# Einige geometrische Aufgaben bei arabischen Mathematikern.

Von Heinrich Suter in Zürich.

Das Ms. Gol. 14 der Universitätsbibliothek in Leiden[1]) enthält Abschriften von ältern Manuskripten, die der berühmte Orientalist Jac. Golius durch einen Derwisch Aḥmed in Aleppo und einen in Amsterdam wohnenden christlichen Araber in den Jahren 1627 u. ff. für seinen Gebrauch ausführen ließ. Die 29 Abhandlungen sind zum größten Teile mathematischen Inhaltes; unter denselben befinden sich zwei sehr wichtige: Nr. 1, die Übersetzung des 5.—7. Buches der Kegelschnitte des Apollonius durch Ṯâbit b. Qurra (p. 1—163) und Nr. 2, die Algebra des 'Omar b. Ibrâhîm el-Chaijâmî (p. 175—218). Auch die Abhandlung Nr. 15 (p. 300—314) von el-Bîrûnî[2]): „fi tasṭîḥ el-ṣuwar we tabṭîḥ el-kuwar" (über die Ausbreitung [Projektion] der Sternbilder und Länder, d. h. über Himmels- und Erdkarten) mag von größerem Interesse sein, leider fehlen im Texte die Figuren; ich werde vielleicht später über dieselbe einige Notizen veröffentlichen. Überhaupt sind die für Golius gemachten Abschriften nicht frei von Lücken, Wiederholungen, falscher Schreibweise von Wörtern, schlechten Figuren, aber im ganzen recht deutlich geschrieben, so daß das Lesen gar keine Mühe macht. Im folgenden gebe ich den Inhalt einiger kleineren, in verschiedener Richtung interessanten, geometrischen Abhandlungen teils in wörtlicher, teils in gekürzter Übersetzung wieder.

1) Auch für Überlassung dieses Mss. für längere Zeit spreche ich der Verwaltung der Universitätsbibliothek in Leiden meinen verbindlichsten Dank aus.

2) Diese Abhandlung ist anonym; nach dem Verzeichnis der Schriften el-Bîrûnîs (vergl. *Chronologie oriental. Völker von Albêrûnî, herausgeg. von E. Sachau*, Leipzig 1878, p. XLIII, und H. Suter, *Nachträge und Berichtigungen* etc., in Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften, 14, 1902, p. 171) und der Widmung der Abhandlung an den Malik el-'Âdil Chwârezmschâh ist aber kein Zweifel möglich, daß sie von el-Bîrûnî stamme; der Katalog von Leiden enthält hierüber keine Angabe.

## I. Verdeutlichung des Beweises zur Rechnung der beiden Fehler, in der Verbesserung des Abû Sa'îd Ğâbir b. Ibrâhîm el-Ṣâbî.[1])

Diese Abhandlung mit dem Kommentar von Aḥmed b. el-Surrî[2]) bildet die Nummern 3 und 4 des Ms. Gol. 14 (p. 218—223); Nr. 4 enthält nämlich nicht nur, wie der Verfasser des Kataloges annimmt[3]), den Kommentar, sondern die Fortsetzung des Textes mit Glossen untermischt, so daß also unsere Abhandlung erst p. 223 schließt. Nach dem Titel zu schließen, müssen vor Ğâbir b. Ibrâhîm schon ein oder mehrere Beweise zur Regel der beiden Fehler vorhanden gewesen sein, die aber den Sabier nicht befriedigt haben; in der Tat hatte schon Qosṭâ b. Lûqâ eine Abhandlung hierüber unter dem Titel „über den Beweis zur Regel der beiden Fehler" verfaßt.[4]) Diese Abhandlung ist in der Bibliothek des India Office (Nr. 1043,12°) noch vorhanden, war mir aber leider nicht zugänglich. Der Verfasser des Katalogs, O. Loth, bemerkt hierzu (p. 299): „A revised edition of this treatise by Jâbir b. Ibrâhîm Ṣâbî seems to be contained in Cat. Lugd. III. 59". Ob aber unsere Abhandlung sich an diejenige Qosṭâs anlehne, ergibt sich keineswegs aus derselben, der letztere Name wird darin nicht erwähnt, überhaupt ist gar kein Vorgänger genannt.

Da der Beweis selbst etwas verfehlt ist, so wäre es eine unnütze Mühe, eine vollständige wörtliche Übersetzung desselben geben zu wollen; ich kürze also wesentlich ab und bediene mich so oft als möglich unserer heutigen Darstellungsweise.

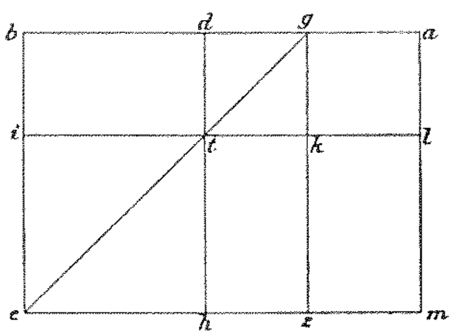


Fig. 1.

Ğâbir el-Ṣâbî geht von dem richtigen Satze aus, daß, wenn eine Strecke $ab$ in drei beliebige Teile $ag$, $gd$, $db$ geteilt ist, dann die Gleichung besteht:

$$ab \,.\, gd + ag \,.\, bd = ad \,.\, bg.$$

1 Vergl. Suter, *Die Mathematiker und Astronomen der Araber* etc., in den Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissenschaften 10, 1900, p. 69. Der arabische Titel heißt: "îḍâḥ el-burhân 'alâ ḥisâb el-chaṭâ'ain".

2) Vergl. l. c. p. 120; el-Surrî muß es wohl heißen (nicht "el-Surâ" und nicht "el-Seri") nach dem Buche Sojûṭîs, *De nominibus relativis*, herausgeg. von P. J. Veth, Leiden 1840, p. 136. b. (= ben) fehlt wohl irrtümlich im Ms.

3) *Catal. cod. orient. bibl. acad. Lugd. Batav.* Vol. III, p. 59.

4) Vergl. Suter, *Die Mathem. u. Astronom.* p. 41.





