43. *Sachau E.* Alberuni's India/Engl. ed. with notes and indices by E. Sachau. L., 1888. Vol. 1, 2.
44. *Smith D. E., Ginsburg J.* Rabbi ben Ezra and Hindu-Arabic problem.— Amer. Math. Month., 1918, vol. 25, N 3, p. 99—108.
45. *Steinschneider M.* Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische und ihres Einflüsses auf die arabische Literatur.— Ztschr. Dt. Morgenländ. Ges., 1870, Bd. 24, S. 325—420.
46. *Steinschneider M.* Etudes sur Zarkali.— Bull. Boncompagni, 1887, vol. 20, p. 1—36; 575—584.
47. The Surya-siddhanta/Engl. transl. E. Burgess; Annot. W. D. Whitney.— J. Amer. Orient. Soc., New Haven, 1859—1860, vol. 6. Repr.: P. Ganguoly, introd. P. Ch. Sengupta. Calcutta, 1935.
48. *Suter H.* Der Verfasser des Buches «Grunde der Tafeln des Chowarezmi».— Bibliotheca mathematica. F. 3, 1903, Bd. 4. S. 129—131.
49. *Toomer G. J.* The solar theory of az-Zarqāl: A History of errors.— Centaurus, 1969, vol. 14, p. 306—336.
50. *Toomer G. J.* A survey of the Toledan tables.— Osiris, 1968, vol. 15, p. 5—174.
51. *Vernet J.* Las «Tabulae probatae».— In: Homenaje a Millàs Vallicrosa. Barcelona, 1956, vol. 2, p. 501—522.
52. *Zinner E.* Die Tafeln von Toledo.— Osiris, 1936, vol. 1, p. 747—774.

ПРИЛОЖЕНИЯ

КНИГА О СЛОЖЕНИИ И ВЫЧИТАНИИ [1]

Мухаммад ал-Хорезми

I. Фрагмент, сохранившийся в передаче самого ал-Хорезми [2]

104 Всякое число является составным и составлено из единицы. Итак, единица находится в каждом числе. И это то, что говорится в другой книге по арифметике [3]. Единица есть корень всякого числа, и она находится вне чисел [4]. Корень числа она потому, что определяется сама по себе, то есть без какого-либо другого числа. Всякое же другое число не может быть получено без единицы. Ведь когда ты говоришь: единица, то она для своего определения не нуждается в другом числе, всякое же другое число нуждается в единице, потому что ты не можешь сказать: два или три, если не предшествует единица. Итак, число есть не что иное, как собрание единиц и, когда мы говорили, что ты не можешь сказать: два или три, если не предшествует единица, то мы говорили,
104об. так сказать, не о речи, а о сути дела. Ведь не | может быть два или три, если не брать единицу. Единица же может быть без второго и третьего. Итак, два есть не что иное, как двойственность или удвоение единицы. Таким же образом три не что иное, как утроение той же единицы. И так разумей о всяком другом числе. А теперь вернемся к книге [5].

II. Фрагмент, сохранившийся в передаче Абу Камила [6]

109 об. |Что касается главы об удвоенных числах, их последовательностях и суммах последовательностей, как удвоения на клетках шахмат [7] и другие, например единица, два, четыре, восемь, шестнадцать и так далее, то это так, как сказал Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми, да смилостивится над ним Аллах [8]. А именно второе из них больше первого на единицу, третье больше [суммы] первого и второго на единицу, четвертое больше [суммы] первого, второго и третьего на единицу и так далее по этому образцу, всегда каждое из них больше суммы тех, которые перед ним, на единицу [9]. Так как ты
110 знаешь, что второе — это два, а первое — единица | то второе больше первого на единицу, третье — четыре, оно боль-

ше [суммы] первого и второго на единицу, четвертое — восемь, оно больше [суммы] первого, второго и третьего на единицу и так далее до того, сколько ты хочешь из удвоений, и каждое удвоение всегда больше [суммы] удвоений, которые перед ним, на единицу. Поэтому, поскольку это так, а затем ты хочешь сложить все удвоения между единицей и двадцатью или тем, что ты хочешь из чисел в порядке их последовательности до двадцати, то удвой [числа] от единицы до двадцати одного [10], и точно так же поступай, если ты хочешь сложить удвоения до шестидесяти четырех, а это клетки шахмат. Мы удваиваем от единицы до двадцати одного и увеличиваем удвоения, насколько мы хотим. Поэтому мы говорим: единица, два, четыре, восемь, шестнадцать до того, чтобы это окончилось на двадцать первом разе. Если ты отнимешь от того, что у тебя получилось на двадцать первом разе, как всегда, единицу, у тебя останется сумма удвоений единицы, двух, четырех, восьми, шестнадцати и так далее до двадцать первого раза.

