

سلسله‌ی انتشارات انجمن آثار ملی به یادبود بنای آرامگاه خیام

(۳۸)

۶۷۵۰۶۶

حکیم عمر خیام

بعنوان

عالم جبر

مشمول بر متون و ترجمه‌ی فارسی آثار خیام در علم جبر و تحلیل

کارهای جبری وی ، با مقدمات و حواشی

با اهتمام

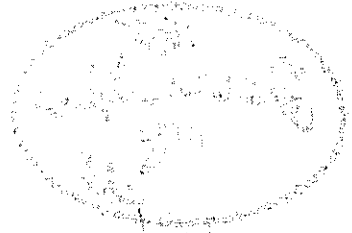
غلامحسین مصاحب

تهران ۱۳۳۹ هـ ش

QA 21
.M6H8
1339



۲۱۰۵۷۴



۱۶۰۲۱

مقاله

موضوع کتاب حاضر معرفی آثار و تحقیقات حکیم عمر خیام است در علم جبر. از خیام فعلاً دو رساله در این باب در دست داریم، یکی رساله‌ی او در علم جبر، و دیگری رساله‌ای در تحلیل یک مسئله‌ی هندسی به معادله‌ی درجه‌ی سوم و حل این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی.

محققین تاریخ علوم دقیقه رساله‌ی خیام را در جبر از شاهکارهای علمی قرون وسطی شمرده‌اند، و این نه از آنست که این رساله در بسط علم جبر تأثیری داشته، بلکه اهمیت رساله از اینست که در آن برای اول دفعه قسمتی از یکی از مباحث عمده‌ی جبر یعنی مباحث معادلات درجات اول و دوم و سوم، فی حد ذاته و قطع نظر از فواید عملی آن، منظم‌اً مورد بحث قرار میگیرد، و بعبارت مختصر و مفید ج. سارتن، محقق معروف تاریخ علوم، «خیام اول کسی است که به تحقیق منظم علمی در معادلات درجات اول و دوم و سوم پرداخته و طبقه‌بندی تحسین - آوری از این معادلات آورده است... و رساله‌ی وی در علم جبر، که مشتمل بر این تحقیقات است، معرف یک فکر منظم علمی است؛ و این رساله یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطائی و احتمالاً برجسته‌ترین آنها در این علم است.»

نگارنده که همواره شوقی به مطالعه‌ی تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی داشته‌ام، چندین سال پیش، در صدد معرفی رساله‌ی خیام در جبر به فارسی زبانان بر آمدم^۱، و بدین منظور کتابی بنام جبر و مقابله خیام پرداختم که مشتمل بود بر متن رساله‌ی خیام و ترجمه‌ی ملخصی از آن و نیز مقدماتی که در فهم جبر خیام و شناساندن ارزش

(۱) جا دارد که این صفحه را به ذکر جمیل استاد بزرگوار خود مرحوم غلامحسین رهنما مزین کنم. اولین آشنائی من با کارهای جبری خیام بوسیله‌ی نسخه‌ای بود که از روی کتاب جبر عمر خیام و بیکه برای آن مرحوم استنساخ شده بود.

علمی آن مفید و بلکه ضروری مینمود. این کتاب در سال ۱۳۱۷ هـ ش به همت آقای نصرالله سبوحی، مدیر کتابفروشی و چاپخانه‌ی مرکزی، چاپ و نشر شد، و بدین ترتیب، برای نخستین بار رساله‌ی گرانبهای خیام در دسترس فارسی زبانان قرار گرفت. این کتاب ظاهراً فعلاً کمیاب است، و در هر صورت، در سراسر آن، آثار خامیهای ایام جوانی مؤلف هویدا است، و بعضی مطالب آن شدیداً محتاج تنقیح و تجدید نظر است. در تابستان سال ۱۳۳۸، از طرف انجمن محترم آثار ملی به نگارنده تکلیف شد که کتابی در معرفی کارهای جبری خیام و بالاخص مشتمل بر متون آثار او و ترجمه‌ی فارسی آنها تهیه کنم، ولی بنده با اینکه سخت مشتاق انجام چنین خدمتی بودم، ابتداءً بجبهاتی در قبول آن تردید داشتم، ولی در این امر چنان شور و خلوص نیتی در آن انجمن دیدم که دریغ آمد باین خدمت تن درندهم. پس انجام این تکلیف را که فرصت مناسبی برای معرفی صفحات درخشانی از تاریخ علوم در دوره‌ی اسلامی بود بعهده گرفتم، و به تهیه‌ی کتاب حاضر پرداختم.



رؤوس مطالب کتاب را با نظری به فهرست مندرجات آن میتوان دریافت. بعلاوه فهرست عمومی الفبائی آخر کتاب (صص ۳۰۹ - ۳۲۴) راهنمای جامعی به مطالب کتاب است. معذک، ذکر نکاتی چند در این مقام مفید بنظر میرسد.

(۱) متون آثار خیام. آنچه از آثار خیام که در این کتاب آمده است یکی رساله‌ی اوست در علم جبر، و دیگری رساله‌ای از وی که در نسخه‌ی موجود آن عنوان خاصی ندارد، و ما برای تسهیل آنرا رساله در تحلیل يك مسئله و گاهی باختصار رساله‌ی تحلیل نامیده‌ایم، و تا حدی که اطلاع داریم اولین بار است که این رساله طبع میشود.

متن رساله‌ی خیام از روی متن وپکه، که تفصیل آن در صفحات ۱۴۱-۱۴۲ کتاب حاضر آمده است، چاپ شده است.

از رساله‌ی تحلیل تنها نسخه‌ای که بهنگام چاپ کتاب در دسترس نگارنده بود

همان بود که چندین سال پیش از روی نسخه‌ای متعلق به عباس اقبال آشتیانی استنساخ نموده بود (رجوع کنید به صفحات ۱۵۱ - ۱۵۲ کتاب حاضر)، و چون با تمام کوششی که برای یافتن نسخه‌ی اصلی بعمل آمد از آن خبری نیافت، به چاپ نسخه‌ای که خود استنساخ کرده بود مبادرت نمود. خوشبختانه در جریان طبع کتاب بتوسط آقای محمد تقی دانش پژوه اطلاع حاصل شد که نسخه‌ی اصلی رساله در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران مخزون است. پس به همت انجمن آثار ملی و مساعدت فضلی محترم، آقایان دکتر ذبیح‌الله صفا و محمد تقی دانش پژوه و دیگر اولیاء کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران عکسی از آن نسخه فراهم شد، و برای تممیم فایده در کتاب حاضر درج گردید (صص ۲۸۲ - ۲۹۲)، تا خوانندگان اصل کلام منسوب به خیام را نیز در دست داشته باشند، و بعلاوه بدین ترتیب میتوان انحرافات را که ممکن است بین متن چاپی رساله‌ی تحلیل با متن اصلی موجود باشد کشف کرد.

مطالب خارج از سخن خیام را، که به جهت در متون یا ترجمه‌های فارسی آنها درج شده، در داخل علامت «[]» قرار داده‌ایم. در متون رسایل خیام این اضافات تقریباً منحصر است به شماره‌هایی که بمنظور طبقه‌بندی مطالب مورد بحث خیام درج کرده‌ایم. در باب طبقه‌بندی مطالب اشاراتی در بند (۴) همین مقدمه آمده است. در این جا کافی است گفته شود که شماره گذاری در متون و ترجمه‌های آنها بنحوی است که فقط اولین رقم سمت چپ، که نماینده‌ی قسمتی از قسمتهای کتاب است، تفاوت میپذیرد، و بدین ترتیب، خواننده به آسانی میتواند ترجمه‌ی هر فصل یا جزئی از متون خیام را به آسانی پیدا کند. مثلاً مطلبی که در قسمت اول تحت شماره‌ی ۱۰۸۰۴۰۱ آمده ترجمه‌ی آن در قسمت پنجم تحت شماره‌ی ۵۰۸۰۴۰۱ مضبوط است.

در شکلهای رسائل خیام، برای تسهیل کار، هم حروف عربی را بر طبق متون وی قرار داده‌ایم، و هم حروف الفبای لاتینی را. تناظر حروف دو الفبا مستخرج است

از تناظری که ریاضیون دوره‌ی اسلامی در نقل شکل‌های آثار یونانی به عربی تثبیت کرده بودند، از این قرار

ا	ب	ج	د	ه	و	ز	ح	
A	B	C	D	E	W	Z	H	
ط	ی	ک	ل	م	ن	س	ع	ف
T	I	K	L	M	N	S	O	F

(۲) ترجمه‌ی فارسی رسائل خیام . برای اینکه خوانندگان ناآشنا به زبان عربی از استفاده از رسائل خیام محروم نمانند، ترجمه‌ی فارسی هر دو رساله‌ی جبری وی در کتاب حاضر آمده است (صص ۱۵۹-۲۵۰ و ۲۵۲-۲۷۹).

در این باب باید به اطلاع خوانندگان برساند که در کتاب جبر و مقابله خیام که سابقاً بتوسط نگارنده تهیه شده بود، از ترجمه کردن تمام جبر خیام خودداری کرده بودیم، و فقط قسمت‌های اساسی آنرا که مبین فکر ریاضی خیام است به فارسی برگردانیده بودیم، و مباحث حل معادلات که در رساله‌ی خیام بسیار طولانی است با استفاده از زبان امروز جبر تلخیص شده بود. حسن این طریقه اینست که خواننده، بی آنکه گرفتار بحث‌های خیام - که بعلت بیخبری وی از فواید استعمال حروف و علامات بسیار طولانی و ملال انگیز است - شود، روش عمومی او را در حل و بحث معادلات درمی‌یابد. از طرف دیگر، طریقه‌ی مذکور مشکلاتی را که خیام و دیگر ریاضیون قدیم با آنها مواجه بوده‌اند پوشیده میدارد، و در نتیجه، ممکن است ارزش پیشرفت‌ها و موفقیت‌های ایشان را کمتر از آنچه هست جلوه دهد. بنابراین، در کتاب حاضر، هر دو اثر خیام را تماماً به فارسی نقل کرده‌ایم (قسمت‌های پنجم و ششم کتاب). در ترجمه‌ی رسائل خیام به فارسی، منت‌های کوشش بعمل آمده‌است که عبارات فارسی معانی متون را - آنچنانکه مترجم فهمیده است - برساند، و هر جا مطلبی بر وی مبهم بوده یا آنچه او فهمیده با ترجمه‌های فرانسوی و انگلیسی جبر خیام اختلافی دارد صریحاً ذکر کرده است. خلاصه اینکه در نقل متون خیام به فارسی، تا آنجا که

بر مترجم ممکن بوده امانت را زعایت کرده است، ولی از ترجمه‌ی تحت‌اللفظ احتراز نموده.

در مواردی، برای آسان کردن فهم مطالب یا طبقه‌بندی آنها، عباراتی به ترجمه‌ی کلام خیام اضافه نموده است، ولی این اضافات را در داخل علامت « [] » درج کرده است. بالاخص، عناوین مطالب در ترجمه‌ها از این جمله است، و چنانکه گفته شد، تناظر شماره‌های مطالب متون و ترجمه‌های آثار خیام موجب تسهیل کار مراجعه‌کننده خواهد بود. و البته اضافات مختصر مذکور غیر از حواشی مفصلی است که در ذیل قسمتهای پنجم و ششم کتاب برای توضیح مطالب خیام آورده است. بالاخره، چون ممکن است کسانی فقط خواستار اطلاع مجملی از کارهای جبری خیام و ارزش آنها باشند، ولی مجال مطالعه‌ی آثار او را نداشته باشند، در قسمت چهارم کتاب تحلیلی از کارهای خیام در جبر و از رسائل وی به زبان کنونی ریاضیات آورده‌ایم که از شاخ و برگهای ملال‌انگیز و درازی سخن که لازمه‌ی جبر لفظی است پیراسته است.

(۳) مطالب تاریخی کتاب. برای اینکه اهمیت تحقیقات خیام در حل معادلات جبری چنانکه شاید معلوم شود، کافی نیست که تنها کتاب او مورد تحلیل و بررسی قرار گیرد، بلکه باید محل وی و کارهای او در تاریخ ریاضیات، و بالاخص در تاریخ علم جبر، معلوم شود، و این امر مستلزم اینست که نظری به بسط این علم تا زمان خیام بیفکنیم، و اگر طالب تحقیق جامعتری باشیم، اقتصار به زمان خیام هم کافی نیست، و باید لااقل به آغاز پیدایش روشهای جدید جبر، که این علم را بکلی از حالت رکود و سترونی خارج ساخته به یک علم بالان (یا، باصطلاح فرنگی، دینامیک) ارتقا داد نیز نظر افکند.