Ob dieser Satz griechisches oder arabisches Eigentum sei, können wir nicht entscheiden, bei Euklid findet er sich unseres Wissens nicht. El-Ṣâbî gibt folgenden Beweis davon: Man beschreibe [Fig. 1] über $bg$ das Quadrat $bz$, ziehe seine Diagonale $eg$, mache $bi = dg$, ziehe $il \parallel ab$, und durch den Punkt $t$ $dh \parallel be$, und vervollständige das Rechteck $abem$, so ist, da $dk$ ein Quadrat, auch $ih$ ein solches; es ist nun bekanntlich:

$$\begin{array}{rl} \text{Rechteck } bk = & \text{Rechteck } gh \\ \underline{\text{"} \quad az =} & \underline{\text{"} \quad az} \end{array}$$

$$\text{Addiert: Gnomon } bamzki = \text{Rechteck } ah$$

$$\text{oder: } ab \,.\, bi + mz \,.\, kz = ad \,.\, dh$$

$$\text{oder: } ab \,.\, gd + ag \,.\, bd = ad \,.\, bg \qquad \text{w. z. b. w.}$$

Nun setzt Ğâbir $ag$ gleich der ersten Annahme $\alpha_1$ der regula falsi, und $gd$ gleich dem ersten Fehler $f(\alpha_1)$, ferner $ab = \alpha_2$ und $bd = f(\alpha_2)$, dann erhält er aus obiger Gleichung für die unbekannte Größe $ad$ den Ausdruck:

$$ad = x = \frac{\alpha_1 f(\alpha_2) + \alpha_2 f(\alpha_1)}{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)}$$

der richtig ist in dem Falle, wo die Fehler $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ verschiedene Vorzeichen haben, hier aber absolut genommen werden.

Ğâbir scheint aber nicht erkannt zu haben, daß dieser Beweis nur für einen ganz speziellen Fall zutrifft, nämlich für den Fall, wo $f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$ genau gleich $bg = \alpha_2 - \alpha_1$ ist. Das hat auch der Glossator Aḥmed b. el-Surrî eingesehen, indem er bemerkt, daß es hier zur Berechnung der Unbekannten ja gar keiner Multiplikation und Division bedürfe, denn $x$ wäre ja einfach $= ag + dg = \alpha_1 + f(\alpha_1)$, oder $= ab - bd = \alpha_2 - f(\alpha_2)$. Ein anderer Fehler, den der Glossator dem Verfasser vorwirft, ist aber unbegründet, er scheint übersehen zu haben, daß Ğâbir el-Ṣâbî bei der Anwendung seines geometrischen Satzes auf die Regel der beiden Fehler andere Buchstaben annimmt als in der Beweisfigur, und scheint auch den Sinn einiger allerdings undeutlicher Stellen nicht richtig aufgefaßt zu haben; wir wenigstens haben keinen andern Fehler als den eben besprochenen gefunden, auch nicht in der Fortsetzung der Abhandlung, wo der Verfasser die Beweise für die Fälle gibt, wo die Fehler $f(\alpha_1)$ und $f(\alpha_2)$ beide gleiches Zeichen haben, also $\alpha_1$ und $\alpha_2$ entweder beide größer oder beide kleiner als $ad$ sind; auf diese Beweise treten wir hier aber nicht mehr ein, sie sind leicht aus dem ersten abzuleiten.

Ein bedeutender mathematischer Kopf kann Ğâbir allerdings nicht gewesen sein, sonst hätte er seinen Fehler erkannt und sich leicht zu helfen gewußt, er hätte seinen Beweis in folgender Weise verallgemeinern können:

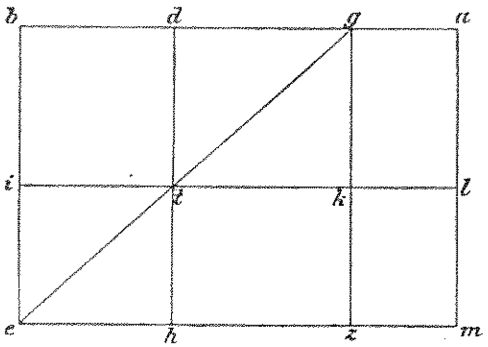

Fig. 2.

Es sei [Fig. 2] $ag = kl$ wieder $= \alpha_1$ und $gk = bi = f(\alpha_1)$ ferner wieder $ab = li = \alpha_2$ und $ie = kz = f(\alpha_2)$, dann ist wieder, ohne daß $bz$, $dk$ und $ih$ Quadrate zu sein brauchen:

Gnomon $bamzki$ = Rechteck $ah$

oder: $ab \cdot bi + kl \cdot kz = ad \cdot dh$,

oder: $\alpha_2 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_2) = ad\,[f(\alpha_1) + f(\alpha_2)]$

also:

$$ad = x = \frac{\alpha_2 f(\alpha_1) + \alpha_1 f(\alpha_2)}{f(\alpha_1) + f(\alpha_2)}\ ^{1)}$$

Dies hat auch der Glossator Ahmed b. el-Surrî nicht erkannt. Es bliebe uns immerhin noch ein Weg übrig, die Ehre Ğâbirs zu retten, wenn wir nämlich annehmen wollten, er habe wohl gewußt, daß die Strecken $bd = \alpha_2 - x$ und $gd = x - \alpha_1$ nicht die Fehler $f(\alpha_2)$ und $f(\alpha_1)$ selbst, sondern nur ihnen proportionale Größen seien, und daß man unbeschadet der Richtigkeit des Resultates auch diese dafür setzen könne, sagt er doch nie: „so ist $gd$ der erste Fehler", sondern nur: „so nennen wir $gd$ den ersten Fehler"; aber in diesem Falle hätte er seiner Abhandlung den Satz beifügen müssen, daß die Fehler der Resultate den Differenzen $x - \alpha_1$ und $\alpha_2 - x$ proportional sind.

