

43. Sachau E. Alberuni's India/Engl. ed. with notes and indices by E. Sachau. L., 1888. Vol. 1, 2.
44. Smith D. E., Ginsburg J. Rabbi ben Ezra and Hindu-Arabic problem.— Amer. Math. Month., 1918, vol. 25, N 3, p. 99—108.
45. Steinschneider M. Zur Geschichte der Uebersetzungen aus dem Indischen ins Arabische und ihres Einflusses auf die arabische Literatur.— Ztschr. Dt. Morgenländ. Ges., 1870, Bd. 24, S. 325—420.
46. Steinschneider M. Etudes sur Zarkali.— Bull. Boncompagni, 1887, vol. 20, p. 1—36; 575—584.
47. The Surya-siddhanta/Engl. transl. E. Burgess; Annot. W. D. Whitney.— J. Amer. Orient. Soc., New Haven, 1859—1860, vol. 6. Repr.: P. Ganguoly, introd. P. Ch. Sengupta. Calcutta, 1935.
48. Suter H. Der Verfasser des Buches «Grunde der Tafeln des Chowarezmi».— Bibliotheca mathematica. F. 3, 1903, Bd. 4, S. 129—131.
49. Toomer G. J. The solar theory of az-Zarqāl: A History of errors.— Centaurus, 1969, vol. 14, p. 306—336.
50. Toomer G. J. A survey of the Toledan tables.— Osiris, 1968, vol. 15, p. 5—174.
51. Vernet J. Las «Tabulae probatae».— In: Homenaje a Millàs Vallicrosa. Barcelona, 1956, vol. 2, p. 501—522.
52. Zinner E. Die Tafeln von Toledo.— Osiris, 1936, vol. 1, p. 747—774.

ПРИЛОЖЕНИЯ

КНИГА О СЛОЖЕНИИ И ВЫЧИТАНИИ ¹

Мухаммад ал-Хорезми

I. Фрагмент, сохранившийся в передаче самого ал-Хорезми ²

- 104 Всякое число является составным и составлено из единицы. Итак, единица находится в каждом числе. И это то, что говорится в другой книге по арифметике ³. Единица есть корень всякого числа, и она находится вне чисел ⁴. Корень числа она потому, что определяется сама по себе, то есть без какого-либо другого числа. Всякое же другое число не может быть получено без единицы. Ведь когда ты говоришь: единица, то она для своего определения не нуждается в другом числе, всякое же другое число нуждается в единице, потому что ты не можешь сказать: два или три, если не предшествует единица. Итак, число есть не что иное, как собрание единиц и, когда мы говорили, что ты не можешь сказать: два или три, если не предшествует единица, то мы говорили, так сказать, не о речи, а о сути дела. Ведь не | может быть два или три, если не брать единицу. Единица же может быть без второго и третьего. Итак, два есть не что иное, как двойственность или удвоение единицы. Таким же образом три не что иное, как утроение той же единицы. И так разумей о всяком другом числе. А теперь вернемся к книге ⁵.

II. Фрагмент, сохранившийся в передаче Абу Камилы ⁶

- 109 об. | Что касается главы об удвоенных числах, их последовательностях и суммах последовательностей, как удвоения на клетках шахмат ⁷ и другие, например единица, два, четыре, восемь, шестнадцать и так далее, то это так, как сказал Мухаммад ибн Муса ал-Хорезми, да смилостивится над ним Аллах ⁸. А именно второе из них больше первого на единицу, третье больше [суммы] первого и второго на единицу, четвертое больше [суммы] первого, второго и третьего на единицу и так далее по этому образцу, всегда каждое из них больше суммы тех, которые перед ним, на единицу ⁹. Так как ты 110 знаешь, что второе — это два, а первое — единица | то второе больше первого на единицу, третье — четыре, оно боль-