استقصاء در تاریخ جبر خود موضوع کتابها است، و طالبین آن باید به کتابهایی که محققین و متخصصین فن در این باب تألیف و تصنیف کرده‌اند مراجعه نمایند. آنچه از این موضوع جالب که برای معرفی مقام خیام در علم جبر مفید و شاید ضروری

است با کمال ایجاز در قسمت سوم کتاب حاضر (صص ۷۷ - ۱۲۸) آمده است. ضمناً در این باب توجه خوانندگان را باین نکته جلب میکنیم که، در قسمت مذکور، هدف نوشتن تراجم احوال اشخاص نبوده است، و چون در این باب در اول صفحی ۹۶ کتاب توضیحی داده‌ایم مطلب را مکرر نمیکنیم.

(۴) طبقه‌بندی و شماره‌گذاری. برای تسهیل ارجاع، مطالب کتاب را بر حسب تقسیمات جزء آنها طبقه‌بندی و شماره‌گذاری کرده‌ایم. به قسمتهای ششگانه‌ی کتاب بترتیب شماره‌های ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ۵ و ۶ داده شده است. هر يك از قسمتهای ششگانه، در تقسیم اول، به چند قسمت جزء اصلی (مثلاً «فصول») تقسیم میشود، و این قسمتهای جزء با افزودن رقمی در سمت راست رقم نماینده‌ی قسمت اولیه مشخص میگردد، و هکذا. مثلاً قسمت سوم کتاب (شماره‌ی ۳) مشتمل بر هفت قسمت جزء است، که ششمین آنها (شماره‌ی ۳۰۶) در باب معادلات جبری است (صفحات ۱۱۰ - ۱۲۱)، و این قسمت جزء (یعنی ۳۰۶) خود مشتمل بر چند قسمت جزء است، که فی‌المثل چهارمین آنها (شماره‌ی ۳۰۶۰۴) در باب جمل معادله (ص ۱۱۲) و هشتمین آنها (شماره‌ی ۳۰۶۰۸) در باب دستگاههای چند مجهولی است، و هکذا. چنانکه در بند (۱) این مقدمه گفته شد، تناظر تقسیمات متون آثار خیام و ترجمه‌های آنها کار مراجعه‌کننده را بسیار آسان میکند.

(۵) توجه به نکات ذیل برای تسهیل کار نقادان - هم آنانکه با سعده صدر و اطلاع کافی بخود زحمت بررسی موضوعی را که نقادی میکنند میدهند، و هم نقادان مزدور و حرفه‌ای - خالی از فایده نیست.

(الف) در متن و حواشی کتاب (نه در شماره‌های ترتیب صفحات) رقم صفر به صورت ۰ (و گاهی بعلت نبودن وسیله، به علامت 0 و 0) ضبط شده است تا از نقطه متمایز باشد. ضرورت استعمال علامت متمایز برای صفر و نقطه و پنج بر هر کس که با رقم سر و کار دارد، یا لافل از مفهوم عدد و مقدار خبری دارد، آشکار است، و برای ریاضیدان از بدیهیات اولیه.

(ب) کلمه‌ی «ابن» در این کتاب همه‌جا بهمین صورت ضبط شده مگر استثناء در نقل عبارت دیگران.

(ج) در این کتاب «کسره‌ی اضافه» بعد از هاء غیر ملفوظ همانطور که تلفظ میشود نوشته شده (مانند «کسره‌ی بجای کسره» و «بوسیله‌ی بجای بوسیله»). در این باب نگارنده با عده‌ای که برهاتی جز فحش و ناسزا دارند صحبت کرده است، و دلیلی جز اینکه چون صورت «بوسیله» و امثال آن رسم الخط معمول بوده و لهذا باید آنرا حفظ کرد نشنیده است، ولی کسانی که این عقیده را دارند نتوانسته‌اند بگویند که چرا در مورد «خانه‌ای» یا «خانهدی» احترام رسم الخط قدیم رعایت نمیشود، و نتوانسته‌اند بگویند که چرا از بین تمام علامات صرف کلمات فارسی فقط باید کردن این یاء بیچاره را شکست. اگر سری به مدارس ابتدائی بزنند ملاحظه خواهند فرمود که اطفال ما «خانه‌ی حسن» را «خانه حسن» میخوانند، و اگر هم مواجه با علامت «ء» فوقانی شوند متحیر میشوند که چرا این علامت «همزه» را باید «ی» بخوانند. و نیز اگر دقیقترین و صحیحترین کتابها را از حیث چاپ ملاحظه فرمایند مشاهده خواهند فرمود که در کمتر موردی علامت «ء» فوقانی ضبط میشود. البته میشود گفت که چشم معلم و شاگرد و حروفچین و مصحح و خواننده همه کور شود، و درست‌یاد بدهند و درست‌یاد بگیرند و درست بچینند و درست تصحیح کنند و درست بخوانند، ولی آیا سزاوار نیست که بجای کور کردن این همه چشم از دیگران، چشمهای خود را باز کنیم و انصاف را حکم قرار دهیم، و «کسره‌ی اضافه» را در مورد مورد بحث همانطور که تلفظ میشود بنویسیم؟

(د) ما را از استعمال ارقام رومی به همان طریق که در نزد مردم مغرب زمین مرسوم است هیچگونه باکی نیست، و مثلا بجای «صلاح‌الدین یوسف اول» نوشته‌ایم «صلاح‌الدین یوسف I» (ذیل صفحه‌ی ۱۵۵).

(۵) علامات اختصاری کہ در کتاب حاضر بکار رفته بہ شرح ذیل است :

ص	صفحه	صص	صفحات
ھق	ھجری قمری	ق م	قبل از میلاد (مسیح)
ھش	ھجری شمسی	ب م	بعد از میلاد (مسیح) .



امیدواریم مقدمات و حواشی و تعلیقاتی کہ در این کتاب آورده ایم خوانندگان را در شناختن مقام خیام و ارزش تحقیقات او در علم جبر و مبانی کارهای وی در این علم یاری کند .

در تهیهی این کتاب جمعی از بزرگان و دوستان پیوستہ مشوق نگارندہ بوده اند یا از جہاتی وی را یاری کردہ اند ، و تشکر از مساعدتہای ایشان بر بندہ فرض است . در تمام مدت تہید و چاپ کتاب ، انجمن آثار ملی در فراہم ساختن وسایل کار با کمال خلوص نیت اقدام نمود ، و نگارندہ ، علاوہ بر عرض تشکر از سہمی کہ از مزایای کومکہای آن انجمن بردہ ام ، از خداوند متعال مسئلت میکنم کہ انجمن را در زندہ کردن آثار علمی گذشتگان ما ، کہ بقول تیمسار سپہبد فرج اللہ آقاولی ، رئیس محترم ہیئت مدیرہی انجمن ، بیش از پیش مورد توجہ انجمن واقع شدہ است ، موفق فرماید .

استاد علامہ ، جناب آقای سید حسن تقی زادہ ، کہ هموارہ مشوق بندہ در کارهای علمی بودہ اند ، قسمتہای سوم و چہارم کتاب را از نظر گذرانیدہ نکات مہمی را بہ نگارندہ تذکر دادند کہ در تنقیح مطالب کتاب بسیار مؤثر بودہ است ، و بدین وسیلہ تشکرات خالصانہی خود را بہ محضر دانشپرور ایشان تقدیم میکنم . از مساعدتہای برادر ارجمند آقای محمود مصاحب و دوست گرام آقای احمد بطحائی در مقابلہی کتاب صمیمانہ تشکر میکنم . بالاخرہ ، از متصدیان چاپخانہی

بهمن - مخصوصاً آقای محمود مطیر ، مدیر چاپخانه ، و آقای عباس تقی زادگان ، مسئول شعبه‌ی حرفه‌چینی - که در حدود وسایل موجود در خوبی چاپ کتاب بذل جهد نموده‌اند سپاسگزاری مینمایم .

غلامحسین مصاحب

تهران

آزماء ۱۳۳۹ هجری شمسی

فهرست مندرجات

۱. قسمت اول

صفحه

۵۶ - ۷

رساله‌ی جبر خیام (متن)

۲. قسمت دوم

۷۴ - ۵۹

متن رساله‌ی خیام در تحلیل يك مسئله (متن)

۳. قسمت سوم

نظر اجمالی به تاریخ علم جبر از ایام قدیم
تا زمان خیام

۸۰ - ۷۷

§ ۳۰۱ ملاحظات کلی و مقدماتی

۹۲ - ۸۰

§ ۳۰۲ جبر در یونان

۹۵ - ۹۲

§ ۳۰۳ جبر در هند

۱۰۷ - ۹۵

§ ۳۰۴ جبر در دوره‌ی اسلامی

۱۱۰ - ۱۰۷

§ ۳۰۵ تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی

۱۲۱ - ۱۱۰

§ ۳۰۶ معادلات جبری

۱۲۸ - ۱۲۱

§ ۳۰۷ معادلات درجده‌ی سوم و درجات بالاتر

۴. قسمت چهارم

ملاحظات کلی در باب کارهای جبری خیام

۱۳۲ - ۱۳۰

§ ۴۰۱ خیام و آثار ریاضی او

۱۳۸ - ۱۳۳

§ ۴۰۲ خیام بعنوان عالم جبر

۱۵۰ - ۱۳۸

§ ۴۰۳ جبر خیام

- ۴۰۴ § رساله در تحلیل يك مسئله ۱۵۱ - ۱۵۰
- ۴۰۵ § اصطلاحات ریاضی خیام ۱۵۷ - ۱۵۰

۵. قسمت پنجم

رساله‌ی جبر خیام (ترجمه‌ی فارسی)

- مقدمه ۱۵۹ - ۱۶۱
- ۵۰۱ § تعریفات و اصطلاحات ۱۶۱ - ۱۶۵
- ۵۰۲ § طبقه بندی معادلات ۱۶۶ - ۱۷۰
- ۵۰۳ § حل مفردات ۱۷۰ - ۱۷۴
- ۵۰۴ § معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم ۱۷۴ - ۱۸۳
- ۵۰۵ § مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم قابل تحویل به درجه‌ی دوم ۱۸۳ - ۱۸۷
- ۵۰۶ § مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم ۱۸۷ - ۱۹۳
- ۵۰۷ § مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم ۱۹۳ - ۲۰۹
- ۵۰۸ § مقترنات چهارتائی سه با يك ۲۰۹ - ۲۲۱
- ۵۰۹ § مقترنات چهارتائی دو با دو ۲۲۱ - ۲۳۳
- ۵۰۱۰ § معادلات کسری ۲۳۳ - ۲۴۱
- ۵۰۱۱ § نقد کارهای ابوالجود ۲۴۱ - ۲۵۰

۶. قسمت ششم

رساله در تحلیل يك مسئله (ترجمه‌ی فارسی)

- ۶۰۱ § طرح مسئله ۲۵۰ - ۲۵۵
- ۶۰۲ § تحلیل مسئله به مثلث معین ۲۵۷ - ۲۵۰

۲۵۷ - ۲۶۲	§ ۶۰۳ خواص مثلث معین و معادله‌ی حل آن
۲۶۲ - ۲۶۹	§ ۶۰۴ کلیاتی در باب معادلات
۲۶۹ - ۲۷۳	§ ۶۰۵ حل معادله‌ی مثلث معین
۲۷۳ - ۲۷۷	§ ۶۰۶ حل مسئله‌ی ۶۰۱ §
۲۷۸	§ ۶۰۷ در محاسبه‌ی مقدار تقریبی جواب
۲۷۹	(پایان رساله)
۲۸۰	مسئله
۲۸۲ - ۲۹۲	عکس رساله‌ی خیام در تحلیل يك مسئله

۲۹۳ - ۳۰۳	مباحثات
۳۰۴ - ۳۰۷	ماخذ
۳۰۹ - ۳۲۴	فهرست عمومی الفبائی

غلطنامه

رقم واقع در طرف راست علامت « : » شماره‌ی صفحه و رقم طرف چپ شماره‌ی سطور است. شماره‌ی سطور اگر با « - » همراه باشد از سطر آخر متن صفحه بی‌الا و اگر با « ذ » همراه باشد از سطر آخر ذیل بی‌الا و اگر با « ذ » همراه باشد از سطر اول ذیل بی‌این شمرده میشود.

عبارت طرف راست علامت « / » غلط و عبارت طرف چپ صحیح است.