Wir ersehen aus dieser Darstellung, daß bei den arabischen Mathematikern Versuche gemacht worden sind, die Regel der beiden Fehler auf geometrischem Wege zu beweisen; vielleicht ist auch der richtige Beweis später noch gefunden worden, wir wissen es nicht. Aber wir verstehen nun die Bemerkung Ibn el-Bennâs in seinem *Talchîṣ*, daß die Methode der Wagschalen auf Geometrie beruhe; den Beweis gab er aber nicht, und wollte auch mit seiner Figur keineswegs etwa an denselben erinnern, wie vermutet worden ist.[2] In diesem Sinne sind also die Erörterungen M. Cantors[3]) über diese Frage zu berichtigen.

Man entschuldige uns, wenn wir hier folgende Bemerkung nicht unterlassen können. In der Biblioth. Mathem. $5_3$, 1904, p. 419 führt G. Eneström eine Stelle aus einem Briefe G. Wertheims v. J. 1900 an, die lautet: „überhaupt ist die Erfindung des doppelten falschen Ansatzes

1) Dieses Resultat ergibt sich bekanntlich einfacher aus der Ähnlichkeit der Dreiecke $gtk$ und $eit$.

2) Vergl. Matthiessen, *Grundzüge der antiken und modernen Algebra* etc., 2. Ausg. Leipzig, 1896, p. 924—926.

3) *Vorlesungen über Geschichte der Mathem.* I², p. 760 f.





nach meiner Ansicht erst im 12. Jahrh. erfolgt". Diese Ansicht wird nun wohl durch die obige Abhandlung endgültig widerlegt sein; sie hätte aber auch nie aufgestellt werden sollen, wenn man erstens den Titel der jedenfalls im 12. Jahrh. ins Lateinische übersetzten Abhandlung „Liber augmenti et diminutionis, etc." und ihren Inhalt genauer studiert hätte, und zweitens berücksichtigt hätte, daß in dem vor 990 geschriebenen *Fihrist* an drei Stellen Abhandlungen „über die beiden Fehler" genannt werden (vergl. Suter, *Das Mathematikerverzeichnis im Fihrist* etc., in den Abhandlungen zur Gesch. d. Mathem. 6, 1892, p. 37).

## II. Eine Aufgabe der Höhenmessung von Abû 'Alî b. el-Haiṯam.

Diese Aufgabe befindet sich in Nr. 8 unseres Codex (p. 236—237); sie stammt von dem bedeutenden ägyptischen Mathematiker Ibn el-Haiṯam (Alhazen)[1]), und findet sich in der Tat auch im Verzeichnis seiner Schriften erwähnt. Da sie von nicht gewöhnlichem Interesse ist, gebe ich hier ihre wörtliche Übersetzung.

„Abhandlung des Schaich Abû 'Alî b. el-Haiṯam über die Kenntnis der Höhe der aufrechtstehenden Gegenstände, der Berge und der Wolken. Wir setzen voraus [Fig. 3], daß $ab$ die Höhe eines Berges oder andern Gegenstandes sei, die wir kennen wollen. Wir stellen in einem Punkte des Erdbodens einen Gegenstand (Stab) senkrecht auf, es sei dieser $de$, dann gehe der Beobachter von demselben aus vorwärts und wieder rückwärts, bis er die Spitze des Berges und die Spitze des Stabes als *einen* Punkt[2]) sieht; der Ort des Auges sei $g$, der Sehstrahl sei $gea$, und es werde $bdg$ als gerade Linie

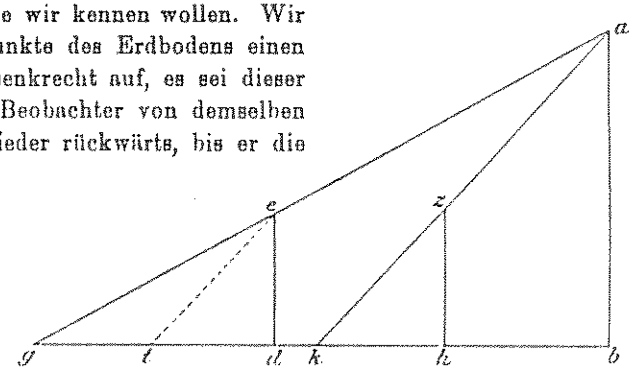

Fig. 3.

auf der Oberfläche der Erde vorausgesetzt, so ist $gb : ab = gd : de$[3]); hierauf stelle man den Stab $de$ an einem dem Berge näher gelegenen Orte $h$ auf, es sei also der Stab (in neuer Stellung) $hz$, und der Beobachter gehe wieder vorwärts und rückwärts, bis er die Spitze des Berges und

1) Suter, *Die Mathem. und Astron. d. Araber* etc. in den Abhandlungen zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 91—95.

2) Wörtlich „zusammen".

3) Die Proportionen gebe ich auch in der wörtlichen Übersetzung in heutiger Form.

des Stabes als *einen* Punkt sieht, der Ort des Auges sei in diesem Falle $k$, und der Sehstrahl sei $kza$, dann ist $ab : bk = zh : hk$, und weil die Linie $bk$ kleiner als $bg$ ist, ist auch $hk$ kleiner als $gd$, also schneiden wir von $gd$ ein Stück gleich $hk$ ab, es sei dies $dt$, dann ist $dt : de = hk : hz$, aber es ist auch $gb : ab = gd : de$, und ebenso $ab : bk = de : dt$, da $de = zh$ und $dt = kh$ ist; also ist auch $gd : dt = gb : bk$, mithin auch durch Trennung (Zerlegung)[1] $gt : dt = gk : bk$; aber es ist $dt : de = bk : ab$, also auch $gt : de = gk : ab$, folglich $gk \cdot de = gt \cdot ab$; wird nun also das bekannte $gk$ mit dem bekannten $de$ multipliziert und das Produkt durch das (bekannte) $gt$ dividiert[2]), so ergibt sich das (gesuchte) $ab$, w. z. b. w. Beendigt ist die Abhandlung, Lob sei Gott etc.".