ше [суммы] первого и второго на единицу, четвертое — восемь, оно больше [суммы] первого, второго и третьего на единицу и так далее до того, сколько ты хочешь из удвоенных, и каждое удвоение всегда больше [суммы] удвоенных, которые перед ним, на единицу. Поэтому, поскольку это так, а затем ты хочешь сложить все удвоения между единицей и двадцатью или тем, что ты хочешь из чисел в порядке их последовательности до двадцати, то удвой [числа] от единицы до двадцати одного¹⁰, и точно так же поступаешь, если ты хочешь сложить удвоения до шестидесяти четырех, а это клетки шахмат. Мы удваиваем от единицы до двадцати одного и увеличиваем удвоения, насколько мы хотим. Поэтому мы говорим: единица, два, четыре, восемь, шестнадцать до того, чтобы это окончилось на двадцать первом разе. Если ты отнимешь от того, что у тебя получилось на двадцать первом разе, как всегда, единицу, у тебя останется сумма удвоенных единиц, двух, четырех, восьми, шестнадцати и так далее до двадцать первого разе.

Мухаммад ибн Муса, да будет доволен им Аллах, облегчил это и упростил: он положил первое [число равным] двум, чтобы избавиться от прибавления единицы. Если поступать подобным образом, то четыре будет вторым, и если умножить четыре на равное им, получится шестнадцать, а это четвертое; если умножить шестнадцать на равное им, получится двести пятьдесят шесть, а это восьмое; если умножить двести пятьдесят шесть на четыре, то есть второе, получится тысяча двадцать четыре, а это десятое и так далее. Мы поступаем подобным образом со всем подобным этому: если умножить четвертое на пятое, получится девятое, так как четыре и пять — девять, если умножить восьмое на седьмое, получится пятнадцатое, если умножить первое на девятое, получится десятое, так как мы положили первое равным двум, а девятое — пятистам двенадцати¹¹. Поэтому, если умножить десятое, то есть тысячу двадцать четыре, на равное ему, получится тысяча сорок восемь тысяч пятьсот семьдесят шесть, а если вычтешь из этого единицу, останется: тысяча тысяч сорок восемь тысяч пятьсот семьдесят пять, это сумма удвоенных от единицы до двадцати. Если ты хочешь получить сумму удвоенных, которые в клетках шахмат, то умножь восьмое, то есть двести пятьдесят шесть, на равное ему, получится шестнадцатое; умножь то, что в шестнадцатой клетке, на равное этому, получится то, что в тридцать второй клетке, умножь то, что в тридцать второй клетке, на равное этому, получится то, что в шестидесяти четвертой клетке. Если, как всегда, отнять от этого единицу, то то,

что останется, — это сумма удвоенных от единицы до шестидесяти четырех, а это клетки шахмат¹². По этому правилу [можешь сосчитать] то, что ты хочешь, если пожелает Аллах.

