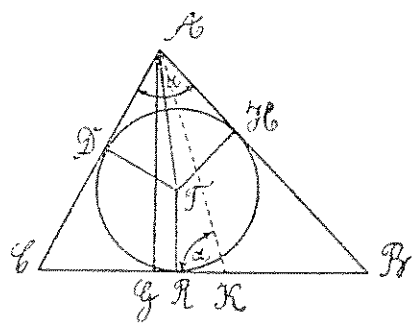
Behandlung einiger geometrischen Fragepunkte durch muslimische Mathematiker

1) Das arabische Ms. Seld. Arch. A 32 der Bodleian Library (Oxford) enthält auf den Folia 130-134 eine Studie des bekannten arabischen Gelehrten Ibn al-Haitham (965-1039), des Alhazen des Abendlandes. Sie hat die Aufgabe zum Gegenstand : *die zwei Seiten eines Dreiecks einzeln zu finden, wenn deren Summe gegeben ist und dazu die dritte Seite und der Flächeninhalt des Dreiecks.* Der arabische Autor gibt mehrere Lösungen des Theorems, welches also zu seiner Zeit eine Rolle gespielt haben muss. Leider konnte ich das erstmalige oder ein früheres Auftreten der Aufgabe in der Geschichte der Mathematik nicht feststellen. In der modernen Literatur wird sie von K. Schwering behandelt. (1)

a) Der Autor sagt : Von dem Dreieck ABC ist der Inhalt (al-qadr), die Seite BC und die Summe der beiden Seiten BA + AC bekannt; gesucht ist jede einzelne der beiden letzteren Seiten. Wir konstruieren den Inkreis DHR des Dreiecks mit dem Mittelpunkt T und ziehen die



Figur 1

Radien TH, TD und TR nach den Berührungspunkten. Sie stehen senkrecht auf den Seiten des Dreiecks und sind sich gleich. Es ist nun das Produkt

TH. ½ Umfang des Dreiecks bekannt,

(1) 100 Aufgaben der niederen Geometrie, Freiburg i. Br., 1891 S. 78 ff. Hier wird als Ort der Spitzen der Dreiecke eine Ellipse gefunden.

da dies Produkt gleich der Dreiecksfläche (= Δ), und diese bekannt ist. Ebenso ist der halbe Umfang (= ½ u) bekannt, da der ganze gegeben ist. Somit ist der Kreisradius TH bekannt. Diese Lote (TH, TD, TR) machen, da zu ihrer Konstruktion die Winkel des Dreiecks halbiert worden sind, auf zwei zusammenstossenden Seiten jeweils gleiche Abschnitte, so dass z. B auch BC + AH = ½ u ist. Somit ist BC + AH bekannt, und da BC gegeben ist, ist auch AH bekannt. Und so ist auch das Verhältnis

AH : HT bekannt.

Ziehen wir die Strecke AT, so ist das Dreieck AHT der Gestalt (Form) nach gegeben (d. h. seine Winkel sind bekannt). Es ist nämlich $\sphericalangle$ AHT ein Rechter, und $\sphericalangle$ HAT = $\sphericalangle$ DAT, mithin $\sphericalangle$ BAC bekannt (= $\sphericalangle$ α). Wir fällen von A das Lot AG, welches bekannt ist, da ½ BC. AG = Δ, wo Δ bekannt. Hierauf ziehen wir die Strecke AK so, dass $\sphericalangle$ AKC = $\sphericalangle$ BAC wird. Es ist Δ AKG der Form nach bekannt, d. h. es ist GA : AK bekannt. Somit ist auch AK bekannt. Aus