تحریر کتاب است ،	نبع / نبغ	۳ : ۷ -
و تاریخ چاپ ظاهراً	الزویا / الزویا	۳ : ۱۶ -
۱۳۲۱ هـ ق میباشد .	الاحذار / الاجذار	۱ : ۱۸ -
کره / کره	بهج / بهج	۲ : ۳۴
۸۳۲ / ۸۳۵	رجوک / رجوع	۱ : ۵۶ ذ
۴ : ۱۹۳	ك م / م ب	۹ : ۷۲
- $\frac{a}{b}$ / - $\frac{a}{q}$	العائیه / العایقه	۵ : ۷۳ -
ابوالجو / ابوالجو	کوتس / کوچ که در	۴ / ۱۰۱ ذ
فاصله‌ی اول سطر زاید	آنجا نامش « کوتش »	۴ : ۲۹۹ ذ
است .	ضبط شده	
	تاریخ ۱۳۱۸ تاریخ اتمام	۴ : ۱۲۲ ذ

قسمت اول

رساله‌ی جبر خیام

(متن)

شرکت چاپ بهمن

تهران ، ۱۳۳۹

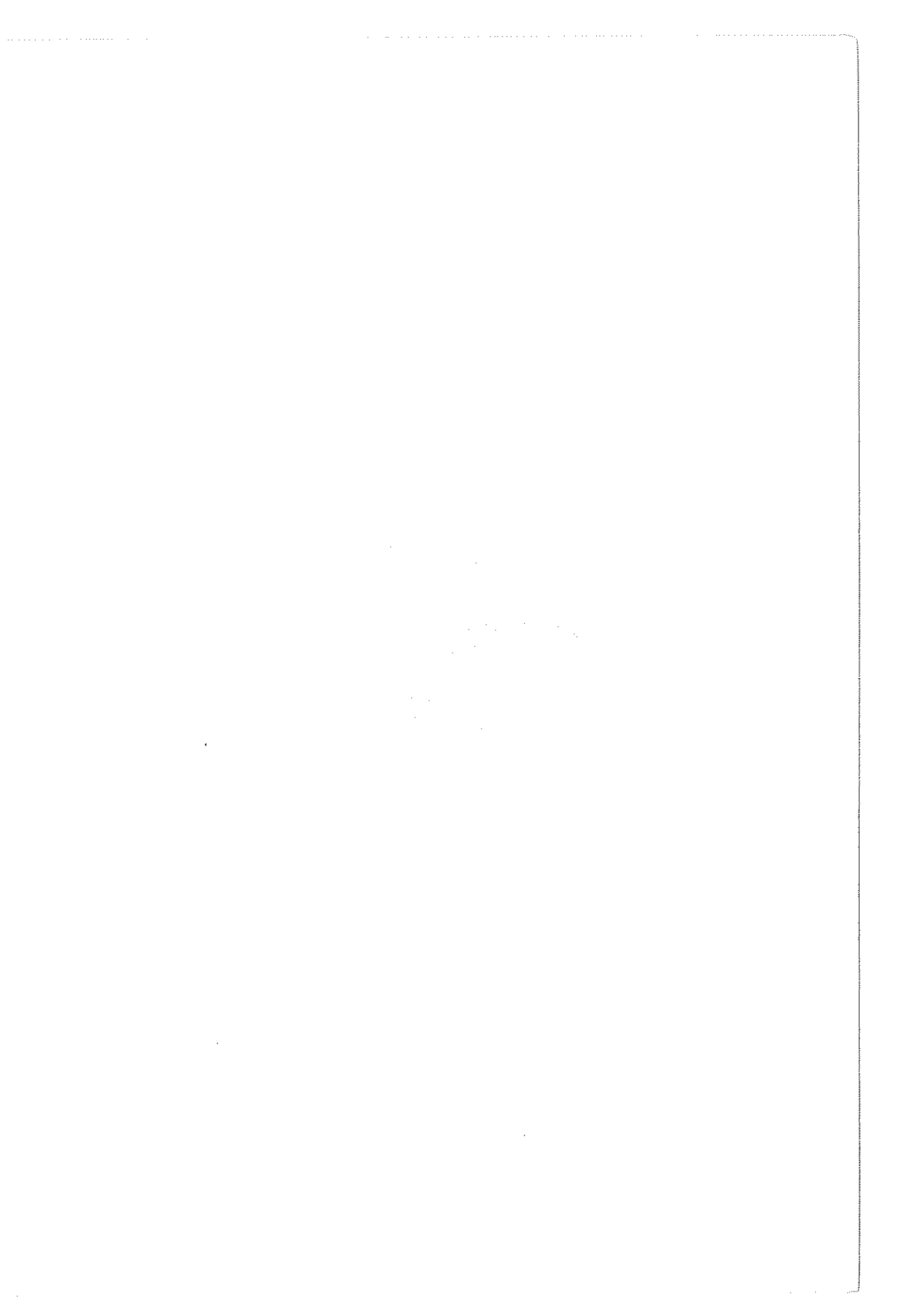
1. 2022
2. 2023
(13)

2022-2023
13/11/2022

رسالة

في براهين الجبر والمقابلة

لعمري الخيامي



مقالة
فى الجبر و المقابلة
للحكيم الاوحد
ابى الفتح عمر بن ابراهيم
الخيامى

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes the need for transparency and accountability in financial reporting.

2. The second part of the document outlines the various methods and techniques used to collect and analyze data. It includes a detailed description of the experimental procedures and the statistical analysis performed.

3. The third part of the document presents the results of the study, including a comparison of the different methods and techniques used. It discusses the strengths and weaknesses of each method and provides a summary of the findings.

4. The fourth part of the document discusses the implications of the study and provides recommendations for future research. It highlights the need for further investigation into the effectiveness of the different methods and techniques used.

رسالة الحكيم الفاضل

غياث الدين ابي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي النيشابوري

قدس الله روحه العزيز

في البراهين على مسائل الجبر والمقابلة

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

الحمد لله رب العالمين والعاقة للمتقين ولا عدوان الا على الظالمين والصلوة على
الانبياء و خصوصاً على محمد و آله الطاهرين اجمعين ان احد المعاني التعليميّة
المحتاج اليها في جزء الحكمة المعروف بالرياضي هو صناعة الجبر والمقابلة الموضوعه
لاستخراج المجهولات العددية و المساحيه و ان فيها اصنافاً يحتاج فيها الى اصناف
من المقدمات معتاصه جداً فتعدّر حلّها على اكثر الناظرين فيها اما المتقدمون فلم يضل
الينا منهم كلام فيها لعلمهم لم يتفطنوا لها بعد الطلب و النظر او لم يضطرّ البحث اياهم
الى النظر فيها اولم ينقل الى لساننا كلامهم فيها و اما المتأخرون فقد عنّ للماهاني منهم
تحليل المقدمة التي استعملها ارشميدس مسلمة في الشكل الرابع من المقالة الثانية من
كتابه في الكرة والاسطوانة بالجبر فتأدى الى كعاب و اموال و اعداد متعادلة فلم يتفق
له حلّها بعد ان افكر فيها ملياً فجزم القضاء بانه ممتنع حتى نبع ابو جعفر الخازن
و حلها بالقطوع المخروطية ثم افتقر بعده جماعة من المهندسين الى عدّة اصناف منها
فبعضهم حل البعض و ليس لواحد منهم في تعديد اصنافها و تحصيل انواع كل صنف

منها والبرهان عليها كلامٌ يُعتدُّ به الا على صنفين ساذكرهما و انى لم ازل كنت شديد الحرص على تحقيق جميع اصنافها و تمييز الممكن من الممتنع فى انواع كل صنف ببراهين لمعرفتى بان الحاجة اليها فى مشكلات المسائل ماسة جداً و لم اتمكن من التجرد لتحصيل هذا الخبر و المواظبة على الفكر فيه لاعتراض ما كان يعوقنى عنه من صروف الزمان فانا قد منينا بانقراض اهل العلم الاعصابة قليلى العدد كثيرى المحن همهم افتراض (*) غفلات الزمان ليتفرغوا فى اثنائها الى تحقيق و ايقان علم و اكثر المتشبهين بالحكماء فى زماننا هذا يلبسون الحق بالباطل و لا يتجاوزون حدّ التديس و الترائى بالمعرفة و لا ينفقون القدر الذى يعرفونه من العلوم الا فى اغراض بدنية خسيصة و ان شاهدوا انساناً معيناً يطلب الحق و ايثار الصدق مجتهداً فى رفض الباطل و الزور و ترك المراياة و الخداع استخفوه و سخروا منه و الله المستعان على كل حال و اليد المفرع

و لما من الله تعالى على بالانقطاع الى جناب سيدنا الاجل الاوحد قاضى القضاة الامام السيد ابى طاهر ادام الله علاه و كبت حسدته و اعداءه بعد اليأس من مشاهدة كامل مثله فى كل فضيلة عملية و نظرية و جمع بين انفاذ فى العلوم و تثبت فى الاعمال و طلب الخير لكل واحد من ذى جنسه فانشرح بمشاهدته صدرى و ارتفع بمصاحبته ذكرى و عظم بالاقتباس من انواره امرى و اشتدّ بآلائه و نعمه ازرى فلم اجد بدا من ان انحو نحو تلافى ما فوتنيه ريب الزمان من تلخيص ما اتحققه من لباب المعانى الحكيمية تقربا الى مجلسه الرفيع و ابتدأت بتعديد هذه الاصناف من المقدمات الجبرية اذ الرياضيات اولى بالتقديم و اعتصمت بجبل التوفيق من الله تعالى راجياً منه ان يوفقنى لاتباع هذا بتحقيق ما انتهى اليه بحثى و بحث من تقدمنى من العلوم التى هى اهم من غيرها متمسكا بالعروة الوثقى من عصمته انه ولى الاجابة و عليه التكلان فى كل حال

[§١٠١٠١] اقول بعون الله و حسن توفيقه ان صناعة الجبر و المقابلة صناعة علمية موضوعها العدد المطلق و المقادير الممسوحة من حيث هى مجهولة و مضافة الى

(*) در نسخه ي ليدن (§٤٠٣٠٢٠١) چنين است . در متن وبكه (§٤٠٣٠٢٠١)

بجای «همهم افتراض» عبارت «فهمهم افتراض» انتخاب شده است .

شيء معلوم به يمكن استخراجها وذلك الشيء اما كميّة واما نسبة على وجه لا يشار كها فيه غيرها و يدلّك عليه تصفحها و مطلوبها العوارض التي تلحق موضوعها بما هو موضوع لها بالصفة المذكورة و تمامها الوقوف على الطرق التعليمية التي تنفطن بها لهذا النوع المذكور من استخراج المجهولات العددية او المساحية [§ ١٠١٠٢] و المقادير هي الكمية المتصلة و هي اربعة الخط و السطح و الجسم و الزمان على ما هو مذكور مجملا في فاطيغورياس و مفصلا في الحكمة الاولى و قوم يعدون المكان نوعاً قسيماً للسطح تحت جنس المتصل و التحقيق يبطل عليهم هذا الرأى و تصحح ان المكان هو سطح بحال و موضع تحقيقه غير ما نحن فيه ولم تجر العادة بذكر الزمان في موضوعات مسائل الجبر و لو ذكر لجاز

[§ ١٠١٠٣] و عادة الجبريين ان يسموا في صناعتهم المجهول الذي يراد استخراج شئاً و مضروبه في مثله مالا و مضروب ماله فيه كعباً و مضروب ماله في مثله مال مال و مضروب كعبه في ماله مال كعب و مضروب كعبه في مثله كعب كعب و على هذا القياس بالغاً ما بلغ و معلوم من كتاب اقليدس في الاصول ان هذه المراتب كلها متناسبة اعنى نسبة الواحد الى الجذر كنسبة الجذر الى المال و كنسبة المال الى الكعب فيكون نسبة العدد الى الجذور كنسبة الجذور الى الاموال و كنسبة الاموال الى الكعاب و كنسبة الكعاب الى اموال المال بالغاً ما بلغ

[§ ١٠١٠٤] و يجب ان يتحقق ان هذه الرسالة لا يفهمها الا من يكون متقناً لكتاب اقليدس في الاصول و كتابه في المعطيات و مقالاتين من كتاب ابلونيوس في المخروطات و ان من سدّ عنه معرفة واحد من هذه الثلاثة فلا سبيل له الى تحقيقها ولقد تكلفت الا احيل في هذه الرسالة الا على هذه الكتب الثلاثة

[§ ١٠١٠٥] و استخراجات الجبر انما تتم بالمعادلة اعنى بمعادلة هذه المراتب بعضها ببعض على ما هو مشهور و اذا استعمل الجبرى مال المال في المساحات فان ذلك على سبيل المجاز لا على سبيل التحقيق اذ محال ان يكون في المقادير مال المال والذي يقع في المقادير هو البعد الواحد و هو الجذر او الضلع اذا اصنّف الى مرّبعه