*

ПРИМЕЧАНИЯ

- ¹ Вопрос о том, написал ли ал-Хорезми только один или два арифметических трактата, обсуждался многими историками математики. Историк науки Ибн ан-Надим (X в.) в своем «Фихристе» указал, что ал-Хорезми был автором «Книги о сложении и вычитании» (Китаб ал-джам' ва-т-тафрик), однако не в биографии ал-Хорезми, а в разделе, посвященном ученому X в. Абдаллаху ас-Саиданани, который, по словам Ибн ан-Надима, составил комментарий на эту книгу [1, с. 404]. Некоторые историки математики считали, что это тот же трактат, который сохранился в единственной рукописи Кембриджского университета и издан в русском переводе [2, с. 9—25]. Однако Р. Рашид в статье, опубликованной в этом сборнике, указал, что в алгебраическом трактате египетского математика X в. Абу Камила сохранилась цитата из арифметического трактата ал-Хорезми, отсутствующая в опубликованном трактате. Здесь публикуется перевод этого фрагмента, присланного нам Ж. Сезано, в переводе Дж. ад-Даббаха, а также фрагмент из опубликованного ранее арифметического трактата ал-Хорезми, который, несомненно, также является цитатой из другого арифметического трактата ал-Хорезми. Вопрос о втором арифметическом трактате ал-Хорезми рассматривается также в статьях А. П. Юшкевича и А. Аллара в наст. кн.
- ² Этот фрагмент приведен в опубликованном ранее арифметическом трактате ал-Хорезми [2, с. 9—11]. Приводимый нами перевод исправлен А. П. Юшкевичем по транскрипции латинского текста кембриджской рукописи, выполненной К. Фогелем [3, с. 9—11]. Пагинация приведена по кембриджской рукописи.
- ³ Ссылка ал-Хорезми на «другую книгу по арифметике», несомненно, является ссылкой на «Книгу о сложении и вычитании», так как других арифметических трактатов ал-Хорезми не писал.
- ⁴ Утверждения о том, что всякое число составлено из единиц и что единица не является числом, — известные утверждения эллинистических математиков: первое из них совпадает со вторым определением VII книги «Начал» Евклида [4, т. 2, с. 9], второе равносильно словам Аристотеля: «Наименьшее число, взятое вообще, есть двойка», — которыми начинается 12-я глава IV книги «Физики» [5, т. 3, с. 151].
- ⁵ Здесь ал-Хорезми возвращается к основному тексту своей «Книги об индийском счете».
- ⁶ Фрагмент сохранился в «Книге об алгебре и алмукабале» (Китаб ал-джабр ва-л-мукабала) Абу Камила (рукопись стамбульской библиотеки Кара Мустафа 379, л. 109 об. — 110 об.). Пагинация приведена по этой рукописи.
- ⁷ Здесь имеется в виду индийская легенда об изобретении шахмат, согласно которой изобретатель шахмат получил в награду 1 зерно пшеницы на первом поле шахматной доски, 2 — на втором, 4 — на третьем; ..., 2^{63} — на 64-м поле. Мы переводим здесь названия полей шахматной доски буйут аш-шатрандж, буквально «дома шахмат», выражением «клетки шахмат».
- ⁸ Слова «да смилостивится над ним Аллах» означают, что в то время, когда Абу Камил писал свой трактат, ал-Хорезми уже умер.
- ⁹ Здесь ал-Хорезми формулирует правило, которое можно выразить формулой $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + \dots + 2^k = 2^{k+1} - 1$.
- ¹⁰ Здесь под словами «двадцать» и «двадцать один» имеются в виду не числа 20 и 21, а числа, стоящие на 20-м и 21-м местах.

- ¹¹ «Упрощение» ал-Хорезми состоит в том, что он сопоставил геометрической прогрессии $2, 2^2, 2^3, \dots$ арифметическую прогрессию $1, 2, 3, \dots$, что, как пишет А. П. Юшкевич об аналогичном сопоставлении в книге Н. Шюке (XV в.), представляет собой «предвосхищение свойств будущих логарифмов» [6, т. 422].
- ¹² Суммирование прогрессии $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63}$ было произведено ал-Бируни в его «Памятниках минувших поколений» [7, с. 151]. Ал-Бируни назвал это вычисление «небывшим образом», что дает основание предположить его знакомство с «Книгой о сложении и вычитании» ал-Хорезми. Приведенное ал-Бируни значение суммы этой прогрессии — 18 446 744 073 709 551 615.

*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ибн ан-Надим*. Ал-Фихрист. Капр, 1929.
2. *Ал-Хорезми*. Математические трактаты/Пер. Ю. Х. Копелевич, Б. А. Розенфельда. Ташкент: Фан, 1964.
3. *Vogel K.* Mohammed ibn Musa Alchwarizmi's algorismus. Aalen, 1963.
4. *Евклид*. Начала/Пер. Д. Д. Мордухай-Болтовского. М.; Л.: ГИТТЛ, 1948—1950. Т. 1—3.
5. *Аристотель*. Сочинения/Под ред. И. Д. Рожанского. М.: Мысль, 1981. Т. 3.
6. *Юшкевич А. П.* История математики в средние века. М.: Физматгиз, 1961.
7. *Бируни*. Памятники минувших поколений.— Избр. произведения/Пер. М. А. Салье. Ташкент: Изд-во АН УзССР, 1957, т. 1.