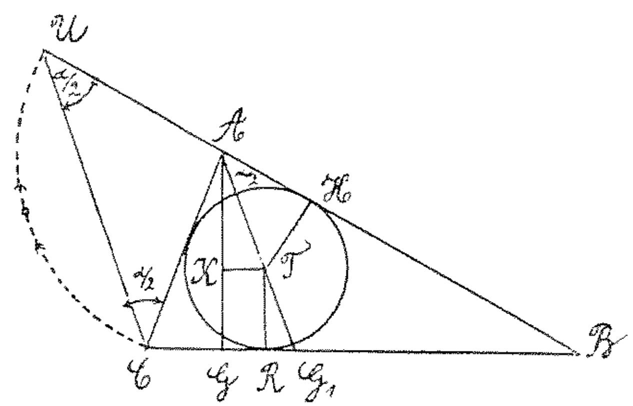
$$AC.\ AB.\ \sin\alpha = AK.\ KC.\ \sin\alpha + AK.\ KB.\ \sin\alpha$$

folgt

$$AC.\ AB = AK.\ CB,$$

und dies Produkt ist bekannt. Da nun sowohl BA + AC, als auch AB. AC bekannt sind, so findet man hiermit BA und AC einzeln. (2)

b) *Andere Lösung des Autors* : Wir zeichnen wiederum das



Figur 2

Dreieck, den Inkreis und fällen das Lot AG, welches bekannt ist. Durch den Kreismittelpunkt T ziehen wir TK ∥ BC. Da GK = TR

(2) Die zur Berechnung einer der beiden Unbekannten resultierende quadratische Gleichung verfolgt der Autor nicht weiter.

bekannt ist, so ist es auch AK = AG — TR. Aus dem Dreieck ATH ist AT bekannt und durch das Verhältnis AT : AK der Figur nach auch das Dreieck ATK; somit ist auch ∢ TAK bekannt und hierdurch auch ∢ TAB und ∢ GAB. Da der Winkel bei G ein Rechter ist, so ist auch ∢ B ($= \beta$) gegeben und damit das Dreieck ABG der Form nach bekannt. Aus dem bekannten Verhältnis BA : AG wird auch BA bekannt; somit ist auch AC bekannt; desgleichen ∢ C, da ja ∢ A und ∢ B bekannt sind. Damit ist das Dreieck ACG der Figur nach bekannt. Und es ist BA : AC (= sin C : sin B) bekannt. Und da die Summe BA + AC bekannt ist, so sind BA und AC einzeln bekannt.

c) *Andere Lösung des Autors* : Nach Zeichnung des Dreiecks und Inkreises verlängern wir AB geradlinig und machen AU = AC (Fig. 2). Wir ziehen AT bis G_1, dann ist $AG_1 \parallel UC$, da ∢ $BAG_1 = \frac{1}{2}$ ∢ BAC und ∢ AUC $= \frac{1}{2}$ ∢ BAC. Und ∢ BUC ist bekannt, da ∢ BAC bekannt ist. Und das Verhältnis BU : BC ist bekannt, da beide Strecken bekannt. Also ist das Dreieck BUC der Gestalt nach bekannt, und BU : CU bekannt, also UC bekannt und Dreieck AUC der Form nach bekannt. Damit UC : AC bekannt und hieraus AC bekannt, womit auch AB gefunden ist.

d) *Andere Lösung des Autors* :

Da das Dreieck BAC bekannt ist, so ist auch der Quotient

$$\frac{BA.\ AC}{\Delta\ ABC} \text{ bebannt. (3)}$$

Und da der Inhalt des Dreiecks ABC bekannt ist, so ist auch das Produkt BA. AC bekannt. In Verbindung mit der gegebenen Summe BA + AC wird jede einzelne Seite BA und AC bekannt.

e) *Lösung auf andere Weise* :

Wir denken uns das Dreieck ABC gezeichnet und um dasselbe den Umkreis ABCD beschrieben. Dann teilen wir arc BDC im Punkte D in zwei gleiche Hälften und ziehen die Verbindungslinie DAH. Von A und D fällen wir auf die Seite BC die Lote AG und DZ. Nun gilt :

