuch nicht angeführt.

teilt seine Stunden in die Teile, und man erhält die Teile der Stunden, und es wird dies mittels der Höhe der Sonne oder der Fixsterne erreicht, und wenn einer dieser Teile sehr nahe bei dem Zeitpunkt liegt, der durch eine Position der Sonne gegeben ist, so gibt es keinen (besonderen) Teilstrich unter diesen Teilen, Und wenn die Stunden des binkâms in die Teile eingeteilt sind, so zählen wir im rechten Augenblick den binkâm und beobachten den Stern; es wird nach ihm visiert und seine Höhe gefunden. Sie sei auf der Osthälfte, nahe der Mitte des Himmels, und es wird angenommen, dass er bis zur Mitte des Himmels gelangt, und seine Höhe wird mit dem fehlerlosen Instrument gefunden und festgestellt am Zeiger des Instrumentes beim äussersten (letzten) seiner Teile, welches Teile der Höhe sind, und es mögen die Höhenteile genau richtig sein, und falls die Höhe des Sterns einwandfrei auf der Osthälfte bestimmt worden ist, wird sie wohl im Gedächtnis behalten, und sie bleibt in diesem Zustand, in dem sie constatiert wurde. Wir setzen den binkâm auf Wasser und überlassen ihn sich selbst Dann beobachten wir ihn und tun etwas Pech (Harz) in ein Gefäss von Erz (Kupfer), und dies wird auf das Feuer gesetzt. Und es wird in das Gefäss ein dünnes Säulchen (Stift) gestellt, und seine Spitze wird in dem Harz stecken. Darauf wird der Stern anvisiert, bis dass er die Mitte des Himmels passiert hat und sich zur Westseite wendet, und wenn der Stern sich gen Westen neigt, wird von Zeit zu Zeit seine Höhe genommen, bis dass sie der östlichen Höhe gleichkommt, die sich ergeben hatte. Und die Art und Weise, die westliche Höhe zu gewinnen ist die, dass die Höhe mit dem Astrolabium genommen wird, das du an deinem Daumen aufhängst, und innerhalb zweier Löcher ist die 'Idâde des Astrolabs, [1]) die durch einen Gefährten
pag. 248 (Gehilfen) hin-und herbewegt wird, und es wird durch die

[1]) Die 'Idâde (Alhidade) ist ein drehbares Lineal, das über einer Gradeinteilung seine zugespitzen Zeiger (Mûri) spielen lässt. Vgl. L. Am. Sédillot: »Memoire sur les instruments astronomiques des Arabes",

Löcher der Absehen nach dem Stern visiert, und lang ist der Blick. Und jedesmal, wenn sich der Stern aus der Öffnung hinaus bewegt hat, folgt eine Bewegung der 'Idâde, bis dass der Stern wieder sichtbar ist, und das wiederholt sich auf diese Weise beständig, und nie ist der Durchblick nach dem Stern unterbrochen, und es bedient einer den Zeiger der 'Idâde, einer blickt, durch das Visier nach dem Stern, ein anderer beobachtet den binkâm und einer endlich hat auf alles Acht, damit diese Methode restlos verwirklicht wird. Zu dem Zeitpunkt, in welchem das gemacht wird, ist der Stern im ersten Grad der Höhe, der Beobachter am Duschblick des Visiers, den Blick hinwendend. Dann blickt er wiederholt nach ihm, und nicht ergibt es sich für ihn aufs Erste, dass der Stern sich im ersten Grad der Höhe zeigt; es sagt nun der Beobachter, der zum Stern blickt, (dass es eingetreten sei) und dann ist es auch an der Zeit, dass der Beobachter des binkâm den Abschluss des Wassers vom binkâm genau weiss, da der Beobachter des Sterns sich vernehmen lässt, d.h., wenn der Beobachter des Sterns sich vernehmen lässt, weiss derjenige, der den binkâm bedient, genau, wie es um diesen steht, d.h. er weiss, bis zu welcher Stelle am binkâm das Wasser gelangt ist, und er macht mit der Spitze des Stiftes, der ins Harz getaucht ward, ein Zeichen. Wenn das Harz sich erhärtet hat, bleibt es in diesem Zustand und hält an der Stelle fest. Und wenn dies gemacht ist, hebt man den binkâm auf und giesst das Wasser aus, das ihn erfüllte, und beobachtet aufmerksam die Stunde, bis zu der das Wasser gelangte; die äusserste Linie ist das massgebende Niveau am Instsument, und wenn es sich um einen Bruchteil handelt, so schätze man ihn äusserst genau ab, was mit grosser Präcision möglich ist. Und falls diese Stunden resultierten, so sieht man zu; und wenn der Stern durch das Zenit gegangen ist, setzt man die Stunden fest, die als Teile aus