Am Schlusse der Abhandlung steht noch, von wem hinzugefügt wissen wir nicht: „Es sagt der gelehrte, vortreffliche SA'D EDDÎN AS'AD B. SA'ÎD EL-HAMADÂNÎ[3]): Man multipliziere die Entfernung der beiden Standorte mit dem Maßstab und teile das Produkt durch den Unterschied der beiden Schatten (Cotangenten) an den beiden Standorten (d. h. $gd-kh$), so erhält man die gesuchte Höhe des Gegenstandes".

Vergleicht man diese Lösung mit der heutigen trigonometrischen

$$ab = \frac{gk \,.\, \sin akb \,.\, \sin agb}{\sin gak}$$

so sieht man, daß jene wesentlich einfacher ist; die heutige erfordert (ohne Logarithmen) zwei Multiplikationen und eine Division, diejenige der Araber nur eine Multiplikation und eine Division; berücksichtigt man noch, daß die trigonometrischen Funktionen bei den Arabern in Sexagesimalbrüchen ausgedrückt wurden, so wird die Vereinfachung noch bedeutender; auf Genauigkeit aber kann das arabische Verfahren natürlich keinen Anspruch machen. Daß IBN EL-HAITAM nicht einen kürzern Beweis für seine Lösung gefunden hat, ist auffallend und uns nicht recht erklärbar, hat er sich doch in seinen bis jetzt bekannten Schriften als einen tüchtigen Geometer erwiesen; der einfachste Beweis ist jedenfalls folgender:

Dreieck $get$[4]) $\sim$ Dreieck $gak$, ebenso Dreieck $edt \sim$ Dreieck $abk$, also: $gt : gk = te : ka = de : ab$ und hieraus:

1) el-tafṣîl (= Trennung, Zerlegung) nennen die arab. Mathematiker die Herleitung der Proportion $a - b : b = c - d : d$ aus $a : b = c : d$.

2) Hier ist vergessen hinzuzufügen, wieso $gt$ bekannt sei, es ist gleich $gd - kh$.

3) Dieser Gelehrte ist wahrscheinlich ein Zeitgenosse von AḤMED B. EL-SERRÎ, denn dieser erwähnt einen Ausspruch des ersteren über die Regel der beiden Fehler in seinen Glossen zur Abhandlung des ĠÂBIR B. IBRÂHÎM EL-ṢÂBÎ und fügt zu seinem Namen hinzu: adâma allâhu 'uluwwahu = Gott erhalte seine Größe!

4) Die Linie $et$ ist allerdings in der Figur des Mss. nicht gezogen.





$$ab = \frac{gk \,.\, de}{gt}$$

Die trigonometrische Formel läßt sich übrigens leicht in diejenige der Araber überführen, es ist:

$$ab = \frac{gk \,.\, \sin akb \,.\, \sin agb}{\sin gak} = \frac{gk}{\cot agb - \cot akb}$$

$$= \frac{gk}{\frac{gd}{de} - \frac{kh}{de}} = \frac{gk \,.\, de}{gd - kh} = \frac{gk \,.\, de}{gt}.\,[1])$$

Nach einer mündlichen Mitteilung des indischen Gelehrten ZIA UDDÎN AḤMED, von dem nächstens eine Arbeit über den MES'ÛDischen Kanon des BÎRÛNÎ erscheinen wird, kannte dieser arabische Mathematiker auch die trigonometrische Lösung unserer Aufgabe. Die Lösung IBN EL-HAITAMS befindet sich nun auch in andern mathematischen Schriften, und zwar habe ich sie bis jetzt an vier Orten gefunden: erstens bei den Indern BRAHMAGUPTA und BHÂSKARA (s. COLEBROOKE, p. 318); zweitens in der sog. Geometrie GERBERTS, und zwar an zwei verschiedenen Stellen: Kap. 27—28 und 35 der Ausgabe von OLLERIS, Kap. XIV und XX der CURTZEschen Ausgabe in den Abhandlungen zur Gesch. der Mathem. 7, 1895 (p. 90 und 93), hier ist sie etwas, aber nicht wesentlich, anders gelöst; drittens in der von CURTZE herausgegebenen[2]) *Practica geometriae* eines Anonymus (HUGO PHYSICUS?) aus dem 12. Jahrhundert, hier ist nur das Verfahren beschrieben, aber keine Lösung angegeben; viertens in der ebenfalls von CURTZE veröffentlichten[3]) *Practica geometriae* des LEONARDO MAINARDI (oder vielmehr DE'ANTONII) DA CREMONA, mit einem aus der lateinischen Ausgabe hinübergenommenen fehlerhaften Beweis. Welche Schlüsse soll man hieraus ziehen? Bei HERON[4]) und den römischen Agrimensoren findet sich diese Lösung nicht, dagegen bei dem Inder BRAHMAGUPTA (c. 600 n. Chr.); es ist also ziemlich wahrscheinlich, daß sie dieser aus verloren gegangenen griechischen Schriften über praktische Geometrie, die nach HERON aus Alexandrien nach Indien gedrungen sein möchten, entlehnt hätte; von den Indern kam sie zu den Arabern (wir glauben nicht, daß diese sie direkt aus den griechischen Quellen entnommen haben), und von diesen nach dem christlichen Abendlande, und zwar schon ziemlich früh, jedenfalls vor der großen Übersetzertätigkeit des 12. Jahrh. Dies ist unsere Ansicht; wir wollen damit keineswegs diejenige CANTORS als unmöglich hinstellen, daß

1) Man vergleiche hiermit den oben gegebenen Zusatz des SA'D ED-DÎN AS'AD.

2) Monatshefte f. Mathem. 8, 1897, p. 20.

3) Abhandl. zur Gesch. d. mathem. Wissensch. 13, 1902, p. 360—361.

4) HERON bestimmt die Höhe eines Gegenstandes mit der Dioptra auf andere Weise, s. Ausgabe v. SCHÖNE, *Heronis opera* III, p. 228—231.

nämlich GERBERT diese und andere Aufgaben, über praktische Geometrie seiner Zeit im Kloster Bobbio aus jetzt nicht mehr vorhandenen Schriften griechisch-römischer Feldmesser geschöpft haben könnte. Daß die genannte Aufgabe aber auch indischen Ursprungs sein könnte, ist keineswegs ausgeschlossen, wenn auch nicht zu verkennen ist, daß sie dem Charakter der älteren indischen Geometrie etwas ferne steht.