AB : BH = AC : CH (4), oder auch AB : AC = BH : CH, woraus durch Zusammensetzung (tarkib) folgt :

$$(AB + AC) : AC = (BH + CH) : CH, \text{ oder}$$
$$(AB + AC) : BC = AC : CH.$$

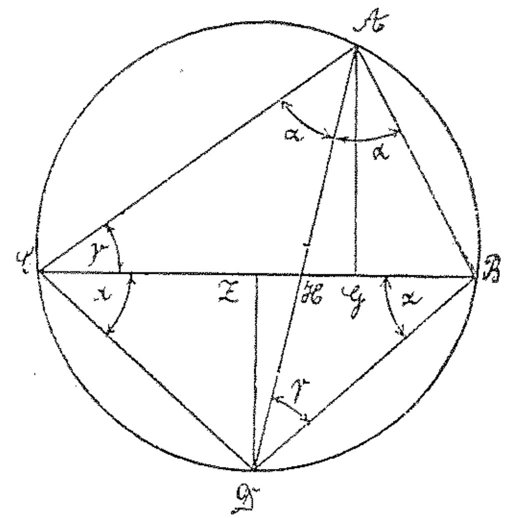
(3) Er ist = 2 : sin α.

(4) Es ist nach dem Sinussatz AB : BH = sin H : sin α, und ebenso AC : CH = sin (180° — H) : sin α.

Das Verhältnis linker Hand ist bekannt, also ist auch AC : CH, und dadurch auch AB : BH bekannt. Es ist ferner :

$$\Delta\, ABD \backsim \Delta\, HBD \backsim \Delta\, AHC$$

Daraus folgt : AD : DB = BD : DH = AB : BH.



Figur 3

Und da letzteres Verhältnis bekannt ist, so ist auch AD : DB und BD : DH bekannt. Ebenso ist AG bekannt, da AG. BC = 2. Δ ABC und die Fläche von Δ ABC bekannt ist. Da DZ ∥ AG, so gilt :

$$AG : DZ = AH : HD.$$

Letzteres Verhältnis ist bekannt (5), also wird DZ bekannt. Die Seite BC wird durch das Lot DZ halbiert, also ist auch BZ bekannt. Ferner ist jetzt im rechtwinkligen Dreieck BDZ die Hypotenuse BD bekannt. Und da nach Früherem das Verhältnis AD : DB kekannt ist, so kennt man auch AD selbst und mittels Kenntnis des Verhältnisses AH : AD jede einzelne dieser beiden Strecken. Aus

$$AB : HD = AH : HC$$

findet man einzeln die Grössen HB und HC (6). Also ist das Produkt BH. HC bekannt. Und da die Verhältnisse

(5) Es ist nämlich AC : CH bekannt und ebenso AB : BH. Und aus der Figur 3 liest man ab : CH : BH = AH : HD.

(6) Es ist ja HC = BC — HB.

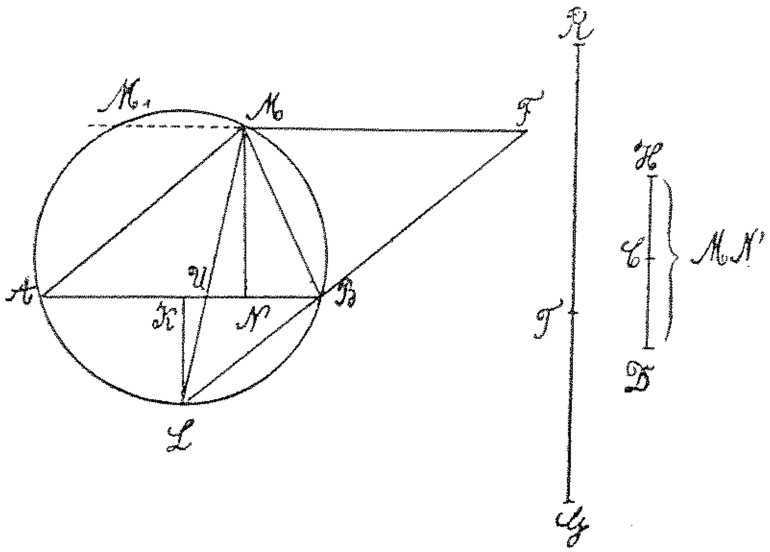
AB : BH und AC : CH einzeln bekannt (einander gleich) sind, so ist auch das Produkt der beiden Verhältnisse

$$\frac{AB \cdot AC}{BH \cdot HC}$$

bekannt. Somit findet man aus AB. AC und AB + AC die Grössen AB und AC einzeln.