Paris, 1841; (besonders Fig. 47) und E. Wiedemann: Beiträge etc., XVII und XVIII, 1909 S. 35—43.

dem binkâm hervorgehen, ich meine so, dass auf jede Stunde desselben 15 Teile (Grade) kommen; und Bruchteile mache zu Minuten und zähle sie zu den ganzen Teilen. Darauf nimmt man die Hälfte dieser Teile und geht mit ihnen in die Sinustafel ein, und es ergibt sich auch der Sinus versus; (der Hälfte der Teile) er ist das, was man umgekehrten Sinus nennt. Dann wird der Sinus versus von 120 abgezogen, und was übrig bleibt, wird wohl gemerkt. Hierauf wird der Sinus versus der kleinen Ergänzung der Höhe genommen und mit dem was im Gedächtnis behalten wurde, multipliziert; das Produkt wird durch den Sinus versus des Bogens der Stunden geteilt, und das Ergebnis zum Sinus versus der kleinen Ergänzung der Höhe hinzugezählt, die Summe von 120 abgezogen, und was bleibt, mit dem, was abgezogen ward, multipliziert. Aus diesem Resultat wird die Quadratwurzel gezogen, und mit dem, was sich durch die Radizierung ergab, in die Sinustafel eingegangen, dazu der Bogen gesucht, von dem Bogen, der sich fand, die Hälfte genommen, und sie ist die Polhöhe im Übermass
pag. 249 der Genauigkeit."

Es möge an dieser Stelle der Text des Autors durch eine kurze Esläuterung unterbrochen werden. Es ist in dem Falle, dass der Stern ins Zenit kommt, nach unserer eingangs aufgeschriebenen Formel II)

$$\sin h = \sin^2\varphi + \cos^2\varphi \cos s.$$

Hieraus zieht man

$$\begin{aligned} \sin h &= \sin^2\varphi + (1 - \sin^2\varphi)\cos s \\ &= \cos s + \sin^2\varphi\,(1 - \cos s) \end{aligned}$$

d. i. $$\sin^2\varphi = \frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 1)$$

ferner ist

$$\sin h = 1 - \cos^2\varphi + \cos^2\varphi \cos s = 1 + \cos^2\varphi\,(\cos s - 1),$$

oder $$\cos^2\varphi = \frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 2)$$

Multipliziert man 1) mit 2) und das Produkt dann noch mit 4, so hat man

$$4.\sin^2\varphi\cos^2\varphi = \sin^2 2\varphi = 4.\frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s}.\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad 3)$$

Auf dieselbe Formel 3) muss die Vorschrift Ibn al-Haitams führen, falls sie richtig ist. Nach ihm ist zuerst sin vers s zu bilden; d.h. $1 - \cos s$. Beachtet man, dass der Kreisdurchmesser in der ältesten Trigonometrie in 120 Teile (partes) geteilt war, so ist $120^p = 2\,r = 2$, falls man den Radius des Kreises $= 1$ setzt. Es ist nach Vorschrift $1 - \cos s$ von $120^p = 2$ abzuziehen, was $1 + \cos s$ gibt. Dieser Ausdruck ist mit sin vers $(90^0 - h) = 1 - \cos\,(90^0 - h) = 1 - \sin h$ zu multiplizieren und durch sin vers $s = 1 - \cos s$ zu dividieren, was

$$= \frac{(1 + \cos s)\,(1 - \sin h)}{1 - \cos s}$$

gibt. Dazu ist sin vers $(90^0 - h) = 1 - \sin h$ zu addieren, womit man

$$2.\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 4)$$

erhält, wenn man beide Summanden auf den Nenner $1 - \cos s$ bringt. Den Ausdruck 4) von $120^p = 2\,r = 2$ abgezogen, bleibt

$$2.\frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad 5)$$

Multipliziert man jetzt die beiden Termini 4) und 5) miteinander, so folgt

$$4\ .\ \frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s}\ .\ \frac{1 - \sin h}{1 - \cos s},$$

und dies ist nach 3) $= \sin.^2 2\,\varphi$, q. e. d.