ثم البعدان و هو السطح و المال في المقادير هو السطح المربع ثم الثلاثة الابعاد و هو الجسم و المكعب في المقادير هو الجسم الذي يحيط به ست مربعات و اذا لا بعد آخر فلا يقع فيها مال المال فضلا عما فوقه و اذا قيل مال المال في المقادير فانما يقال ذلك لعدد اجزائها عند المساحة لا لذواتها ممسوحة و بينهما فرق فمال المال لا يقع في المقادير لا بالذات و لا بالعرض وليس كالزوج و الفرد فانهما يقعان فيها بالعرض بحسب العدد الذي ينفصل به اتصالها

[§١٠١٠٦] و الذي في كتب الجبريين من هذه المعادلات الاربعة الهندسية اعني الاعداد المطلقة و الاضلاع و المربعات و المكعبات هو ثلاث معادلات بين العدد و الاضلاع و الاموال و اما نحن فسنأتي بالطرق التي بها يمكن ان يستخرج المجهول بالمعادلة بين اربع مراتب التي قلنا انها لا يمكن ان يقع اكثر منها في المقادير اعني العدد و الشيء و المال و الكعب

و ما يمكن ان يبرهن عليه بخواص الدائرة اعني بكتابي اقليدس في الاصول و في المعطيات يبرهن عليه و يباليغ في التسهيل و ما لا يمكن الا بخواص القطوع المخروطية فيبرهن عليه بما في مقالتي من المخروطات و اما البرهان على هذه الاصناف اذا كان موضوع المسئلة عددا مطلقا فلا يمكننا و لا لواحد من اصحاب الصناعة و لعل غيرنا ممن يأتي بعدنا يعرفه الا في الثلاثة المراتب الاولى و هي العدد و الشيء و المال و ربما اشيرالي براهين عديدة على ما يمكن البرهان عليه من كتاب اقليدس و اعلم ان البرهان على هذه الطرق بالهندسة لا يجزى عن البرهان عليها بالعدد اذا كان الموضوع عددا لا مقدارا ممسوحا الا ترى ان اقليدس قد برهن على مطلوبات نسبية مقدارية في خامسة كتابه ثم استأنف البرهان على تلك المطلوبات النسبية بعينها اذا كان موضوعها عددا في سابعة كتابه

[§١٠٢٠١] و المعادلات بين هذه الاربعة اما مفردات و اما مقترنات [§١٠٢٠٢]

والمفردات ستة اصناف

د جذور تعدل مالا

آ عدد يعدل جذرا

بَ عدد يعدل مالا هـ أموال تعدل كعبا
 جَ عدد يعدل كعبا و جذور تعدل كعبا
 و ثلاثة من هذه الاصناف الستة مذكورة في كتب الجبرين قالوا نسبة الشيء الى المال كنسبة المال الى الكعب فيلزم ان يكون معادلة المال للكعب كمعادلة الشيء للمال وكذلك نسبة العدد الى المال كنسبة الجذر الى الكعب ولم يبرهنوا عليه من الهندسة و اما العدد الذي يكون عديلا للمكعب فلا سبيل لنا الى استخراج ضلعه الا بالاستقراء من حيث العدد و اما من حيث الهندسة فلا ينحل الا بالقطع المخروطية .
 [§ ١٠٢٠٣] واما المقترنات فمنها ثلاثية و منها رباعية [§ ١٠٢٠٣٠١] اما الثلاثية فاثنا عشر صنفاً فالثلاثة الاولى منها

آ مال و جذر يعدل عددا بَ مال و عدد يعدل جذرا
 جَ جذر و عدد يعدل مالا

و هذه الثلاثة مذكورة في كتب الجبرين و مبرهن عليها من جهة الهندسة و اما من جهة العدد فلا [§ ١٠٢٠٣٠٢] و الثلاثة الثانية منها
 آ كعب و مال يعدل جذرا بَ كعب و جذر يعدل مالا
 جَ جذر و مال يعدل كعبا

فالجبريون قالوا ان هذه الثلاثة الثانية مناسبة للثلاثة الاولى كل واحد لنظيره اعنى ان يكون كعب و جذر يعدل مالا في قوة مال و عدد يعدل جذرا و الباقيان كذلك و لم يبرهنوا عليها اذا كان موضوع المسائل ممسوحات و اما اذا كان موضوع المسائل عدداً فذلك ظاهر من كتاب الاصول و سا برهن على الهندسي منها [§ ١٠٢٠٣٠٣] و الستة الباقية من الاصناف الاثنا عشر

آ كعب و جذر يعدل عددا دَ كعب و مال يعدل عددا
 بَ كعب و عدد يعدل جذرا هـ كعب و عدد يعدل مالا
 جَ عدد و جذر يعدل كعبا و عدد و مال يعدل كعبا
 و هذه الستة الاصناف لم يوجد في كتبهم منها شيء الا الكلام في واحد منها

مبتراً و سايئتها و ابرهن عليها من جهة الهندسة لا من جهة العدد و البرهان على هذه الستة لا يمكن الا بخواص القطوع المخروطية [§ ١٠٢٠٤] و اما المقترنات الرباعية فقسمان [§ ١٠٢٠٤٠١] احد هما و هو الاول ما يكون فيه ثلاث مراتب معادلة لواحدة و هو اربعة اصناف

آ كعب و مال و جذر يعدل عددا ج كعب و جذر و عدد يعدل مالا
ب كعب و مال و عدد يعدل جذرا د كعب يعدل جذرا و مالا و عددا

[§ ١٠٢٠٤٠٢] و القسم الثاني هو ما يكون فيه مرتبتان معادلتين للثنتين و هو

ثلاثة اصناف

آ كعب و مال يعدل جذرا و عددا ب كعب و جذر يعدل مالا و عددا
ج كعب و عدد يعدل جذرا و مالا

[§ ١٠٢٠٤٠٣] فهذه هي الاصناف السبعة الرباعية و لا سبيل لنا الى تحليل شيء

منها بالهندسة اما من تقدمنا فقد اضطر واحد منهم الى نوع من انواع صنف واحد سا ذكره و البرهان على هذه الاصناف لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية [§ ١٠٢٠٥] و سنأتى بواحد واحد من هذه الاصناف الخمسة والعشرين و نبرهن عليه مستعينين بالله انه من توكل عليه مخلصا هداه و كفاه

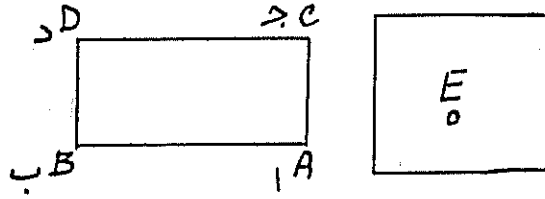
[§ ١٠٣٠١] فالصنف الاول من المفردات جذر يعدل عددا فيكون الجذر

معلوما باضطرار و حكمها في العدد و المساحات واحد

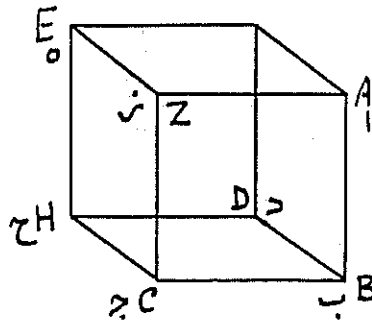
[§ ١٠٣٠٢] و الصنف الثاني عدد يعدل مالا فيكون المال العددي معلوما

لمعادلته العدد المعلوم و لا سبيل الى معرفة جذره بالعدد الا بالاستقرآء فان من يعلم ان جذر خمسة و عشرين هو خمسة فانما يعلمه بالاستقرآء لا بالقانون الصناعي فلا نلتفت فيه الى قول المتخلفين من اهل هذه الصناعة و للهند طرق في استخراج اضلاع المربعات و المكعبات مبنية على استقرآء قليل و هو معرفة مربعات الصور التسعة اعنى مربع الواحد و الاثنين و الثلاثة و كذلك مضروب بعضها في بعض اعنى مضروب الاثنين في الثلاثة و نحوها و لنا كتاب في البرهان على صحة تلك الطرق و تأديتها

الى المطلوبات و قد غزرنا انواعها اعنى من استخراج اضلاع مال المال و مال الكعب و كعب الكعب بالغاما بلغ و لم يسبق اليه و تلك البراهين انما هي براهين عددية مبنية على عدديات كتاب الا سطقسات و البرهان على الصنف الثانى بالهندسة هو هكذا نضع خط اب مفروضا مساويا للعدد المفروض و اج واحدا و يكون عمودا على



اب و تتم سطح اد فمعلوم ان مساحة سطح اد يكون ذلك العدد المفروض فنعمل سطحا مربعا مساويا لسطح اد و هو مربع ه كما بينه اقليدس فى شكل يد من مقالة ب من كتابه فمربع ه يكون مثل العدد المفروض و يكون معلوما و ضلعه ايضا يكون معلوما تأمل البرهان الذى أتى به عليه اقليدس و ذلك المراد [§ ١٠٣٠٣] و كلما قلنا عدد يساوى سطحا فى هذه الرسالة فانا نعنى بالعدد هناك سطحا قائم الزوايا احد ضلعيه واحد والثانى خط مساو للعدد المفروض بالمساحة و كل واحد من اجزاء مساحته مساو للضلع الثانى اعنى به الذى فرضناه واحد [§ ١٠٣٠٤] و الصنف الثالث عدد يعدل مكعبا فاذا كان الموضوع عددا

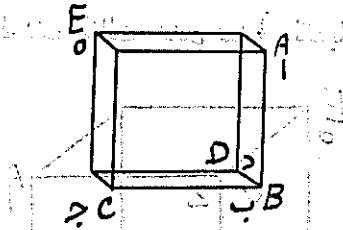


فيكون المكعب معلوما ولا سبيل الى استخراج ضلعه الا بالاستقرآء وكذلك فى

جميع المراتب العددية من مال المال و مال الكعب و كعب الكعب كما ذكرناه آنفا
 واما بالهندسة فانا نضع مربع اذ مربع الواحد اعنى ان يكون اب مثل يد و كل
 واحد منهما يفرض واحدا ثم نقيم على سطح اذ على نقطة ب منه عمود بجز و نجعله
 مساويا للعدد المفروض كما بينه اقليدس في القول الخادى عشر من كتابه و تتمم مجسم
 ابجدهزح فمعلوم ان مساحة هذا المجسم يكون مساوية للعدد المفروض فنعمل
 مكعبا مساويا لهذا المجسم و عمله لا يتم الا بخواص القطوع المخروطية فأخرناه
 الى ان تأتى بمقدمات لها [§١٠٣٠٥] و كلما قلنا عدد يساوى مجسما فانا نعنى بالعدد
 هناك مجسما متوازى الاضلاع قائم الزوايا يكون قاعدته مربع الواحد و ارتفاعه
 مساويا للعدد المفروض

[§١٠٣٠٦] و الصنف الرابع مال يعدل خمسة اجذاره فيكون عدة الاجذار
 هو جذر المال و برهانه با العدد هو ان الجذر اذا ضرب في مثله حصل المال و هذا
 جذر اذا ضرب في خمسة حصل المال فهو خمسة و برهانه بالهندسة شيه هذا اذا
 وضعت سطحا مربعا عدليا لخمسة الاضلاعه

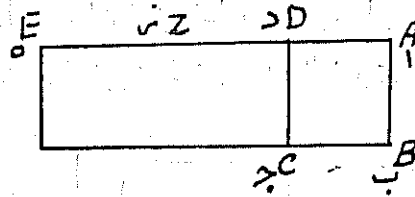
[§١٠٣٠٧] و الصنف الخامس اشياء تعدل كعبا فبالعدد بين انه يكون مثل عدد
 يعدل مالا مثاله اربعة اجذار يعدل كعبا يكون كانه قال اربعة اعداد يعدل مالا لمكان



التناسب المذكور و اما بالهندسة نضع مكعب ابجده و مساحته عديلة لمساحة اربعة
 اضلاعه و ضلعه اب فيكون ضلعه الذى هو اب اذا ضرب في اربعة يحصل مكعب ابجده
 الا ان ضلعه اذا ضرب في مربعه اعنى مربع اذ حصل المكعب فيكون مربع اذ اربعة
 [§١٠٣٠٨] و الصنف السادس اموال تعدل كعبا يكون في قوة عدد يعدل جذرا