f) Wir wollen jetzt über einer geraden Linie AB ein Dreieck von gegebenem Flächeninhalt zeichnen. Bekannt sei ferner die Summe der beiden anderen Seiten, und die Fläche die dem Inhalt des Dreiecks gleich sein soll, sei gebildet durch die Strecken AB, CD, die Summe der beiden Dreiecksseiten durch die Strecke RG. Wir machen

$$RG : AB = AB : TG.$$



Figur 4

Die Strecke AB teilen wir im Punkte K in zwei Hälften. In K errichten wir eine Senkrechte auf AB; sie sei = KL. Dann machen wir CH = CD und das Verhältnis

$$HD : KL = RT : TG$$

Wir ziehen AL und BL und beschreiben um das Dreieck ALB den Kreis ALBM.

Wir verlängern LA geradlinig und machen

$$FA : AL = HD : KL$$

Durch den so gefundenen Punkt F ziehen wir eine Parallele zu AB. Es sei FM; sie schneide den Kreis in M. Verbinden wir jetzt noch M

mit A und B, so behaupte ich, dass △ AMB gleich der Fläche ist, welche durch AB, DC (= ½ AB. DH) gebildet wird, und dass AM + MB gleich der Summe der beiden Seiten (= RG) ist.

Beweis. — Wir ziehen LUM und fällen von M auf AB das Lot MN.

Dann gilt : $MN : KL = MU : UL = AF : AL$

Es ist aber $AF : AL = HD : KL$, d. h.

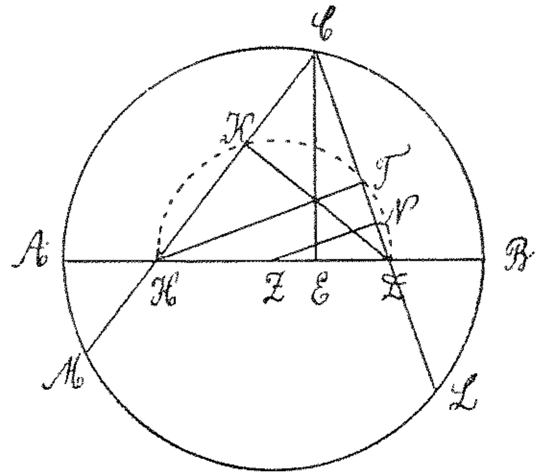
$MN : KL = HD : KL$

oder $MN = HD$

Also wird $\triangle AMB = AB. \tfrac{1}{2} MN$

$= AB. CD$, q. e. d. (7).

II) In der Kairiner Sammelhandschrift : « Masā'il handasīya mutafarriga » (Diverse geometrische Theoreme), für die kein Verfasser resp. Kompilator zeichnet, findet sich folgender planimetrische Lehrsatz von Ibn al-Haitham ausgesprochen und bewiesen : *Es sagt* 'Alī Ḥasan ibn Ḥusain al-Baṣrī (8) : *Wenn wir auf dem Durchmesser eines Kreises zwei Punkte in gleicher Entfernung vom Kreis-*



Figur 5

mittelpunkte annehmen, und wir ziehen durch sie zwei gerade Linien, die sich auf dem Umfang des Kreises schneiden, siehe, so ist die Summe der Quadrate dieser beiden Strecken gleich der Summe der Quadrate der Teile des Durchmessers.

---

(7) Der Autor schliesst hier noch ausführliche Determinationen an.

(8) So öfters sein Name, da er ursprünglich in Baṣra lebte; erst später wanderte er auf Veranlassung des Kalifen al-Ḥākim nach Kairo aus, wo er bis zu seinem Tode blieb.