„Und wir weisen die Richtigkeit dieser Darlegungen durch den (geometrischen) Beweis nach, nachdem wir noch den Fall betrachten, dass der Stern nicht durch das Zenit geht, und wenn er nicht durch das Zenit geht, stellen wir seine Höhe in der Weise fest, wie wir es eben sahen, und es ergeben sich mittels des binkâms die Stunden, und wenn die Stunden bekannt sind, wird für die Berechnung ihre Hälfte genommen und des Ende der Hälfte genau mit Harz markiert, und falls es in der zweiten Nacht ist, beobachtet man diesen Stern und nimmt seine augenblickliche Höhe, und so die Höhe von Zeit zu Zeit, bis dass seine Höhe derjenigen der ersten Nacht gleich ist, und während der Zeit, bis diese Höhengleichheit eintritt, setzt man den binkâm in Wasser und überlässt ihm die weitere Function. Und es wird die Höhe des Sterns von Zeit zu Zeit mit dem Astrolabium genommen. Ein Gefährte ist am binkâm, und keinen Augenblick ist der Blick nach dem Wasser unterbrochen, und wenn das Wasser bis zu der Marke reicht, die die Hälfte der Stunden des binkâms bezeichnet, so gibt dies der Wärter des binkâms bekannt, und der Beobachter, der zum Stern blickt, lässt diesen nicht aus den Augen, und der Beobachter des Zeigers blickt unverwandt zur 'Idâde, und wenn der Wärter des binkâms zu rufen beginnt, kennt der Beobachter des Zeigers genau die Lage seiner Spitze, welche die obere Culminationshöhe des Sterns angibt, und wenn nun diese Höhe bestimmt ist, so ist sie die erste Höhe, ich meine jene, welche in der ersten Nacht erhalten wurde. Es werden die Stunden des binkâms zu Teilen (Graden) gemacht, ich meine die Hälfte der Stunden. Nun geht man mit den Teilen der Häfte in die Sinustafel ein, nimmt den Sinus und erhält damit auch den Sinus versus, den man von 120^p abzieht Was übrig bleibt, multipliziert man mit dem, was man abzog, aus dem Ergebnis zieht man die Quadratwurzel, und mit dem, was man durch die Radizierung erhielt, geht man in die Sinustafel ein und sucht den zugehörigen Bogen. Zu diesem Bogen zählt man die Ergänzung der zweiten Höhe, d. i. der oberen Culminationshöhe, hinzu; vom Ergebnis nimmt man die Hälfte, und sie ist die Polhöhe im Übermass der Genauigkeit.

Zur Vollendung des Ganzen und zum Beweis der Richtigkeit, folgt jetzt der geometrische Beweis. [1]) Dazu sei ABCO

pag. 250 [1]) Die 2 Figuren der Handschrift sind wenig correct; die Buchstaben derselben stimmen teilweise nicht mit dem Text überein, oder es fehlen in den Figuren überhaupt Buchstaben, von denen im Text die Rede ist. Ich habe die nötigen Besserungen gleich in der Übersetzung durchgeführt und Buchstaben des arab. Alphabets, die im Deutschen fehlen, durch andere ersetzt.

der Meridian und C das Zenit, und es sei der Azimutkreis, in welchem die östliche Höhe [1]) genommen wird, CKT; der Ort des Sterns ist Punkt R, und es möge der Stern,