1980б.

| ОСТРОУМНЫЕ МЫСЛИ ИЗ ДЕЙСТВИЙ МУХАММАДА ибн МУСЫ ал-ХОРЕЗМИ — ОПРЕДЕЛЕНИЕ АЗИМУТА С ПОМОЩЬЮ АСТРОЛЯБИИ ¹

Если ты хочешь определить азимут ² с помощью астролябии ³, то наблюдай Солнце в любое время, посмотри, какая высота получится и помести градус Солнца ⁴ на соответствующий ей альмукантарат ⁵. Далее посмотри, какой из линий азимутов ⁶ достигает эта высота, тогда то, что ты найдешь, и есть азимут этого часа.

Если ты хочешь определить линию меридиана ⁷, когда Солнце на юго-востоке, то из той четверти, в которой ты взял высоту, отсчитай столько же [градусов], сколько в этом азимуте, помести в это место конец алидады ⁸, сделай спинку ⁹ астролябии параллельной горизонту и поворачивай ее направо и налево до тех пор, пока тень трона ¹⁰ не попадет на спинку алидады или пока лучи не пройдут через диоптр и не попадут на линию в середине алидады. Если ты увидишь их в таком положении, то линия меридиана есть тот диаметр спинки астролябии, на котором находится подвес ¹¹.

199

Если Солнце северо-западнее, то действуй таким же образом. Однако при этом действии подвес находится с северной стороны, а при первом действии — с южной стороны.

Если Солнце на востоке или на севере, то отсчитай градусы этого азимута от другого места направо от той четверти, в которой ты берешь высоту. Пусть будет 20 [градусов] снизу в сторону подвеса. Тогда помести конец алидады на это число [градусов] и, если спинка астролябии также расположена параллельно горизонту, поворачивай ее направо и налево до тех пор, пока алидада не станет в тени трона или пока лучи не пройдут через диоптр к ее средней линии. Если будет такое положение, то линия меридиана попадет на диаметр, на котором находится подвес, когда подвес с северной стороны. Точно так же следует действовать, когда Солнце на юго-западе, однако подвес будет находиться с южной стороны.

Вопрос о том, является ли Солнце северным или южным, выясняется по дуге азимута, начинающейся от места восхождения Овна ¹², проходящей через зенит ¹³ и кончающейся в точке захождения Овна: если Солнце находится между этой дугой и центром астролябии, то оно является северным, находится ли оно на востоке или на западе; если же Солнце находится вне этой дуги — между ней и краем астролябии, то оно является южным, находится ли оно на востоке или на западе. Так обстоит дело для астролябии, в которой азимут отсчитывается от дуги азимута восхождения Овна до середины неба и до колышка земли ¹⁴ по девяноста [градусов] с обеих сторон.

Что касается астролябии, в которой отсчет начинается от линии середины неба и кончается сто восьмидесятью [градусами] на колышке земли по обе стороны, то есть на восток и на запад, то возьми то, что у тебя получилось, запомни это, отсчитай то, что ты запомнил направо от начала высоты, помести на это место алидаду и найди азимут Солнца так, как мы описали, когда Солнце является восточным независимо от того, находится ли оно на севере или на юге.

Определение широт климатов ¹⁶

- Первый климат: его широта — шестнадцать градусов.
 Второй климат: его широта — двадцать четыре градуса.
 Третий климат: его широта — тридцать градусов.
 Четвертый климат: его широта — тридцать шесть градусов.
 пятый климат: его широта — сорок один градус.
 Шестой климат: его широта — сорок пять градусов.
 Седьмой климат: его широта — сорок восемь градусов.

Широта первого климата 16, а начало Рака далеко на севере за зенитом. Если Солнце находится в первом градусе