Es sei der in Rede stehende Kreis ABC, sein Durchmesser AB und sein Mittelpunkt Z. Auf AB nehmen wir die zwei von Z gleichabständigen Punkte D und H an. Durch sie ziehen wir die beiden Sehnen LDC und MHC, und ich behaupte, dass alsdann

$$DC^2 + HC^2 = BD^2 + DA^2$$

ist.

Beweis : Wir beschreiben über DH als Durchmesser den Halbkreis HKTD, ziehen DK und HT und machen $CE \perp AB$. Dann verlängern wir CD und CH bis L, resp. M. Aus dem Kreismittelpunkt Z fällen wir auf CL den Perpendikel ZN, und da DTLH ein Halbkreis ist, so ist $\sphericalangle$ DTH ein Rechter, somit auch $\sphericalangle$ HTC ein Rechter, und $\sphericalangle$ CEH ist ebenfalls ein Rechter. Und nun gilt :

$$CD.\ TD = HD.\ ED \qquad (\text{da } TD : HD = ED : CD),$$

und ebenso ist : $\quad CH.\ HK = DH.\ HE.$

Die Addition beider Zeilen ergibt :

$$CD.\ DT + CH.\ HK = DH^2 \ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ 1)$$

Ferner bestehen die Gleichheiten : $LN = CN$; $DN = TN$; $DL = TC$.

Da ferner $\quad CD.\ DL = CD.\ CT$

und $\quad CD\ .\ DL = BD.\ AD,$

so ist auch : $\quad CD.\ CT = BD\ .\ AD$

Sodann ist $\quad HC.\ CK = AH.\ HB.$

Durch Addition der beiden letzten Zeilen gewinnt man :

$$DC.\ CT + CH.\ CK = BD.\ AD + AH\ .\ HB = 2.\ AD.\ AH.\ .\ .\ .\ .\ .\ 2)$$

Addieren wir nunmehr die Gleichungen 1) und 2), so erhalten wir :

$$CD\ .\ TD + HC.\ HK + DC.\ CT + HC.\ CK = DH^2 + 2.\ AD.\ AH,$$

oder : $\quad CD.(TD + CT) + CH.(HK + CK) = (AH - AD)^2 + 2.\ AD.AH,$

oder : $\quad CD^2 + CH^2 = BD^2 + AD^2 \qquad$ q. e. d.

Wie man erkennt, ist die Seitenhalbierende CZ nicht in Betracht gezogen, so dass dieser Satz des IBN AL-HAITHAM sich formell nicht mit jenem des PAPPOS deckt, welcher die Gleichheit

$$CD^2 + CH^2 = 2.\ (CZ^2 + DZ^2)$$

beweist. (S. FR. HULTSCH : Pappi Alexandrini Collectionis liber VII, Propos. 122, pag. 858-59). Aber es ist anzunehmen, dass dem muslimischen Gelehrten genannte Propositio des PAPPOS bekannt war.

III) Um den Ausbau der *Trigonometrie* haben sich die Araber besonders verdient gemacht. Dies darf nicht Wunder nehmen, waren doch ihre astronomisch-astrologischen und religiösen Praktiken ganz in der Linie der sphärischen Trigonometrie gelegen. Aber nicht nur diese erleichternden Tafeln (zījāt) erstellten sie für die geographische