---

### III. Drei Aufgaben von Aḥmed b. el-Surrî.

Der Katalog der Leidener Bibliothek (Vol. III p 59) verzeichnet unter Nr. 10 des Ms. Gol. 14 nur zwei Abhandlungen von ABÛ'L-FUTÛḤ B. EL-SURRÎ[1]), nämlich: 1. in einen Kreis ein Dreieck zu zeichnen, dessen Seiten zusammen gleich dem Durchmesser des Kreises seien, 2. über die genaue Ausmessung der Kugel; der Verfasser des Kataloges hat übersehen, daß noch eine weitere Abhandlung den beiden genannten sich anschließt, nämlich: 3. in ein gleichseitiges Dreieck ein ebensolches zu zeichnen, das zum ersteren in einem gegebenen Verhältnis stehe. Von diesen drei Aufgaben, die die Seiten 241—245 unseres Kodex einnehmen, verdient die zweite kaum eine Besprechung, sie ist auch anonym, und es ist daher zweifelhaft, ob sie von demselben Autor stamme, wie die erste und dritte. Die Darstellung ist am Schlusse mangelhaft, aber man erkennt, daß Oberfläche und Inhalt nach den Formeln $4r^2\pi$ und $\frac{4r^3\pi}{3}$ berechnet werden,

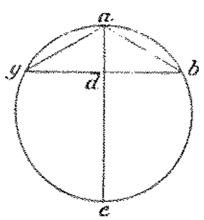

Fig. 4.

und daß das wesentliche hierbei die Bestimmung des Kugeldurchmessers sei, dessen direkte Messung den Arabern, wie es scheint, Schwierigkeiten machte. Derselbe wird dadurch gefunden, daß man [Fig. 4] von einem Punkte $a$ auf der Kugel aus mit einer Zirkelöffnung $ab$ einen beliebigen Kreis zieht, dessen Durchmesser $gb$ mißt, aus dem hierdurch bestimmten Dreieck $abg$ $ad$ erhält, hierauf $de = \frac{gd^2}{ad}$ berechnet, und dann durch Addition von $ad$ und $de$ $2r$ bekommt.

Die erste und dritte Aufgabe gehören zum Übungsmaterial unserer heutigen Mittelschulen und bieten auch kein besonderes Interesse dar. Ich gebe im folgenden eine kurze Darstellung ihrer Lösungen.

1. Figur und Text der Lösung sind mangelhaft, besonders erstere ist

1) Es ist derselbe Mathematiker, der auch den Kommentar zu der Abhandlung des ĠÂBIR B. IBRÂHÎM über die Regel der beiden Fehler verfaßt hat; vergl. Abhandl. zur Gesch. der mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 120, No. 287.





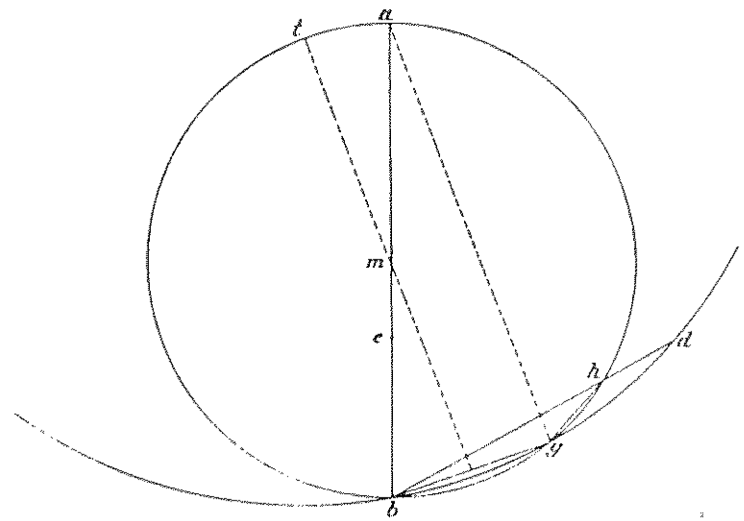

Fig. 5.

ganz verfehlt. Der Durchmesser des gegebenen Kreises [Fig. 5] sei $ab$, der Mittelpunkt $m$; man nehme einen beliebigen Teil $be$ des Durchmessers und mache die Sehne $bg$ gleich demselben, zeichne über $bg$ einen Kreisbogen, der als Peripheriewinkel die Hälfte des Winkels $bag$ fasse (sein Mittelpunkt ist $t$), zeichne in diesen Kreis von $b$ aus die Sehne $bd = ae$, dieselbe schneide den gegebenen Kreis in $h$, so ist $bhg$ das verlangte Dreieck; denn $bg = be$, und weil Winkel $bhg$ = 2. Winkel $bdg$, ist $hd = hg$, also $bh + hg = bd = ae$, mithin $bg + bh + hg = ab$, w. z. b. w.

3. Einleitend bemerkt AḤMED B. EL-SURRÎ, er sei auf das nähere Studium dieser Aufgabe geführt worden durch die Behauptung eines Handwerkers (oder Künstlers, Konstrukteurs), daß die Seite desjenigen eingezeichneten Dreiecks, das gleich der Hälfte des größeren ist, die Seite dieses letzteren im Verhältnis 1 : 5 teile; er wolle nun zeigen, daß dies unrichtig sei, werde aber zuerst die Aufgabe für einen Fall lösen, der innerhalb der Grenzen ihrer Möglichkeit liege, denn das kleinste Dreieck, das man in ein gegebenes gleichseitiges zeichnen könne, habe zu diesem das Verhältnis 1 : 4. Er stellt nun zuerst folgende zwei Hilfsätze auf: 1. Zeichnet man in ein gleichseitiges Dreieck einen Kreis und ebenso um dasselbe einen solchen, so stehen die beiden Kreisflächen zueinander im Verhältnis 1 : 4. 2. Man soll zu einem gegebenen Kreis einen zweiten finden, so daß beide zueinander in gegebenem Verhältnis stehen. Der Beweis zu 1. ist sehr einfach mit Benutzung des Satzes, daß zwei Kreisflächen sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten. Die Aufgabe 2