Мухаммад ибн Муса, да будет доволен им Аллах, облегчил это и упростил: он положил первое [число равным] двум, чтобы избавиться от прибавления единицы. Если поступать подобным образом, то четыре будет вторым, и если умножить четыре на равное им, получится шестнадцать, а это четвертое; если умножить шестнадцать на равное им, получится двести пятьдесят шесть, а это восьмое; если умножить двести пятьдесят шесть на четыре, то есть второе, получится тысяча двадцать четыре, а это десятое и так далее. Мы поступаем подобным образом со всем подобным этому: если умножить четвертое на пятое, получится девятое, так как четыре и пять — девять, если умножить восьмое на седьмое, получится пятнадцатое, если умножить первое на девятое, получится десятое, так как мы положили первое равным двум, а девятое — пятистам двенадцати [11]. Поэтому, если умножить десятое, то есть тысячу двадцать четыре, на равное ему, получится тысяча тысяч сорок восемь тысяч пятьсот семьдесят шесть, а если вычесть из этого единицу, останется: тысяча тысяч сорок восемь тысяч пятьсот семьдесят пять, это сумма удвоений от единицы до двадцати. Если ты хо-
110об. чешь получить сумму удвоений, которые в | клетках шахмат, то умножь восьмое, то есть двести пятьдесят шесть, на равное ему, получится шестнадцатое; умножь то, что в шестнадцатой клетке, на равное этому, получится то, что в тридцать второй клетке, умножь то, что в тридцать второй клетке, на равное этому, получится то, что в шестьдесят четвертой клетке. Если, как всегда, отнять от этого единицу, то то,

что останется,— это сумма удвоений от единицы до шестидесяти четырех, а это клетки шахмат [12]. По этому правилу [можешь сосчитать] то, что ты хочешь, если пожелает Аллах.

*

ПРИМЕЧАНИЯ

1 Вопрос о том, написал ли ал-Хорезми только один или два арифметических трактата, обсуждался многими историками математики. Историк науки Ибн ан-Надим (X в.) в своем «Фихристе» указал, что ал-Хорезми был автором «Книги о сложении и вычитании» (Китаб ал-джам' ва-т-тафрик), однако не в биографии ал-Хорезми, а в разделе, посвященном ученому X в. Абдаллаху ас-Сайданани, который, по словам Ибн ан-Надима, составил комментарии на эту книгу [1, с. 404]. Некоторые историки математики считали, что это тот же трактат, который сохранился в единственной рукописи Кембриджского университета и издан в русском переводе [2, с. 9—25]. Однако Р. Рашед в статье, опубликованной в этом сборнике, указал, что в алгебраическом трактате египетского математика X в. Абу Камила сохранилась цитата из арифметического трактата ал-Хорезми, отсутствующая в опубликованном трактате. Здесь публикуется перевод этого фрагмента, присланного нам Ж. Сезано, в переводе Дж. ад-Даббаха, а также фрагмент из опубликованного ранее арифметического трактата ал-Хорезми, который, несомненно, также является цитатой из другого арифметического трактата ал-Хорезми. Вопрос о втором арифметическом трактате ал-Хорезми рассматривается также в статьях А. П. Юшкевича и А. Аллара в наст. кн.

2 Этот фрагмент приведен в опубликованном ранее арифметическом трактате ал-Хорезми [2, с. 9—1]. Приводимый нами перевод исправлен А. П. Юшкевичем по транскрипции латинского текста кембриджской рукописи, выполненной К. Фогелем [3, с. 9—11]. Пагинация приведена по кембриджской рукописи.

3 Ссылка ал-Хорезми на «другую книгу по арифметике», несомненно, является ссылкой на «Книгу о сложении и вычитании», так как других арифметических трактатов ал-Хорезми не писал.

4 Утверждения о том, что всякое число составлено из единиц и что единица не является числом,— известные утверждения эллинистических математиков: первое из них совпадает со вторым определением VII книги «Начал» Евклида [4, т. 2, с. 9], второе равносильно словам Аристотеля: «Наименьшее число, взятое вообще, есть двойка»,— которыми начинается 12-я глава IV книги «Физики» [5, т. 3, с. 151].

5 Здесь ал-Хорезми возвращается к основному тексту своей «Книги об индийском счете».

6 Фрагмент сохранился в «Книге об алгебре и алмукабале» (Китаб ал-джабр ва-л-мукабала) Абу Камила (рукопись стамбульской библиотеки Кара Мустафа 379, л. 109 об.— 110 об.). Пагинация приведена по этой рукописи.

7 Здесь имеется в виду индийская легенда об изобретении шахмат, согласно которой изобретатель шахмат получил в награду 1 зерно пшеницы на первом поле шахматной доски, 2 — на втором, 4 — на третьем; ..., 2^{63} — на 64-м поле. Мы переводим здесь названия полей шахматной доски буйут аш-шатрандж, буквально «дома шахмат», выражением «клетки шахмат».

8 Слова «да смилостивится над ним Аллах» означают, что в то время, когда Абу Камил писал свой трактат, ал-Хорезми уже умер.

9 Здесь ал-Хорезми формулирует правило, которое можно выразить формулой $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.

10 Здесь под словами «двадцать» и «двадцать один» имеются в виду не числа 20 и 21, а числа, стоящие на 20-м и 21-м местах.