Breite aller wissenschaftlichen Brennpunkte des islamischen Kulturbereichs, sondern förderten die Trigonometrie auch in ihrem theoretischen Teil. Als ihr eigenstes Verdienst können sie z. B. die Aufstellung (und den Beweis) des sphärischen (und auch ebenen) *Sinus-Satzes* buchen. Welcher arabische Mathematiker oder Astronom ihn zuerst aussprach und bewies, ist bis jetzt noch nicht ausgemacht; aus der zweiten Hälfte des 10 Jahrhunderts lässt sich seine Kenntnis bei mehreren arabischen Autoren nachweisen. So hat H. SUTER festgestellt, dass ihn der ums Jahr 1000 verstorbene ABŪ NAṢR IBN 'IRĀQ, der Lehrer AL-BIRUNĪ's, gekannt (9), ferner begegnet er uns bei ABU'L-WAFĀ' († 998) (10), bei ABŪ MUH. AL-KHUJENDĪ († ca 1000) (11), IBN YŪNUS († 1009) (12) und AL-BĪRŪNĪ († 1048) (13). Nach dem Bericht des NAṢĪR AD-DĪN AṬ-ṬŪSĪ († 1274) fände sich unser Satz sogar schon bei AN-NAIRĪZĪ († 922/23), in dessen Kommentar zu dem Almagest des PTOLEMAIOS (14). Aber in der Abhandlung des NAIRĪZĪ « Ueber die Richtung der Qibla » (15) findet er sich nicht erwähnt, obwohl dies Schriftchen naturgemäss ganz in das Gebiet der sphärischen Trigonometrie einschlägt.

Hier möchte ich den Originalbeweis des schon genannten AL-KHUJENDĪ vorführen, wie ich ihn in dem erwähnten Kairiner Schriftchen fand (Masā'il handasīya etc.). Er zeichnet sich gegenüber jenem desselben Autors, den NAṢĪR AD-DĪN AṬ-ṬŪSĪ anführt, durch grössere Vollständigkeit aus. Der Autor sagt :

Zwei Grosskreise mögen sich auf der Kugeloberfläche unter einem beliebigen Winkel schneiden, und ich nehme auf jedem der beiden Kreise 2 Bögen an, wie die Figur es darstellt. Und ich behaupte, *dass das Verhältnis des Sinus eines jeden der Bögen zum Sinus der Neigung mit dem anderen der 2 Kreise gleich ist dem Verhältnis des Sinus eines*

---

(9) Zur Trigonometrie der Araber (*Biblioth. Mathemat.*, 3. Folge 10. Bd. 1910, S. 156-160).

(10) Vgl. CARRA DE VAUX : L'almageste d'ABŪ'L-WÉFA ALBUZDJĀNĪ (*Journ. asiat.* 1892, p. 423).

(11) Vgl. ALEX. CARATHEODORY : Traité du Quadrilatère attribué à NASSIR UDDIN EL TOUSSY, (Constantinople 1891, p. 151).

(12) C. SCHOY : Gnomonik der Araber. Berlin 1923, S. 37.

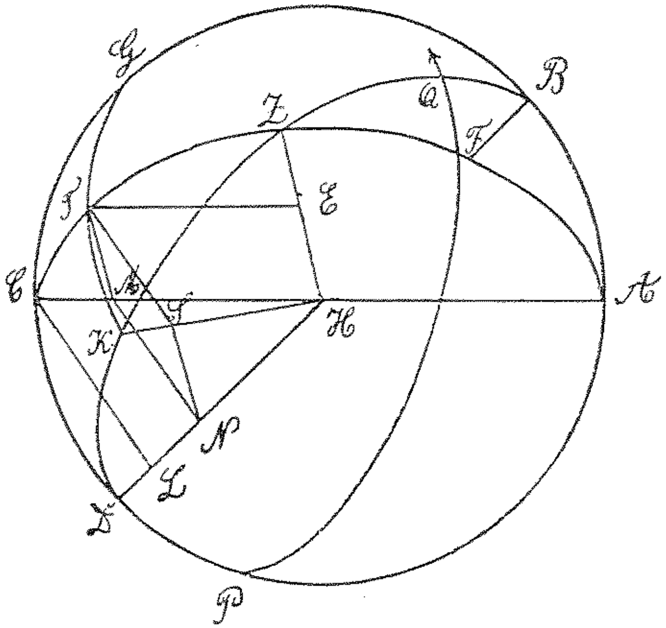
(13) Al-qānūn al-Mas'ūdī (Berl. arab. Ms. okt. 275 S. 81a).