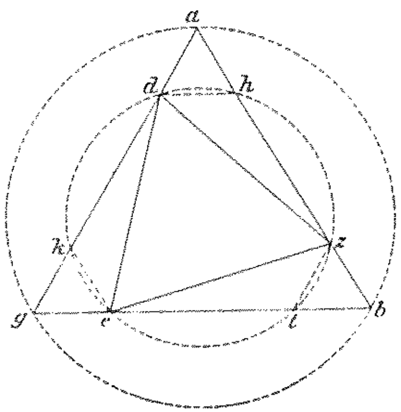


Fig. 6.

wird so gelöst: Das gegebene Verhältnis sei $e:d$, der Durchmesser des gegebenen Kreises $ab$; man zeichnet eine Strecke $z$, nach der Proportion $e:d = ab:z$; dann konstruiert man die mittlere Proportionale zwischen $ab$ und $z$, sie sei $ht$, so ist dies der Durchmesser des gesuchten Kreises, wie leicht zu beweisen ist. Dann löst er die Aufgabe, in ein gleichseitiges Dreieck ein anderes solches zu zeichnen, das halb so groß wie das gegebene ist, auf folgende Weise: Man zeichne [Fig. 6] zu dem gegebenen Dreieck den umbeschriebenen Kreis, konstruiere um denselben Mittelpunkt nach der vorigen Aufgabe einen zweiten Kreis, dessen Fläche zu der des ersteren das Verhältnis 1 : 2 habe, wo dieser Kreis die Seiten des gegebenen gleichseitigen Dreiecks schneidet, sind die Ecken des gesuchten Dreiecks. Der Beweis gründet sich auf XII, 1 Eukl., daß in Kreise eingeschriebene ähnliche Polygone sich verhalten wie die Quadrate der Durchmesser. Nun kommt er zum Beweise, daß $ah:ab$ nicht gleich $1:5$ sei, wie behauptet worden sei; da derselbe ohne algebraische Hilfsmittel geführt wird, ist er von Interesse und ich gebe denselben daher in gekürzter Form wieder: Man zieht die Sehnen $dh$, $zt$ und $ek$; nun nehmen wir zuerst an, es sei $ah = \frac{1}{4}ab$; dann hat man, weil die kleinen Dreiecke $adh$, $bzt$ und $gke$ dem Ganzen ähnlich sind, die Proportion: $adh:abg = ah^2:ab^2$, aber $ah = \frac{1}{4}ab$, also $\triangle adh = \frac{1}{16}\triangle abg$; so verhält es sich auch mit den übrigen kleinen Dreiecken, also

$$\triangle adh + \triangle bzt + \triangle gke = \tfrac{3}{16}\triangle abg$$

nun ist nach unserer Voraussetzung $hz = \frac{1}{2}ab = 2\,ah$, also $\triangle dhz : \triangle adh = 2:1$, mithin $\triangle dhz = \frac{2}{16}\triangle abg$, ebenso verhält es sich mit den Dreiecken $etz$ und $dke$, also:

$$\triangle dhz + \triangle etz + \triangle dke = \tfrac{6}{16}\triangle abg$$

folglich alle sechs kleinen Dreiecke zusammen $= \frac{9}{16}\triangle abg$, also wäre $\triangle dez = \frac{7}{16}\triangle abg$, dies ist aber ein Widerspruch, da ja $\triangle dez = \frac{1}{2}\triangle abg$ ist; also kann $ah$ nicht gleich $\frac{1}{4}ab$ sein. Ganz auf die gleiche Weise wird gezeigt, daß $ah$ nicht gleich $\frac{1}{5}ab$ sein kann; es muß nun kleiner als $\frac{1}{4}$ und größer als $\frac{1}{5}$ von $ab$ sein, die beiden Strecken $ah$ und $ab$ sind also inkommensurabel, weil zwischen 4 und 5 keine ganze Zahl liegt, sie verhalten sich also nicht wie eine (ganze) Zahl zu einer (ganzen) Zahl, w. z. b. w.





Aḥmed b. el-Surrî konnte also das richtige Verhältnis von $ah$ zu $ab$ $\left(= \frac{3-\sqrt{3}}{6} : 1\right)$ nicht finden; auch irrt er sich, wenn er meint, das Verhältnis sei irrational, weil zwischen 4 und 5 keine ganze Zahl liege; nach seinem Beweise könnte es z. B. ganz wohl $= \frac{7}{30}$ sein, denn diese Zahl liegt zwischen $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{4}$. Es scheinen also diesem Mathematiker die Hilfsmittel nicht mehr zu Gebote gestanden zu haben, die der ca. 250 Jahre früher lebende ägyptische Gelehrte Šoǧâ' b. Aslam besessen hat, wie man aus seiner Schrift „Über das Fünfeck und das Zehneck"[1]) schließen kann; um so merkwürdiger ist, daß nach ihm noch ein Mann als Gelehrter mathematischer Richtung auftreten konnte, der seine Wissenschaft so sehr beherrscht hat wie Naṣîr ed-dîn el-Ṭûsî.

## IV. Eine arabische Aufgabe über Flächenteilung von El-Moẓaffar b. Muḥ. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî.[2])

Diese Aufgabe bildet Nr. 17 des Ms. Gol. 14 und umfaßt darin die Seiten 322—327 (oben). Wegen der dabei angewandten sonderbaren Lösungsart muß ich dieselbe ziemlich ausführlich wiedergeben, allerdings mit Hinzuziehung neuerer Bezeichnungsweisen.