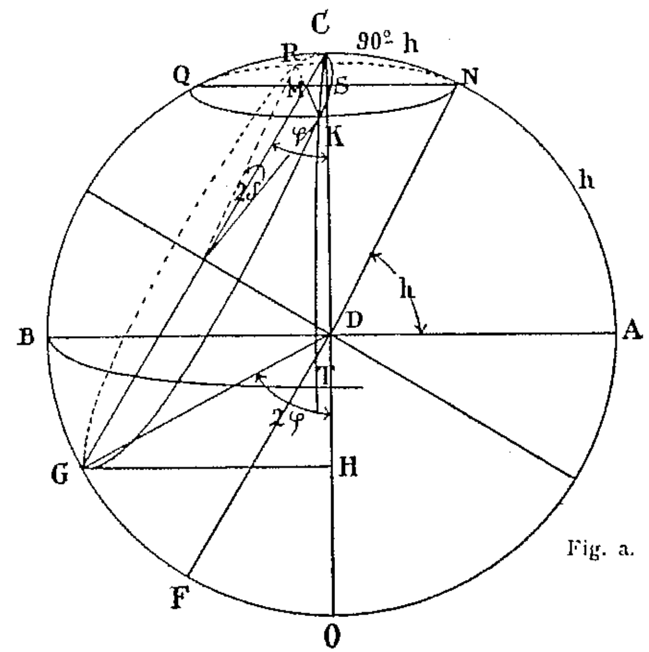

Fig. a.

wie wir an erster Stelle sagten, durch das Zenit gehen; es sei der Zeitkreis, (Parallelkreis) auf dem sich der Stern bewegt, Kreis CRGK, und der Parallelkreis zum Horizont, in welchem der Stern im Augenblick der Beobachtung steht, sei Kreis RNKQ und es sei der gemeinschaftliche Schnitt dieses Kreises mit dem Meridian die Linie NQ, und es sei der gemeinschaftliche Schnitt zwischen diesem Kreis und dem Zeitkreis, auf dem sich der Stern bewegt, die Linie RK, und Punkt K ist der Ort des Sterns zur Zeit seiner westlichen Höhe, weil die Höhe des Punktes R der Höhe des Punktes K gleich ist. Und es schneiden sich die zwei Linien NQ und RK, weil sie in ein und derselben

[1]) An unserer Figur die westliche. Beim Autor heisst es entsprechend: CRT.

Fläche, nämlich dem Kreis RNKQ liegen; und weil ferner Linie NQ in der Ebene des Meridians liegt, so ist sie gemeinschaftlicher Teil zwischen Kreis RNKQ und Kreis ABCO; aber die Punkte R und K, welche die Enden der Linie RK sind, liegen abseits (weg) vom Meridian, und es sei M der Durchschnittspunkt. Und weil der Zeitkreis $\perp$ zum Meridian, und der Parallel zum Horizont auch $\perp$ zum Meridian steht, so ist Linie RM. — und sie ist als gemeinsamen Durchschnitt dieser beiden Kreise $\perp$ zum Meridian — auch $\perp$ zur Linie NQ, weil NQ — und sie ist der gemeinsame Teil zwischen Kreis RNKQ und Meridian — der Durchmesser des Kreises RNK ist. Sie wird in Punkt M in 2 Teile (Hälften) geteilt. Und es sei der gemeinschaftliche Durchschnitt zwischen Zeitkreis und Meridian die Linie CG; sie ist der Durchmesser des Zeitkreises, weil der Meridian den letzteren in 2 Hälften teilt, und weil der Zeitkreis $\perp$ zum Meridian ist, und auch Linie RM$\perp$ zum Meridian steht, wird Linie RM$\perp$ zum gemeinschaftlichen Durchschnitt, d.h. Linie RM$\perp$ zu Linie CG sein, die der Durchmesser des Zeitkreises ist, und die Linie
pag. 251 RM ist der Sinus des Bogens RC, und Linie MC der Pfeil des Bogens RCK, letzterer in Zeitteilen, die sich aus dem binkâm ergeben, weil die Zeit, während der er in Tätigkeit ist, von der ersten Höhe des Sterns bis zur Zeit seiner zweiten Höhe geht, und es wird Bogen RC $= \frac{1}{2}$ Bogen RCK sein. Bogen RC ist aber bekannt, daher auch sein Sinus und sein Sinus versus. Der Mittelpunkt der Welt ist D. Man zieht durch ihn die Linien ADB und DC; letztere wird $\perp$AB sein und NQ in S schneiden; auch verbinden wir D mit O und ziehen GH // AB; dann wird GH auch $\perp$CO sein. Ferner ziehen wir durch D die Linie DF // CG, und es ist DF der Halbmesser des Äquators, und weil Kreis NKQR // dem Hoirzont ist, ist Linie NQ // AB, somit auch // GH, und nun ist

$$\frac{CS}{SH} = \frac{CM}{MG}\ ^{1)}.$$

[1]) Ich schreibe die Proportionen in moderner Ausdrucksweise; auch das Wort senkrecht oder parallel. Die Araber hatten ebenso wenig wie die Alten, eine abkürzende Formelsprache.