(14) Traité du Quadrilatère, etc., p. 150.

(15) Vgl. C. SCHOY in den *Sitzungsber. der bayer. Akademie d. Wissensch.*, (mathem.-physikal. Klasse, 1922, S. 55/69),

anderen beliebigen Bogens dieses Kreises zum Sinus der Neigung (*mail*) *mit jenem Kreise.*

Es sei ABCD der Kreis der Zeichnungsebene mit dem Mittelpunkt H. Ueber ihm erheben sich scheitelrecht zur Ebene ABCD die 2 Grosskreise AZC und BZB. Sie mögen sich in Z unter einem beliebigen Winkel schneiden. Ich nehme von Z aus auf dem Kreise AZC die



Figur 6

Bögen ZT, ZC und ZF an. Durch den Punkt T lege ich einen grössten Halbkreis, der den Kreis BZD unter einen rechten Winkel schneidet. Es sei dies der Kreis GTK. Ein zweiter Halbkreis, nämlich HFQ gehe durch den Punkt F und treffe den Kreis BZD ebenfalls rechtwinklig. Und nun behaupte ich dass

$$\frac{\sin ZT}{\sin TK} = \frac{\sin ZC}{\sin CD} = \frac{\sin ZF}{\sin FQ}.$$

Beweis : Wir ziehen die beiden Durchmesser AC und BD, die sich im Punkte H schneiden mögen. Es ist AC gemeinschaftlicher Ausschnitt der 2 Kreisebenen ABCD und AZC und BC dasselbe für die Ebenen ABCD und BZD. Ziehen wir noch HK, so ist es eine den beiden Flächen BZD, GTK gemeinschaftlich angehörige Strecke. Auf die

Geraden AC, BD, ZH, KH fällen wir resp. die Lote TM, SN, ET und TS; endlich ziehen wir noch CL $\perp$ RD und verbinden MN. Und da nun die 2 Kreisflächen AZC und BZD senkrecht auf der Ebene ABCD stehen, so ist auch ZH $\perp$ ABCD, und so sind TM und ST $\perp$ ABCD, da beide auf den gemeinschaftlichen Ausschnitten senkrecht stehen. Es werden ebenso TS und CL senkrecht zur Ebene BZD stehen, d. h. die beiden Lote ZH und TM sind parallel und MH liegt in beiden Flächen. Es sind die Winkel ZHM, TMH, HET jeweils $= 90°$; somit bleibt : $\sphericalangle$ ETM $= 90°$; mithin ist die Fläche HMTE ein rechtwinkliges Parallelogramm. Es ist nun

$$TE = MH = \sin TZ$$

Und wahrlich, die 2 Lote TM und SN sind parallel, und die Strecke MN liegt in ihrer beiden Fläche. Und $\sphericalangle$ TMN $= \sphericalangle$ SNM $= 90°$. Aber auch $\sphericalangle$ TMN ist 90°, und somit verbleibt auch für $\sphericalangle$ STM 90° ; mithin ist die Fläche TMNS ein rechtwinkliges Parallelogramm. Ferner ist

$$TS = MN = \sin TK,$$

und da TS $\parallel$ MN und beide in ein und derselben Fläche liegen, so ist

TS $\perp$ BZD, also auch MN $\perp$ BZD.

Es ist schon erwähnt, dass CL $\perp$ BZD, daher MN $\parallel$ CL, also

$$\triangle HCL \backsim \triangle HMN.$$

Es gilt also die Proportion :

$$\frac{HM}{MN} = \frac{HC}{CL}$$

Und da HM $= \sin TZ$; MN $= \sin TK$,
HC $= \sin CZ$; CL $= \sin CD$,

so stehen die Sinus der 4 Bögen in Proportion. Genau so können wir dartun, dass gilt :

$$\frac{\sin TZ}{\sin TK} = \frac{\sin ZF}{\sin FQ}$$

Und das war es, was wir beweisen wollten.

(*Essen a. d. R.*) C. Schoy.