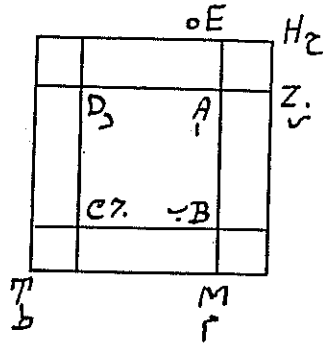
برهانه بالعدد ان نسبة العدد الى الجذر كنسبة المال الى الكعب كما بين في ثامنة الاصول و اما بالهندسة فانا نضع مكعب ابيجده عدل عدة امواله مثلا عدل مالين و مربع ضلعه ا ج فسطح ا ج اذا ضرب في اثنين حصل مكعب ابيجده الا انه اذا ضرب في بد الذى هو ضلعه حصل مكعب ابيجده فيكون بد الذى هو ضلعه مثل اثنين و ذلك المراد [§ ١٠٣٠٨٠١] و كلما قلنا في هذه الرسالة اموال المكعب فانا نعنى بها مربعات اضلاعه

[§ ١٠٤٠١] فاذ قد أتينا على المفردات فلنقل على الثلاثة الاولى من الاصناف الاثنى عشر الثلاثية [§ ١٠٤٠٢] و الصنف الاول منها مال و عشرة اجذار يعدل تسعة و ثلاثين عددا فاضرب نصف الاجذار في مثله و زد الحاصل على العدد و انقص من جذر المبلغ نصف الاجذار فالباقي هو جذر المال اما العدد فيحتاج الى هذين الشرطين واحدهما ان يكون عدة الاجذار عددا زوجا ليكون له نصف والثاني ان يكون مربع نصف الاجذار و العدد مجموعين عددا مربعا و الا فالمسئلة مستحيلة من حيث العدد و اما بالهندسة فلا يستحيل شىء من مسائلها اصلا و البرهان عليه من جهة العدد سهل عند تصور برهانه الهندسى و برهانه الهندسى هكذا نضع مربع ا ج مع عشرة اجذاره عدل

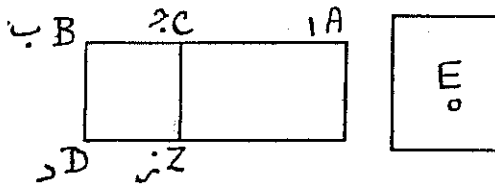


تسعة و ثلاثين من العدد و عشرة اجذاره هو سطح ج ه فيكون خط ه د عشرة و نصفه على ز فلان خط ه د قسم بنصفين على ز و زيد فيه على استقامته ا د فيكون ضرب ه ا في ا د الذى هو مثل سطح ه ب مع مربع د ز مساويا لمربع ز ا و مربع د ز الذى هو نصف الاجذار معلوم و سطح ه ا الذى هو العدد المفروض معلوم فيكون مربع ز ا معلوما و خط ز ا معلوما و اذا نقص منه زد يبقى ا د معلوما [§ ١٠٤٠٢٠١] و لذلك برهان آخر نضع

ابجد مربعا ونخرج با الى ه ونجعل ه ا ربع الاجذار وهو اثنان ونصف ونخرج
 ه الى ز ونجعل ز ا مثل ربع الاجذار وكذلك نخرج من جميع زوايا المربع خطوطا
 على هذه الصفة ونتم سطح حط فيكون مربعا لان زه مربع و اج مربع و حط مربع
 على ماتيين في سادسة الاصول و المربعات الاربعة التي في زوايا المربع الكبير كل



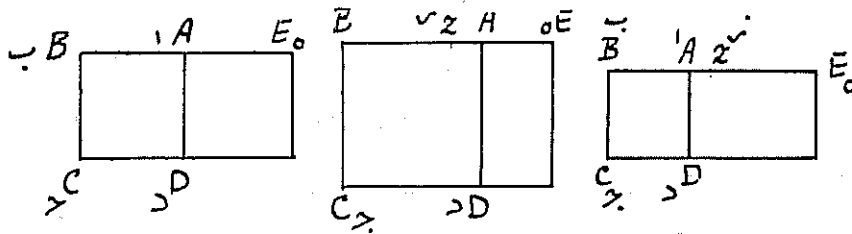
واحد منها مربع الاثنان ونصف فيكون جميعا خمسة وعشرين الذي هو مربع نصف
 الاجذار و سطح زب جذرين ونصف من اجذار مربع اج لان ز ا اثنان ونصف فيكون
 السطوح الاربعة عشرة اجذار مربع اج و قد فرض مربع اج مع عشرة اجذاره تسعة و
 ثلاثين من العدد فيكون مربع حط اربعة وستين يؤخذ جذره وينقص منه خمسة
 يبقى اب [١٠٤٠٢٠٢] و اما ان فرض خط اب عشرة واريد مربع يكون مع ضرب
 ضلعه في اب مساويا للعدد المفروض فنضع العدد المفروض سطح ه و هو متوازي



الاضلاع قائم الزويا على ما قدمناه و نضيف الى خط اب سطحا متوازي الاضلاع
 مساويا لسطح ه و نزيد على تمامه سطحا مربعا كما بينه اقليدس في سادسة الاصول
 وليكن سطح بد و المربع الزائد اد و ضلعه اج يكون معلوما على ماتيين

في المعطيات .

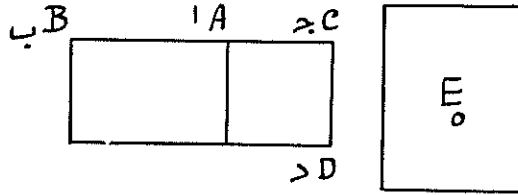
[§١٠٤٠٣] و الصنف الثاني منها مال وعدد يعدل جذرا هذا يجب ان يكون العدد فيه ليس باعظم من مربع نصف الاجذار و الا فالمسئلة مستحيلة فان كان مثل مربع نصف الاجذار فنصف الاجذار هو جذر المال و ان كان اقل منه نقص العدد من مربع نصف الاجذار و مابقى يؤخذ جذره و يزداد على نصف الاجذار او ينقص



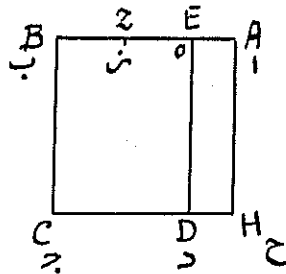
منه فما بلغ من الزيادة و مابقى من النقصان كان جذر المال و برهانه بالعدد يتصور عند تصور برهانه الهندسى نضع مربع ا بجد و نضع هـد العدد على سمت اد فيكون سطح هـج مثلا يعدل عشرة اضلاع مربع اج فيكون هـب عشرة و في الاول يكون اب نصف هـب و في الثاني اعظم من نصفه و في الثالث اصغر من نصفه ففي الاول يكون اب خمسة و في الثاني تقسم هـب على ز و كذلك في الثالث فخط هـب قسم بنصفين على ز و بقسمين غير متساويين على ا فيكون سطح ها في اب مع مربع زا مساويا لمربع زب كما تبين في ثمانية الاسطفسات و سطح ها في اب هو العدد و هو معلوم و اذا نقص من مربع زب الذى هو نصف الاجذار يبقى مربع زا معلوما و ينقص في الثالث من زب و في الثاني يزداد عليه يبلغ او يبقى اب و ذلك المراد و ان شئت امكنتك البرهان عليه من وجوه اخرى و لكننا اقتصرنا على هذا مخافة التطويل [§١٠٤٠٣٠١]

و اما ان فرض خط اب عشرة مثلا و اريد ان يفصل منه خط يكون ضرب اب في ذلك الخط مساويا لمربع ذلك الخط مع سطح آخر غير اعظم من مربع نصف اب اعنى العدد المفروض و هو سطح هـ و تريد ان تفصل من اب خطا يكون مربعه مع سطح هـ مساويا لضرب اب في ذلك الخط فنضيف الى خط اب المعلوم سطحا مساويا

لسطح هـ المعلوم ينقص عن تمامه سطحاً مربعاً وهو ممكن لان سطح هـ ليس باعظم



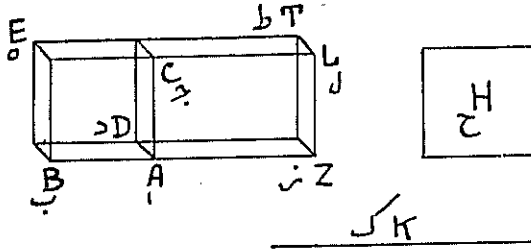
من مربع نصف اب وليكن سطح از و المربع الناقص سطح جد كما بينه اقليدس في سادسة الاسطوانات فيكون ضلع جب معلوما كما تبين في المعطيات و ذلك ما اردنا ان نبين [§١٠٤٠٣٠٢] فقد لاح ان لهذا الصنف انواعا و يقع فيها ما يستحيل و يمكنك ان تعلم شرائط صحته في العدد على ما بيناه في الصنف الاول [§ ١٠٤٠٤] و الصنف الثالث عدد و جذر يعدل ما لا يزداد مربع نصف الاجذار على العدد و يؤخذ جذر المبلغ و يزداد على نصف الاجذار فما يحصل هو جذر المال برهانه مربع ابجح يعدل خمسة اجذاره و ستة من العدد فنفضل العدد منه و هو سطح اد يبقى سطح هـ عدة الاجذار و هو خمسة فيكون خط هـ خمسة نقسمه بنصفين على ز فنخط هـ ب قسم بنصفين على ز و زيد فيه هـ ا على استقامته يكون سطح با في اه الذي هو سطح اد المعلوم مع مربع هـ المعلوم مثل مربع زا فمربع زا معلوم و زا معلوم و زب معلوم فيكون اب معلوما وله



وجوه أخرى من البراهين فارتض بها [§١٠٤٠٤٠١] و اما ان فرض به الذي هو عدة الاجذار و طلب المربع و ضلعه كي يكون مساويا لعدة اضلاعه مع العدد

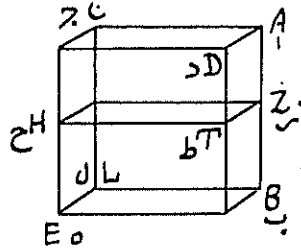
كعدة الاجذار المفروضة و نعمل سطح ك كعدة الاجذار المفروضة و الجذر هو ضلع المكعب و هو اذ فسطح ك اذا ضرب في اذ يكون مثل عدة الاضلاع المفروضة و سطح جب اذا ضرب في اذ يكون منه المكعب مع عدة امواله المفروضة و هما متساويان اعنى مجسم بط و المجسم المعمول على ك الذى ارتفاعه اذ فقاعدتا هما يكونان مكافئتين لارتفاعيهما و ارتفاعاهما متساويان فقاعدتا هما يكونان اذن متساويتين و قاعدة جب هو مربع جب مع حا الذى هو عدة اجذاره التى فرضت للاموال فيكون ك الذى هو العدد المفروض للاجذار مثل مال و عدة الاجذار المفروضة للاموال و ذلك ما اردنا ان نبين و مثاله مكعب و ثلاثة اموال يعدل عشرة اجذار يكون مال و ثلاثة اجذار يعدل عشرة اعداد

[§١٠٥٠٣] و الصنف الثانى منها مكعب مع جذرين يعدل ثلاثة اموال يكون مالا مع اثنين يعدل ثلاثة اجذار برهانه نضع مكعب ابجده و هو مع جذريه



يعدل ثلاثة اموال و نضع ح مربعا مثل جب و نضع ك ثلاثة فيكون ضرب ح فى ك ثلاثة اموال مكعب اه و نعمل على اج سطحا مساويا لاثنين و تتمم مجسم ازجطد فيكون مثل عدة الجذور ولكن خط زب اذا ضرب فى مربع اج حصل مجسم بط و مجسم اط مثل عدة الاضلاع فمجسم بط مثل المكعب مع مثل عدة اضلاعه فيكون مجسم بط مساويا لعدة الاموال فيكون خط زب على ما تبين فى الشكل المتقدم ثلاثة و سطح بل هو مال و اثنان فمال و اثنان يعدل ثلاثة اجذار لان سطح بل هو من ضرب اب فى ثلاثة و ذلك ما اردنا ان نبين

[§١٠٥٠٤] و الصنف الثالث منها هو مكعب يعدل مالا وثلاثة اجذار فيكون مال يعدل جذرا و ثلاثة اعداد نضع مكعب ابجده الذى يعدل ماله و ثلاثة اضلاعه و



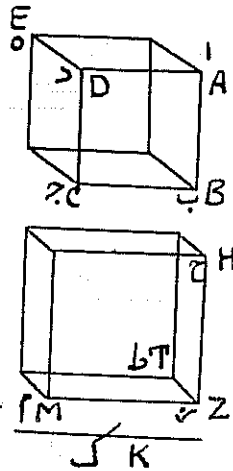
نفصل من خط اب الذى هو ضلعه خط از مثل عدة الاموال و هو واحد و تتمم مجسم از طحج فيكون مجسم از طحج مثل عدة الاموال المفروضة فيبقى مجسم زه مساويا لعدة الاضلاع المفروضة و نسبة المجسمين احدهما الى الآخر كنسبة قاعدة زح الى قاعدة زل كما تبين فى الحادية عشرة من الاصول ان الارتفاعان متساويان و لكن سطح زح هو جذر واحد لمربع جب و سطح زل هو عدد الاجذار و هو ثلاثة فمربع جب مثل جذر واحد و ثلاثة اعداد و ذلك ما اردنا ان نبين [§١٠٥٠٥] و هذه البراهين مالم تفهم على هذا النمط لا يكون الصناعة حكمية و ان كان فيه تجسّم مصاعب

[§١٠٦٠١] و من بعد تقديم هذه الاصناف التى امكن البرهان عليها من خواص الدائرة اعنى من كتاب اقليدس فلنقل الآن على الاصناف التى لا يمكن البرهان عليها الا بخواص القطوع و هى اربعة عشر صنفاً واحد مفرد و هو عدد يعدل مكعبا و ستة ثلاثية باقية و سبعة رباعية و لنقدم مقدمات مبنية على كتاب المخروطات ليكون شبه تمهيد للمتعلم و لا تكون رسالتنا هذه مفتقرة الى اكثر من الثلاثة الكتب المذكورة اعنى كتابى اقليدس فى الاصول و فى المعطيات و مقاليتين من كتاب المخروطات .