Es ist aber klar, das CM bekannt ist, und zwar bekannt mit seinem Grössenbetrag, da CG $= 120^p$ ist. Und wenn man CM von 120^p abzieht, ist auch MG bekannt, und es ist also:

$$\frac{CM}{MG} \text{ bekannt und } = \frac{CS}{SH}, \text{ d.h.}$$

es ist auch $\frac{CS}{SH}$ bekannt. Und es ist weiterhin CS bekannt, weil es der Sinus versus des Bogens QC ist, d. i. der kleinen Ergänzung der Höhe, und es ist damit auch SH bekannt, denn wenn man CS mit der Zahl der Teile MG multipliziert und das Produkt durch die Zahl der Teile MC dividiert, folgt als Ergebnis SH, und durch Addition von CS und SH folgt CH, und wenn man dies von 120^p subtrahiert, erhält man HO. Multipliziert man endlich HO mit CH und zieht aus dem Produkt die Wurzel, so ist das Resultat der Radizierung die Linie GH; d. i. der Sinus des Bogens GO, und falls man mit den Teilen der Linie GH in die Sinustafel eingeht, und den Bogen bestimmt, so ist es Bogen GO, und dieser
pag. 252 Bogen wird auch durch den Peripheriewinkel GCH gespannt, welcher gleich ist dem Winkel GDF. Letzterer ist ein Zentriwinkel, und Winkel GCH ist als Peripheriewinkel über dem Bogen GO die Hälfe von dem Zentriwinkel über GO. Da nun aber FD // GC und gleich dem Halbmesser des Äquators ist, so ist Bogen $GO = 2\varphi$ und $OF = \frac{1}{2}\,OG = \frac{1}{2}\,2\varphi = \varphi =$ der Höhe des Pols, und des ist es, was wir an dieser Figur beweisen wollten."

Wir würden auf viel kürzerem Wege als der Autor zum Ziele kommen. Mit Kenntnis von CH und HO ergibt sich bekanntlich sofort

$$GH^2 = CH \,.\, HO.$$

Nun ist aber (nach Figur)

$$\frac{1 - \cos s}{1 - \sin h} = \frac{2}{CH}, \qquad \text{mithin}$$

$$CH = 2\,\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s}, \quad \text{und danach}$$

$$HO = 2 - 2\,\frac{1 - \sin h}{1 - \cos s} \qquad 2\,\frac{\sin h - \cos s}{1 - \cos s}.$$

Daraus folgt $GH^2 = 4 \cdot \frac{(1 - \sin h)\,(\sin h - \cos s)}{(1 - \cos s)^2}$,
d. h. die Richtigkeit des Haitam'schen Beweises.

Der Autor fährt fort- „Und wenn der Stern nicht durch das Zenit geht, so sehen wir in der Figur auf das, was sie von der ersten unterscheidet: das ist der Zeitkreis, und wir lassen ihn den Meridian unterhalb des Zenits im Punkte U schneiden und stellen fest, wie wir es vorher taten, dass Linie RM ⊥ Linie NQ sei und ⊥ Linie MQ, und es ist ferner klar, dass Linie MU der Sinus versus des Bogens RU ist, und

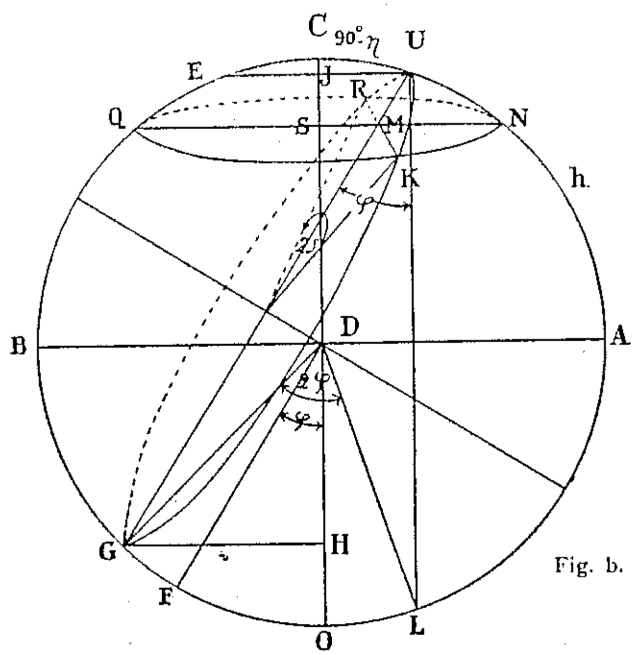

Fig. b.