Die Figur ist mangelhaft ausgeführt, der Text weist Fehler in den Buchstaben und Zahlen auf, so daß die Richtigstellung nicht geringe Mühe bereitet hat. Nach der Anrufung Gottes etc. folgt:

„Es ist dies eine Aufgabe, deren Lösung Šems ed-dîn, der Emîr der Niẓâmîschen (?) Emîre von dem berühmten, einzigen, gelehrten Imâm Šaraf ed-dîn el-Moẓaffar b. Muḥ. b. el-Moẓaffar el-Ṭûsî verlangt hat, in der Stadt Hamadân im Jahre 606 d. H. (1209/10), nämlich ein gegebenes Quadrat in vier Teile zu teilen, so daß der in der Mitte ein Rechteck und die drei es begrenzenden Trapeze seien, und die vier Flächen zueinander in gegebenem Verhältnis stehen.

„Die Quadratseite [Fig. 7] sei 10 und die vier Figuren $gtxy$, $abxt$, $atgc$ und $cdyg$ sollen sich verhalten wie $1:2:3:5$. Man verlängert $ab$, nimmt auf der Verlängerung einen beliebigen Punkt $e$ an, macht $e\mu = 9\,be$, verbindet $\mu$ mit $d$ und zieht durch $e$ die Parallele $ew$ zu $\mu d$ (dann ist also $bw = 1$)[3]), nun mache man $b\eta = 55$ (beliebige) Teile und $\eta\vartheta = 45$[4])

1) Festschrift zum achtzigsten Geburtstage Moritz Steinschneiders, Leipzig, 1896, p. 169—194.

2) Vergl. H. Suter, *Die Mathem. und Astron. d. Araber*, etc. in Abhandl. z. Gesch. der mathem. Wissensch. 10, 1900, p. 134.

3) Das Eingeklammerte hier und im folgenden steht nicht im Text.

4) Im Text steht beide mal 54.

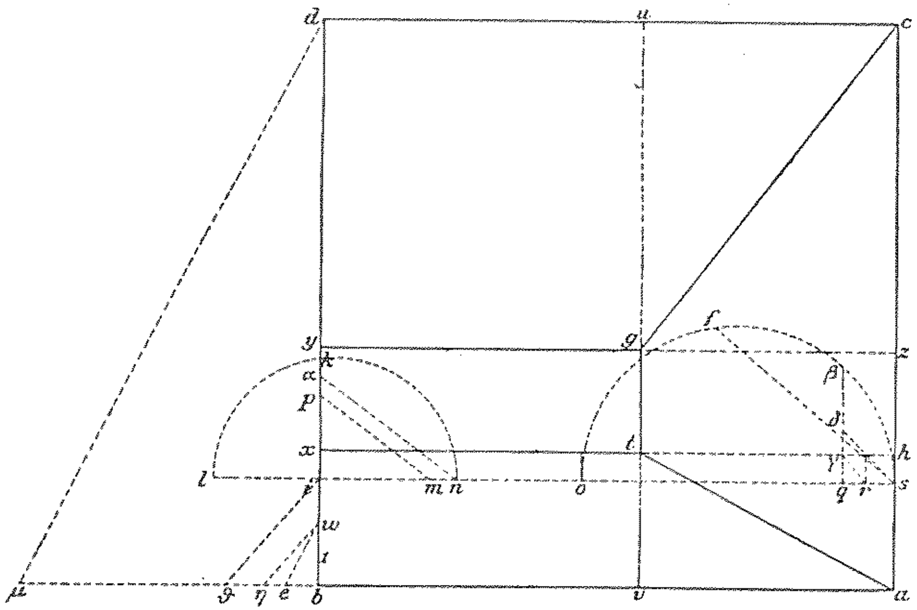


Fig. 7.

solcher, verbinde $\eta$ mit $w$ und ziehe durch $\vartheta$ die Parallele $\vartheta i$ zu $\eta w$ (so ist also $wi = {}^9/_{11}\ bw$, mithin $bi = 1^9/_{11}$). Dann ziehe man durch $i$ die Parallele $is$ zu $ab$, verlängere sie über $i$ hinaus und mache $il = 1^3/_4$ und $im = 2$; dann mache man $ip = 3025$[1]) (beliebige) Teile und $p\alpha = 725$[2]) solcher, ziehe $pm$ und durch $\alpha$ die Parallele $\alpha n$ dazu (so verhält sich $im : in = 3025 : 3750$, also ist $in = 2\frac{1450}{3025}$). Hierauf beschreibe man über $nl$ einen Halbkreis (der $bd$ im Punkte $k$ schneidet, so ist $ik^2 = il \cdot in = 4\frac{1025}{3025}$), mache $os = 5\frac{5}{11}$, beschreibe darüber einen Halbkreis, mache die Sehne $sf = 2\ ik$, halbiere den Bogen $sf$ in $\beta$ und ziehe $\beta q$ senkrecht auf $os$ (so ist $\beta q = \frac{1}{2}\ sf = ik$, also $\beta q^2 = oq \cdot qs = 4\frac{1025}{3025}$); nun macht man $q\gamma = 3$ (beliebige) Teile und $\gamma\delta = 4$ solcher, zieht $\delta s$ und durch $\gamma$ die Parallele $\gamma r$ dazu (so ist $rs = \frac{4}{7}\ qs$, also $oq \cdot rs = \frac{4}{7}\ oq \cdot qs = \frac{4}{7} \cdot 4\frac{1025}{3025} = 2\frac{1450}{3025}$); jetzt mache man $sh = rs$, ziehe $hx$ parallel zu $si$ und errichte in $r$ eine Senkrechte, so ist $rh$ ein Quadrat. Dann mache man $dy = 2\frac{1}{2}\ bx$, ziehe $yz$ parallel zu $ab$, mache dann ferner $av = 1\frac{1}{2}\ bi + 3\frac{1}{2}\ rs$ und ziehe $uv$ parallel zu $bd$, verbinde noch $g$ mit $c$ und $t$ mit $a$, so ist das Quadrat in der verlangten Weise geteilt."

1) Im Ms. steht 3024.

2) Im Ms. steht 1725.