[11] «Упрощение» ал-Хорезми состоит в том, что он сопоставил геометрической прогрессии $2, 2^2, 2^3, \dots$ арифметическую прогрессию $1, 2, 3, \dots$, что, как пишет А. П. Юшкевич об аналогичном сопоставлении в книге Н. Шюке (XV в.), представляет собой «предвосхищение свойств будущих логарифмов» [6, т. 422].

[12] Суммирование прогрессии $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$ было произведено ал-Бируни в его «Памятниках минувших поколений» [7, с. 151]. Ал-Бируни назвал это вычисление «небезызвестным образцом», что дает основание предположить его знакомство с «Книгой о сложении и вычитании» ал-Хорезми. Приведенное ал-Бируни значение суммы этой прогрессии — 18 446 744 073 709 551 615.

*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибн ан-Надим.* Ал-Фихрист. Каир, 1929.
2. *Аль-Хорезми.* Математические трактаты/Пер. Ю. Х. Копелевич, Б. А. Розенфельда. Ташкент: Фан, 1964.
3. *Vogel K.* Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's algorismus. Aalen, 1963.
4. *Евклид.* Начала/Пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948—1950. Т. 1—3.
5. *Аристотель.* Сочинения/Под ред. И. Д. Рожанского. М.: Мысль, 1981. Т. 3.
6. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Бируни.* Памятники минувших поколений.— Избр. произведения/Пер. М. А. Салье. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1957, т. 1.

1980б. |

ОСТРОУМНЫЕ МЫСЛИ ИЗ ДЕЙСТВИЙ МУХАММАДА ибн МУСЫ ал-ХОРЕЗМИ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЗИМУТА С ПОМОЩЬЮ АСТРОЛЯБИИ [1]

Если ты хочешь определить азимут [2] с помощью астролябии [3], то наблюдай Солнце в любое время, посмотри, какая высота получится и помести градус Солнца [4] на соответствующий ей альмукантарат [5]. Далее посмотри, какой из линий азимутов [6] достигает эта высота, тогда то, что ты найдешь, и есть азимут этого часа.

Если ты хочешь определить линию меридиана [7], когда Солнце на юго-востоке, то из той четверти, в которой ты взял высоту, отсчитай столько же [градусов], сколько в этом азимуте, помести в это место конец алидады [8], сделай спинку [9] астролябии параллельной горизонту и поворачивай ее направо и налево до тех пор, пока тень трона [10] не попадет на спинку алидады или пока лучи не пройдут через диоптр и не попадут на линию в середине алидады. Если ты увидишь их в таком положении, то линия меридиана есть тот диаметр спинки астролябии, на котором находится подвес [11].

Если Солнце северо-западнее, то действуй таким же образом. Однако при этом действии подвес находится с северной стороны, а при первом действии — с южной стороны.

199 | Если Солнце на востоке или на севере, то отсчитай градусы этого азимута от другого места направо от той четверти, в которой ты берешь высоту. Пусть будет 20 [градусов] снизу в сторону подвеса. Тогда помести конец алидады на это число [градусов] и, если спинка астролябии также расположена параллельно горизонту, поворачивай ее направо и налево до тех пор, пока алидада не станет в тени трона или пока лучи не пройдут через диоптр к ее средней линии. Если будет такое положение, то линия меридиана попадет на диаметр, на котором находится подвес, когда подвес с северной стороны. Точно так же следует действовать, когда Солнце на юго-западе, однако подвес будет находиться с южной стороны.

Вопрос о том, является ли Солнце северным или южным, выясняется по дуге азимута, начинающейся от места восхождения Овна [12], проходящей через зенит [13] и кончающейся в точке захождения Овна: если Солнце находится между этой дугой и центром астролябии, то оно является северным, находится ли оно на востоке или на западе; если же Солнце находится вне этой дуги — между ней и краем астролябии, то оно является южным, находится ли оно на востоке или на западе. Так обстоит дело для астролябии, в которой азимут отсчитывается от дуги азимута восхождения Овна до середины неба и до колышка земли [14] по девяноста [градусов] с обеих сторон.

Что касается астролябии, в которой отсчет начинается от линии середины неба и кончается сто восьмидесятью [градусами] на колышке земли по обе стороны, то есть на восток и на запад, то возьми то, что у тебя получилось, запомни это, отсчитай то, что ты запомнил направо от начала высоты, помести на это место алидаду и найти азимут Солнца так, как мы описали, когда Солнце является восточным независимо от того, находится ли оно на севере или на юге.

Определение широт климатов [15]

Первый климат: его широта — шестнадцать градусов.
Второй климат: его широта — двадцать четыре градуса.
Третий климат: его широта — тридцать градусов.
Четвертый климат: его широта — тридцать шесть градусов.
Пятый климат: его широта — сорок один градус.
Шестой климат: его широта — сорок пять градусов.
Седьмой климат: его широта — сорок восемь градусов.

Широта первого климата 16, а начало Рака далеко на севере за зенитом. Если Солнце находится в первом градусе