[§١٠٦٠٢] نريد ان نجد خطين بين خطين ليتوالى الاربعة متناسبة فليكن الخطان المستقيمان اب بـ و نجعلهما محيطين بزاوية ب القائمة و نعمل قطعاً

هو مثل بج مساويا لضرب با في بط فنسبة بط الى بج كنسبة بج الى با فالخطوط
الاربعة متناسبة متوالية و خط دح معلوم القدر لانه خرج من نقطة معلومة الوضع
الى خط معلوم الوضع على زاوية معلومة القدر و كذلك دط معلوم القدر فخطا
 بج معلوما القدر وهما وسطان في النسبة بين خطي اب بج اعني نسبة اب الى
 بج كنسبة بج الى بط و كنسبة بط الى بج و ذلك ما اردنا ان نبين

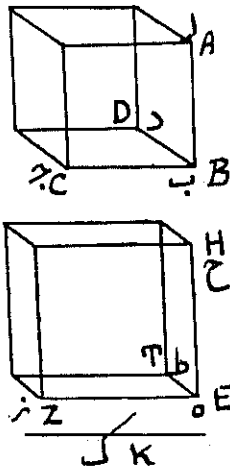
[§١٠٦٠٣] مربع ابجد مفروض و هو قاعدة مجسم ابجده المتوازي السطوح
القائم الزوايا و مربع مح مفروض و نريد ان نعمل على قاعدة هح مجسما متوازي



السطوح قائم الزوايا مساويا لمجسم ابجده المفروض فنجعل نسبة اب الى مز كنسبة
 مز الى ك ثم نجعل نسبة اب الى ك كنسبة زط الى هد و نجعل زط عمودا على
سطح هح على نقطة ز و نتمم مجسم مزطح فاقول ان هذا المجسم مساو للمجسم
المفروض برهانه نسبة مربع اج الى مربع مح كنسبة اب الى ك فيكون نسبة مربع
 اج الى مربع مح كنسبة زط الى هد هو ارتفاع مجسم مطح الى هد الذي هو ارتفاع
مجسم به فيكون المجسمان متساويين لان قواعدهما مكافية لارتفاعيهما كما تبين
في مقالة يا من الاصول [§١٠٦٠٣٠١] و كلما قلنا مجسم فانا نعني به المجسم
المتوازي السطوح القائم الزوايا و كذلك كلما قلنا سطح فانا نعني به السطح

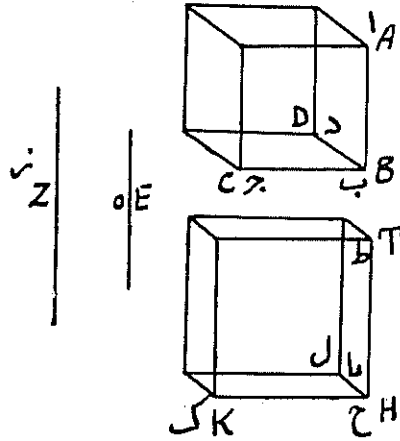
المتوازي الاضلاع القائم الزوايا

[§١٠٦٠٤] مجسم ابيجد مفروض وقاعدته اج مربعة و نريد ان نعمل مجسماً قاعدته مربع و ارتفاعه هط مثل هط المفروض و يكون مساوياً لمجسم اجد فنجعل نسبة هط الى بد كنسبة اب الى ك و نأخذ بين اب و ك خطاً وسطاً في النسبة و هو هز و نجعل هز عموداً على هط و تتم طز و نجعل هج عموداً على سطح طز و



يكون مثل هز و تتم مجسم جهطز فاقول ان مجسم ط الذي قاعدته مربع حز و ارتفاعه هط المفروض مثل مجسم د المفروض برهانه ان نسبة مربع اج الى مربع حز كنسبة اب الى ك فيكون نسبة مربع اج الى مربع حز كنسبة هط الى بد فقاعدتا المجسمين مكافئتان لارتفاعيهما فهما متساويان و ذلك ما اردنا ان نبين [§١٠٦٠٥] و من بعد ذلك فانا نأتي بالصف الثالث من المفردات وهو مكعب يعدل عدداً نضع العدد مجسم ابيجد و قاعدته اج و هو مربع الواحد كما قلنا و طوله مثل العدد المفروض و نريد ان نعمل مكعباً مساوياً له فنأخذ بين خطي اب بد خطين وسطين في النسبة فيكونان معلومي القدر كما بيناه و هما ه ز و نجعل حط مساوياً لخط ه و نعمل عليه مكعب طحكل فيكون هذا المكعب

معلوم القدر و ضلعه معلوم القدر فاقول انه مساو لمجسم د برهانه نسبة مربع اج

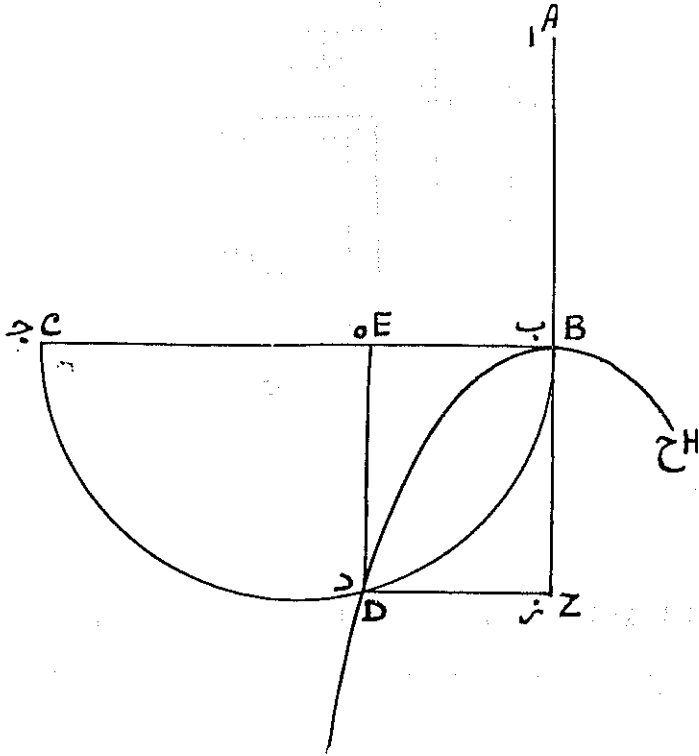


الى مربع طك كنسبة اب الى حك مثناة ونسبة اب الى حك مثناة كنسبة اب الى
ز الاول الى الثالث من الخطوط الاربعة بل كنسبة حك الثاني الى بد الرابع
فقاعدتا مكعب ل و مجسم د مكافيتان لارتفاعيهما فهما متساويان وذلك ما اردنا

ان نبين

[§١٠٧٠١] ومن بعد ذلك فانا نشتغل بالاصناف الستة الباقية الثلاثية
[§١٠٧٠٢] الصنف الاول هو مكعب واضلاع تعدل عددا نضع اب ضلع مربع
مساو لعدة الجذور و هو مفروض ونعمل مجسما يكون قاعدته مثل مربع اب و
يكون ارتفاعه مثل بج ويكون مساويا للعدد المفروض كما بينا عمله فيما تقدم
ونجعل بج عمودا على اب و قد علمت ما معنى العدد المجسم في كلامنا وهو
مجسم يكون قاعدته مربع الواحد و ارتفاعه مثل العدد المفروض اعني خطا
نسبته الى ضلع قاعدة المجسم كنسبة العدد المفروض الى الواحد ونخرج اب
على استقامة الى ز ونعمل قطعاً مكافياً رأسه نقطة ب وسهمه بز و ضلعه القائم
اب و هو قطع حبد فيكون قطع حبد معلوم الوضع كما بينا آفا و يكون مماسا
لخط بج ونعمل على بج نصف دائرة فانها باضطرار يقطع القطع فليقطعه على د و

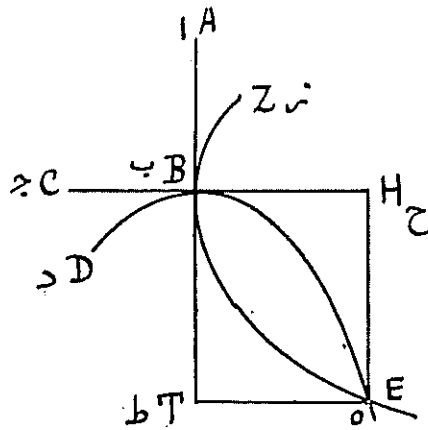
نخرج من د التي هي معلومة الوضع كما عرفته عمودي دز ده على بز بيج فيكونان معلومي الوضع والقدر فخط دز من خطوط الترتيب في القطع فيكون مربعه مساويا لضرب بز في اب فيكون نسبة اب الى دز الذي هو مثل به كنسبة به الى هـ الذي



هو مثل زب لكن نسبة به الى هـ كنسبة هـ الى هـج فالخطوط الاربعة متناسبة اب به هـ هـج فنسبة مربع اب الاول الى مربع به الثاني كنسبة به الثاني الى هـج الرابع فالمجسم الذي قاعدته مربع اب و ارتفاعه هـج مساو لمكعب به لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما و نجعل المجسم الذي قاعدته مربع اب و ارتفاعه هـب مشتركا فيكون مكعب به مع هذا المجسم مثل المجسم الذي قاعدته مربع اب و ارتفاعه بـج الذي فرضناه مساويا للعدد المفروض لكن المجسم الذي قاعدته مربع اب الذي هو مثل عدة الجذور و ارتفاعه هـب الذي هو ضلع المكعب مساو لعدة اضلاع مكعب

لا يتلاقيا فان لم يتلاقيا فالمسئلة مستحيلة و ان تلاقيا بالتماس على نقطة او بالتقاطع على نقطتين فيكون النقطة معلومة الوضع فليتلاقيا على نقطة ه و نخرج منها عمودي هط هج على خطى بط بيج فيكون العمودان لامحالة معلومي الوضع و القدر و خط هط من خطوط الترتيب فيكون نسبة مربع هط الى ضرب بط في طج كنسبة الضلع القائم الى الضلع المائل كما بينه ابلوينوس في شكل ك من مقالة آ و الضلعان القائم وهو المنتصب و المائل متساويان فمربع هط مساو لضرب بط في طج فنسبة بط الى طه كنسبة طه الى طج و لكن مربع هج الذى هو مثل بط مساو لضرب بيج في با كما تبين في شكل يب من مقالة آ من كتاب المخروطات فنسبة اب الى بط كنسبة بط الى بيج و كنسبة بيج الذى هو مثل هط الى طج فالخطوط الاربعة متناسبة فنسبة مربع اب الاول الى مربع بط الثانى كنسبة بط الثانى الى طج الرابع فمكعب بط مساو للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه جط و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه بيج الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون مكعب بط مع العدد المفروض مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه بط و هو عدة اضلاع المكعب و قد تبين ان لهذا الصنف اختلاف وقوع ويقع من مسائله ما يستحيل و قد خرج بنحو خاص قطعين مكاف و زائد