Den weitschweifigen Beweis gebe ich sehr verkürzt und in moderner Form:

Es ist Rechteck $hv = av \cdot ah = (1\frac{1}{2}\ bi + 3\frac{1}{2}\ rs)\ (bi + rs)$
$= (1\frac{1}{2} \cdot 1\frac{9}{11} + 3\frac{1}{2}\ rs)\ (1\frac{9}{11} + rs) = \frac{800}{121} + 9\frac{1}{11}\ rs + 3\frac{1}{2}\ rs^2.$

Ferner Rechteck $hi = rh + r\gamma + o\gamma + ox$
$= rs^2 + \frac{3}{4}\ rs^2 + oq \cdot rs + oi \cdot rs$
$= 1\frac{3}{4}\ rs^2 + 2\frac{1450}{3025} + 4\frac{6}{11}\ rs = \frac{300}{121} + 4\frac{6}{11}\ rs + 1\frac{3}{4}\ rs^2$

also ist $hi = \frac{1}{2}\ hv$, mithin Rechteck $hi =$ Dreieck $aht$.

Es ist aber $hb - hi = bs$ und $hb - aht = abxt$, also $bs = abxt$, oder:

Trapez $abxt = ab \cdot bi = 1\frac{9}{11}\ ab = \frac{200}{11} = \frac{2}{11} \square\ abcd$.

Nun hat man die Proportion:

Trapez $abxt$ : Trapez $cdyg = bx : dy = 2 : 5$
also Trapez $cdyg = \frac{5}{11} \square\ abcd$.

Ferner hat man: Dreieck $avt$ : Dreieck $cug = vt : gu = 2 : 5$
also Dreieck $cug = 2\frac{1}{2}$ Dreieck $avt$,

also: Dreieck $avt$ + Dreieck $cug = 3\frac{1}{2}$ Dreieck $avt = 3\frac{1}{2}\ hi = 3\frac{1}{2}\ ac \,.\, rs$,
und Rechteck $au = ac \,.\, av = ac\,(1\frac{1}{2}\ bi + 3\frac{1}{2}\ rs)$,

das obere vom unteren subtrahiert, bleibt:

Trapez $atgc = 1\frac{1}{2}\ ac \,.\, bi = 1\frac{1}{2}\ bs = 1\frac{1}{2}\ abxt$
also Trapez $atgc = \frac{3}{11} \square\ abcd$;
also bleibt für das Rechteck $xygt$ noch $\frac{1}{11} \square\ abcd$,

mithin hat man die Proportion:

$xygt : abxt : atgc : cdyg = 1 : 2 : 3 : 5$, w. z. b. w.

---

Diese merkwürdige Konstruktion veranlaßt uns zu folgenden Bemerkungen: In erster Linie fallen die großen Verhältniszahlen 55 : 45 und 3025 : 725 auf, die ja auf 11 : 9 und 121 : 29 hätten reduziert werden können; aber auch diese wären nicht notwendig gewesen, zur Konstruktion genügt eine Streckenteilung in zehn und eine solche in sieben gleiche Teile. Auch wird man leicht einsehen, daß die Konstruktion bedeutend einfacher geworden wäre, wenn er die Seite des Quadrates 11 statt 10 angenommen hätte; vielleicht war ihm aber die Seitenlänge vorgeschrieben, ich erinnere daran, daß die arabischen Mathematiker bei algebraischen und geometrischen Aufgaben mit Vorliebe die Zahl 10 als Normalzahl wählten.[1]) Ferner muß der eigentümliche Weg auffallen, auf dem er $\beta q$ erhält, er hätte ja nur durch $k$ eine Parallele zu $ab$ ziehen müssen, da $\beta q = ki$. Da eine

1) Vergl. die Aufgaben in der Algebra des Muh. b. Mûsâ al-Chwârezmî (ed. Rosen), und in der oben zitierten Abhandlung von Šoǵâ' b. Aslam über das Fünfeck und Zehneck.

3*

Analysis fehlt, so können wir nicht erkennen, auf welche Weise der Verfasser auf diese Lösung gekommen ist; unser moderner Weg führt auf quadratische Gleichungen, und zwar findet man leicht, wenn die Quadratseite mit $a$ bezeichnet wird:

$$bx = \frac{2a}{7}\left(\frac{13-\sqrt{15}}{11}\right),\quad xy = \frac{a}{11}\left(\sqrt{15}-2\right),\quad xt = \frac{a}{11}\left(\sqrt{15}+2\right).$$

Die Konstruktion wird dann am besten so ausgeführt, daß man zuerst $a$ in 10 gleiche Teile teilt, dann $\sqrt{15} = \sqrt{3.5}$ sucht, hierauf $xy$ konstruiert nach der Proportion $11 : a = \sqrt{15} - 2 : xy$, hierauf vom Reste $a - xy$ zwei Siebentel nimmt, so hat man $bx$, die andern fünf Siebentel sind $dy$.

Es will uns scheinen, als wenn jene großen Zahlen und die eigentümliche Art der Konstruktion zu dem Zwecke gewählt worden wären, die Lösung um so schwieriger und die Leistung des Mathematikers deshalb um so großartiger erscheinen zu lassen, und um ja nicht andere auf die Spur des Gedankenganges zu bringen, der zur Auflösung geführt hat. Ja nicht einmal nachmachen können sollte man die Konstruktion, denn wer wird eine Streckenteilung im Verhältnis 3025 : 725 ausführen! Übrigens muß Mozaffar el-Ṭûsî die mathematischen Kenntnisse seiner Zeitgenossen auch gar gering geschätzt haben, wenn er nicht einmal den Einwand erwartet oder gefürchtet hat, man könne ja 3025 : 725 mit 25 abkürzen. Daß Mozaffar selbst das letztere und überhaupt die Vereinfachung der Konstruktion nicht eingesehen habe, wird wohl niemand behaupten wollen. Eine solche absichtlich und zwar auf so plumpe Art komplizierter gemachte Lösung einer Aufgabe war nur möglich zur Zeit des Niederganges der Wissenschaft, zu einer Zeit, da selbst hochgestellte Persönlichkeiten keine Spur mehr von mathematischer Bildung besaßen, wo die Vertreter dieser Wissenschaft gleichsam als Wundermenschen angestaunt wurden, und selbstverständlich nicht darnach trachteten, die Meinung, die man von ihnen hatte, zu zerstören.