klar, dass MU bekannt ist und ebenso MG, also auch ihr Verhältnis zu einander, und wir ziehen durch Punkt U die Linie UIE // der Linie NQ, und es ist Linie CI der Pfeil des Bogens UCE, der das Doppelte des Bogens UC ist, der die Ergänzung der oberen Culminationshöhe (η) darstellt, und es wird Linie CI bekannt sein, ebenso Strecke CS, weil sie der Pfeil des Bogens NCQ ist; dessen Hälfte die Ergänzung

der östlichen und westlichen Höhe ist, und wenn man den Sinus versus der Ergänzung der Culminationshöhe vom Sinus versus der Ergänzung der östlichen Höhe abzieht, so ist das, was übrig bleibt, bekannt und = Strecke IS, und es ist

$$\frac{IS}{SH} = \frac{MU}{MG} = \text{bekannt},$$

und es ist hiemit SH bekannt $\left(= \frac{IS \cdot MG}{MU}\right)$, und wenn man SH zu CS addiert, ist die Summe = CH = bekannt, und wenn man CH von 120^p subtrahiert, so ist der Rest bekannt und = HO. Dies multipliziert man mit CH, so ist das
pag. 253 Product (CH . HO) gleich dem Quadrat über GH (= GH^2), und dies (GH) ist der Sinus des Bogens OG; wir ziehen durch U zu CO die Parallele UL, und es ist Bogen UC = Bogen LO, was gleich ist der Ergänzung der oberen Culminationshöhe, und wenn wir Bogen LO zu Bogen GO addieren, erhalten wir Bogen GL. Da CO // UL und DF // UG, so ist Winkel ODF = Winkel LUG, also Bogen OF = $\frac{1}{2}$ Bogen GL, und dies ist die Höhe des Pols, weil FD der Halbmesser des Äquators ist, und es ist klar durch diesen Beweis, dass dies zweite Verfahren, dem wir seinen Kommentar vorausschickten, zu einer grossen Genauigkeit der Polhöhe führt, und dies ist es, was wir mit dieser Figur beweisen wollten. Und dies Verfahren, welches wir kommentierten, führt zu einem Resultat bezüglich der Polhöhe, das im Übermass genau ist. Und Bedingung ist, dass die Höhen, deren wir Erwähnung taten, nahe dem Zenit sind, und dass die Sehstrahlen, die vom Gesicht bis zum Stern reichen, nicht merklich gekrümmt sind. Wenn der Stern im Zenit steht, sind die Linien sehr gerade, wenn er in der Nähe des Zenits in der östlichen und westlichen Höhe und in der Culminationshöhe steht, gibt es für die Linien keine merkliche Krümmung bei dieser Stelle des Sterns. Und da der Stundenwinkel, der mit dem binkâm herausgebracht wird, nicht für die Kenntnis des Gestirnsortes verwendet wird, so sind die Stunden, welche durch den binkâm gemessen werden, sehr genau, aber die Stunden, welche aus der Höhe und dem Ort des Sterns herausgebracht

werden, dienen zur Berechnung und zum Ort des Sterns. und wenn der Ort des Sterns fälschlich anders angenommen wird, ist die Zeit, welche mittels der Rechnung aus der Höhe des Sterns abgeleitet wird, nicht genau und gründlich sicher. Und dies, was wir eben dartaten, ist die Methode zur Erlangung einer sehr genauen Kenntnis der Polhöhe. Und was wir in dieser Abhandlung darzutun beabsichtigten, ist erschöpft, und Lob sei Allah, dem Herrn der Welten, und Erbarmen über (unseren Herrn) Mohammed, und ein Gott aller!"