[§ ١٠٧٠٤] الصنف الثالث مكعب يعدل اضلاعا وعددا نضع اب ضلع مربع



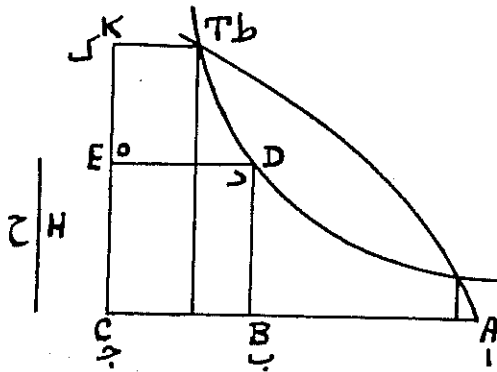
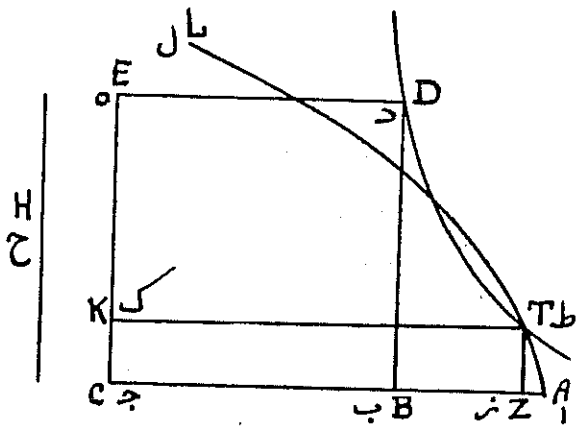
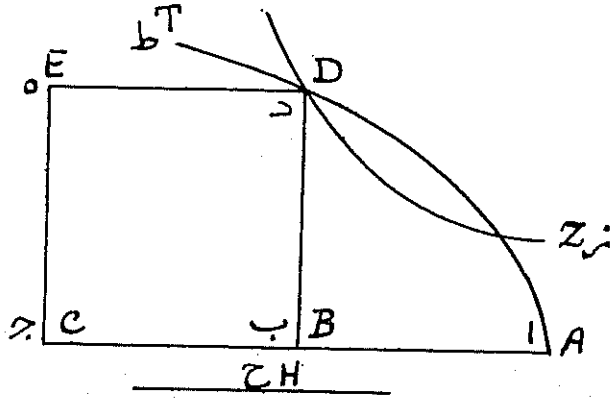
مثل عدة الاضلاع و نعمل مجسما قاعدته مربع اب ويكون مساويا للعدد المفروض
 وليكن ارتفاعه بـ عمودا على اب ونخرج اب بـج على استقامة و نعمل قطعاً مكافيا
 رأسه نقطة ب و سهمه على استقامة اب و ضلعه القائم اب و هو دـه و يكون معلوم
 الوضع و يكون مماسا لخط بـج على ما بينه ابلونوس في شكل لـج من مقالة آ و
 نعمل قطعاً آخر زائدا رأسه نقطة ب و سهمه على استقامة بـج و كل واحد من
 ضلعيه القائم و المائل مثل بـج و هو قطع زبه و يكون معلوم الوضع و مماسا لخط
 اب فالقطعان لا محالة يتقاطعان فليتقاطعا على نقطه ه فتكون معلومة الوضع و
 نخرج من نقطة ه عمودى هـط هـج فهما معلوما الوضع و القدر و خط هـج من
 خطوط الترتيب فعلى ما تقدم يكون مربعه مساويا لضرب جـح في بـج فنسبة جـح الى
 هـج كنسبة هـج الى حـب لكن نسبة هـج الى حـب الذى هو مثل بـط الى حـب الذى هو مثل
 هـط و هو من خطوط الترتيب فى القطع الآخر كنسبة هـط الى اب الذى هو الضلع
 القائم للقطع فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة اب الى حـب كنسبة حـب الى بـط و كنسبة
 بـط الى جـح فنسبة مربع اب الاول الى مربع حـب الثانى كنسبة حـب الثانى الى جـح
 الرابع فيكون مكعب حـب مساويا للمجسم الذى قاعدته مربع اب و ارتفاعه جـح
 لان ارتفاعيهما مكافيان لقاعدتيهما لكن هذا المجسم مساو للمجسم الذى قاعدته مربع
 اب و ارتفاعه بـج الذى عملناه مساويا للعدد المفروض و المجسم الذى يحيط به
 قاعدة مساوية لمربع اب و ارتفاع بـج الذى هو مثل عدة الاضلاع المفروضة لمكعب
 بـج فمكعب بـج مثل العدد المفروض و مثل عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد فقد
 تبين انه ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع ولا فيه شيء يستحيل اعنى فى مسائله و
 قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§١٠٧٠٥] الصنف الرابع من الاصناف الستة الثلاثية مكعب و اموال تعدل
 عدداً نضع خط اب لعدة الاموال و نعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض وليكن ضلعه
 ح و نخرج اب على استقامة و نجعل بـط مثل ح و تتم مربع بـطدـج و نعمل على
 نقطة د قطعاً زائدا لا يلقاه بـج بـط و هو قطع هـدـن كما تبين من قوة شكلى د و هـ

للمجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه از لكن هذا المجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه از مساو لمكعب بز و المجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه اب و هذا المجسم الذى قاعدته مربع بز و ارتفاعه اب هو مثل عدة الاموال المفروضة فمكعب بز مع عدة امواله المفروضة مساو للعدد المفروض و ذلك ما اردنا ان نبين و هذا الصنف ليس فيه اختلاف وقوع و لا استحيل شيء من مسائله و قد خرج بنحواس القطوع المكافى و الزائد معا

[§١٠٧٠٦] الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية مكعب و عدد يعدل مالا نفرض اج لعدة الاموال و نعمل مكعبا مساويا للعدد المفروض و يكون ضلعه ح فخط ح لا يخلو اما ان يكون مساويا لخط اج او اعظم منه او اصغر فان كان مساويا له استحالت المسئلة لانه لا يخلو اما ان يكون ضلع المكعب المطلوب مثل ح او اصغر او اكبر فان كان مثله كان ضرب اج فى مربعه مثل مكعب ح فيكون العدد مثل عدة الاموال و لا يحتاج الى زيادة المكعب و ان كان ضلع المطلوب اصغر منه كان ضرب اج فى مربعه اصغر من العدد المفروض فيكون عدة الاموال اصغر من العدد المفروض فضلا عن الزيادة و ان كان الضلع اكبر من ح كان مكعبه اكبر من ضرب اج فى مربعه فضلا عن زيادة العدد عليه ثم ان كان ح اعظم من اج يكون المحال فى الوجوه الثلاثة الزم فيجب ان يكون ح اصغر من اج و الا فالمسئلة مستحيلة فنفصل بج من اج مثل ح فخط بج اما ان يكون مثل اب او اعظم منه او اصغر فليكن فى الشكل الاول مثله و فى الثانى اعظم منه و فى الثالث اصغر منه و تتم فى الاشكال الثلاثة مربع دح و نعمل على نقطة د قطعاً زائداً لا يلقاه اج جه و هو فى الاول دز و فى الثانى و الثالث دط و نعمل قطعاً مكافياً رأسه نقطة ا و سهمه اج و ضلعه القائم بج و هو فى الاول اط و فى الثانى ال و فى الثالث اك و يكون القطعان معلومى الوضع فى الاول يمر القطع المكافى على نقطة د لان مربع دب مساو لضرب اب فى بج فيكون د على محيط القطع المكافى و يلقاه على نقطة اخرى و يمكنك ان تتفطن له بادنى تأمل و فى الثانى يكون نقطة د خارجة من محيط

المكافى لان مربع دب اعظم من ضرب اب فى بيه فان التقى القطعان بالتماس على

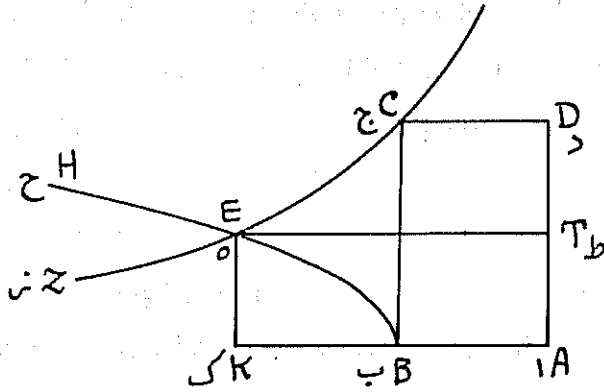


نقطة أخرى او بالتقاطع فيكون العمود النازل منها واقعا لامحالة فيما بين نقطتي

١ ب كانت المسئلة ممكنة و الافهى مستحيلة و هذا التماس او التقاطع لم يتفطن له ابوالجود المهندس الفاضل حتى جزم القضاء بان بجد ان كان اعظم من اب كانت المسئلة مستحيلة و ابطال في حكمه هذا و هذا الصنف هو الذى اضطر اليه الماهانى من بين الاصناف الستة حتى تعرف و فى الثالث يكون نقطة د داخل القطع المكافى فيتقاطع القطعان على نقطتين و بالجملة فانا نخرج من نقطة الالتقاء عمودا على اب فليكن فى الشكل الثانى طز و كذلك عمودا آخر منها على ج ه و هو طك فسطح طج مثل سطح دج فيكون نسبة زج الى بجد كنسبة بجد الى طز و طز من خطوط الترتيب فى قطع اطل يكون مربعه مثل ضرب از فى بجد فيكون نسبة بجد الى طز كنسبة طز الى زا فالخطوط الاربعة متناسبة نسبة زج الى جب كنسبة جب الى طز و كنسبة طز الى زا فنسبة مربع زج الاول الى مربع بجد الثانى كنسبة بجد الثانى الى زا الرابع فيكون مكعب بجد الذى هو مثل العدد المفروض مساويا للمكعب الذى قاعدته مربع زج و ارتفاعه زا و نجعل مكعب زج مشتركا فمكعب زج مع العدد المفروض مساويا للمكعب الذى قاعدته مربع زج و ارتفاعه اح الذى هو مثل عدة الاموال المفروضة و ذلك المراد و قس عليه الباقيين على ان الثالث يخرج منها مكعبان لا محالة لان كل عمود يفصل ضلع مكعب من جا كما تبين فقد تبين ان هذا الصنف له اختلاف وقوعات و قد يقع فيها ما يستحيل و قد خرج بخواص قطعين مكاف و زائد معا

[§ ١٠٧٠٧] الصنف السادس من الاصناف الستة الثلاثية الباقية هو مكعب يعدل اموالا و اعدادا نفرض عدة الاموال خط اب و نعمل مجسما ارتفاعه اب و قاعدته مربع و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ضلع قاعدته بجد عمودا على اب و نتمم سطح دب و نعمل على نقطة ج المملومة الوضع قطعاً زائدا لا يلقاه اب ا د و هو قطع جهز و قطعاً آخر مكافياً رأسه نقطة ب و سهمه على استقامة اب و ضلعه القائم اب و هو بهج فهذان القطعان يتقاطعان باضطرار فليتقاطعا على ه فيكون ه معلومة الوضع و نخرج منها عمودى هط هك على اب ا د فسطيح ها مثل سطح جا فيكون نسبة اك

الى بـج كنسبة اب الى هـك و يكون مربعاتها ايضا متناسبة لكن مربع هـك مثلن



ضرب كـب في اب لان هـك خط ترتيب في قطع بهـج فيكون نسبة مربع اب الى مربع هـك كنسبة اب الى بك فنسبة مربع بـج الى مربع اك كنسبة بك الى اب فيكون المجسم الذي قاعدته مربع بـج و ارتفاعه اب مساويا للمجسم الذي قاعدته مربع اك و ارتفاعه كـب لتكافؤ الارتفاعين و القاعدتين و نجعل المجسم الذي قاعدته مربع اك و ارتفاعه اب مشتركا فيكون مكعب اك مساويا للمجسم الذي قاعدته مربع بـج و ارتفاعه اب الذي عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم الذي قاعدته مربع اك و ارتفاعه اب الذي هو عدة الاموال المفروضة فيكون مكعب اك مثل عدة امواله المفروضة مع العدد المفروض و ليس لهذا الصنف اختلاف وقوع و لا استحيل من مسائله شيء و قد خرج بنحواس قطعين مكاف و زائد معا

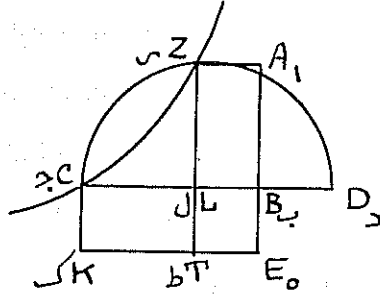
[§ ١٠٨٠١] و اذ قد أتينا على الاصناف الثلاثة فلنقل على الرباعية الاربعة

التي كل صنف منها مركب من تعادل ثلاثة و واحد

[§ ١٠٨٠٢] فالصنف الاول من الاربعة الرباعية هو مكعب و اموال و اضلاع

تعديل اعدادا نضع به ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع المفروضة و نعمل مجسما قاعدته مربع به و يكون مساويا للعدد المفروض و ليكن ارتفاعه بـج عمودا على به و نعمل به مثل عدة الاموال المفروضة على استقامة بـج و نعمل على قطر دـج نصف دائرة دـج و

تتم سطح بك ونعمل على نقطة ج قطعاً زائداً* لا يلتقاء خطا به هك فهو يقطع
الدائرة على نقطة ج لأنه يقطع الخط المماس لها و هو جك فيلزم ان يقطعها

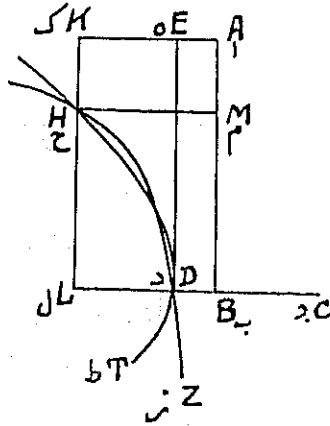


على نقطة أخرى فليقطعها على ز فيكون ز معلومة الوضع لان الدائرة والقطع
معلوما الوضع ونخرج من ز عمودى زط زا على هك ها فسطح زه مثل سطح
بك ويلقى هل المشترك يبقى سطح زب مثل سطح لك يكون نسبة زل الى
لج كنسبة هب الى بل لان هب مثل طل وكذلك مربعاتها ايضا متناسبة لكن
نسبة مربع زل الى مربع لج كنسبة دل الى لـج للدائرة فيكون نسبة مربع هب
الى مربع بل كنسبة دل الى لـج فيكون المجسم الذى قاعدته مربع هب وارتفاعه
لـج مثل المجسم الذى قاعدته مربع بل وارتفاعه دل لكن هذا المجسم الأخير
مثل مكعب بل مع المجسم الذى قاعدته مربع بل وارتفاعه بد الذى هو مثل عدة
الاموال المفروضة ونجعل المجسم الذى قاعدته مربع هب وارتفاعه بل الذى
هو مثل عدة الجذور مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع هب وارتفاعه لـج
الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مثل مكعب بل مع مثل عدد اضلاعه
المفروض ومع مثل عدة امواله المفروضة وذلك ما اردنا ان تبين فليس لهذا
الصنف اختلاف وقوع ولا استحيل من مسائله شيء وخرج بخواص القطع الزائد
مع خواص الدائرة

[§ ١٠٨٠٣] الصنف الثانى من الاصناف الاربعة الرباعية هو مكعب واموال

(٥) درسخ A و C (§ ٤٠٣٠٢٠١) عبارت چنین است : ونعمل قطعاً زائداً نرأسه نقطة ج ولا ...

واعداد تعدل اضلاعا نضع اب ضلع مربع مساو لعدة الاضلاع و بجد لعدة الاموال المفروضة ويكون عمودا على اب ونعمل مجسما قاعدته مربع اب و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه بد على استقامة بجد ونعمل على نقطة د قطعا زائدا لا يلتقي اب اه بعد ان تمنا سطح به و هو قطع زدح ونعمل قطعا آخر زائدا رأسه نقطة د و سهمه على استقامة بد و كل واحد من ضلعيه القائم والمائل مثل دج و هو طدح ولا محالة ان هذا القطع يقطع الاول على د فان امكن ان يلتقيا على نقطة



أخرى فالمسألة ممكنة و الا فبى مستحبات هذا الالتقاء بالتماس او بالتقاطع على نقطتين بناءً على المقالة الرابعة من كتاب المخروطات وقد ضمنا آلا نهجى الاعلى مقالتين منه ومع هذا فلا يضرننا بعد ان التقا سواء كان بالتماس او بالتقاطع فافهم و الالتقاء اما ان يكون بالتماس و اما ان يكون بالتقاطع فان قطعه على غير نقطة د فباضطرار يقطعه على نقطتين و بالجملة فانا نخرج من نقطة التقاطع او الالتقاء كيف ما كان وليكن نقطة ح عمودى حم كحل فيكونان معلومى الوضع و القدر لان نقطة ح معلومة الوضع فسطح اح مثل سطح اد و يلقى هم المشترك يبقى مد مثل هج و نجعل دح مشتركا يكون مل مثل هل فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما فيكون نسبة مربع اب الى مربع بل كنسبة مربع حل الى مربع لد ولكن نسبة

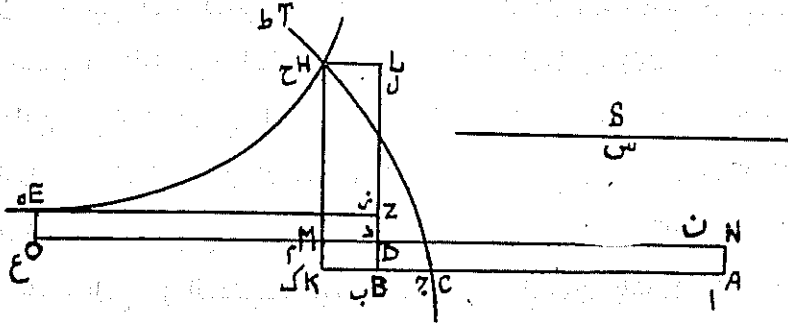
و نعمل على زج سطحاً مساوياً لسطح α وهو جح فيكون نقطة α معلومة الوضع لان سطح جح معلوم القدر وزواياه ايضا معلومة القدر وخط زج معلوم الوضع و القدر وهي اما ان تقع داخل الدائرة او على محيطها او خارجا منها فلتقع اولا داخل الدائرة و نعمل على نقطة α قطعاً زائداً لا يلقاه زج جح فهو يقطع الدائرة على نقطتين باضطرار في هذا الوضع فليقطعها على نقطتي β و γ فتكونان معلومتى الوضع و نخرج منهما عمودى $\beta\gamma$ تلك تقع على α و من نقطة β عمود $\beta\delta$ على $\beta\gamma$ فسطح $\beta\gamma$ مثل سطح جح و جح مثل $\beta\gamma$ و نجعل $\beta\gamma$ مشتركاً يكون $\beta\delta$ مثل $\beta\gamma$ فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع $\beta\delta$ الى مربع $\beta\gamma$ كنسبة $\beta\delta$ الى $\beta\gamma$ كاللدايرة فيلزم ان يكون نسبة مربع $\beta\delta$ الى مربع $\beta\gamma$ كنسبة $\beta\delta$ الى $\beta\gamma$ كالمجسم الذى قاعدته مربع $\beta\gamma$ و ارتفاعه $\beta\delta$ مثل المجسم الذى قاعدته مربع $\beta\gamma$ و ارتفاعه $\beta\delta$ لكن المجسم الاول مثل عدة اضلاع مكعب $\beta\gamma$ المفروضة و مثل العدد المفروض و نجعل مكعب $\beta\gamma$ مشتركاً فيكون المجسم الذى قاعدته مربع $\beta\gamma$ و ارتفاعه به الذى هو مثل عدة اموال مكعب $\beta\gamma$ المفروضة مثل مكعب $\beta\gamma$ مع عدة اضلاعه المفروضة و مع العدد المفروض و كذلك يكون مكعب $\beta\gamma$ بهذا البرهان هذا اذا وقع نقطتا $\beta\gamma$ داخل الدائرة فان وقع α خارج الدائرة و نعمل القطع وربما لقي الدائرة بالتماس او بالتقاطع [هذا النوع من هذا الصنف هو الذى ذكره ابوالجود فى استخراج المسئلة التى سندكرها^{*}] و يؤول الامر الى ما قلنا و ان لم يلق القطع الدائرة فلا تزال نعمل السطح على خط اقصر من زج او اطول منه فى الوقوع الآخر فان لم يلق القطع الدائرة فالمسئلة مستحيلة و يكون البرهان على استحالتها بعكس ما ذكرناه و ان وقع α على المحيط او خارج الدائرة فنخرج جز على استقامة و نعمل سطحاً احدى زواياه تكون على α و يكون بحيث لو عمل على الزاوية المقابلة لزاوية α قطع بالصفة المذكورة يلقى الدائرة بالتماس او بالتقاطع و ذلك يعلم بتقليد استقرأء مع ضرب من القياس السهل تركته لكى يحصل للناظرين

(٤٦) عبارات داخل علامت [] در نسخه A (٤٠٠٠٠٠٠٠) در حاشیه نوشته شده و در نسخه C موجود نیست.

في رسالتي هذه الارتياض فان من لا يمكنه هذا القدر من الاستنباط لا يتحقق من هذه الرسالة شيئاً اذ هذه الرسالة مبنية على الكتب الثلاثة التي ذكرناها وبرهن على استحالة المستحيل منها بعكس البرهان الذي ذكرناه على الممكن وذلك ان ضلع المكعب يجب ان يكون اقصر من هب الذي هو عدة الاموال المفروضة لانه ان كان مساوياً لعدة الاموال المفروضة يكون ذلك المكعب مساوياً لعدة امواله المفروضة فاضلاً عن زيادة شيء آخر عليه من العدد او من اضلاعه فان كان ضلع المكعب اعظم من عدة الاموال المفروضة كان المكعب نفسه اعظم من عدة امواله المفروضة فضلاً عن زيادة شيء آخر عليه فبين انه يجب ان يكون اقصر منه فنفضل مثله امن به وليكن هـ ف ونخرج من ف عموداً الى محيط الدائرة ونعكس البرهان الذي ذكرناه فبين ان رأس العمود يكون على محيط القطع الذي قيل انه لا يمكن ان يلقى الدائرة وذلك محال ولاجل انا نظن ان هذا الاستقرآء ربما يكون عسراً على بعض الناظرين في هذه الرسالة فانا نطوى هذه الجملة ونأتي بقانون مغن عن هذا الاستقرآء وهو انا نعمل سطحاً على خط كيف ما اردنا يكون على استقامة بـ ج كيف ما وقعت ج خارجاً او داخلاً ويكون احدى زواياه على نقطة ج ويكون مساوياً لسطح اـ ج فلا بد من ان يصير اضلاعه معلومة القدر والوضع ونعمل على الزاوية المقابلة لزاوية ج قطعاً زائداً لا يلقاه خطاً زج جه وهو الخط الذي هو عمود على نقطة ج فان لقي القطع الدائرة بالتماس او بالتقاطع فالمسئلة ممكنة و الا فهي مستحيلة والبرهان على الاستحالة ما ذكرت [§ ١٠٨٠٤٠١] وقد اضطر واحد من المهندسين الى هذا الصنف وقد اخرجته الا انه لم يبين اختلاف وقوعاته ولم يخطر بباله انه ربما يقع فيه مستحيل كما بيناه فاعرفه واعرف القانون الآخر في عمل هذا الصنف وتمييز الممكن من المستحيل وهذا الصنف خرج بخواص الدائرة مع خواص القطع الزائد، وذلك ما اردنا ان نبين واما المسئلة التي اضطرت واحداً من المتأخرين الى هذا الصنف هي هذه عشرة قسمتها بقسمين فيكون مجموع مربعي القسمين مع الخارج من قسمة الاعظم على الاصغر اثنين وسبعين فوضع احد القسمين شيئاً والآخر

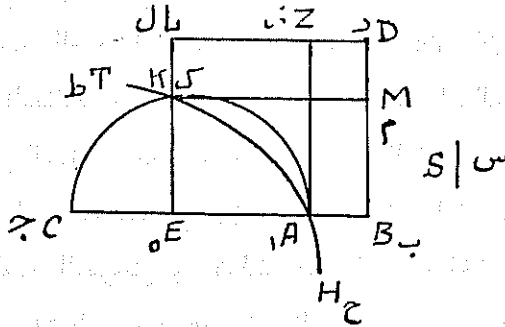
سطح هـ كلها معلومة الوضع و القدر و تعمل على ه قطعاً زائداً لا يلقاه زد د ع و هو قطع هـ فيكون هـ معلوم الوضع و تعمل قطعاً آخر زائداً رأسه نقطة ا و سهمه اب و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل اج و هو قطع احط فهو يقطع القطع الآخر باضطراب فليقطعه على ح فيكون ح معلومة الوضع و نخرج منها عمودى حـك حل فيكونان معلومى الوضع و القدر و سطح حد مثل هـ الذى هو مثل اد و ذلك مشترك فسطح حـب مثل ام و يكون اضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع حـك الى مربع كا كنسبة حـك الى اك لمكان قطع احط كما بيناه مرارا فيكون نسبة مربع بد الى مربع كـب كنسبة حـك الى اك فالمجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه اك مثل المجسم الذى قاعدته مربع بك و ارتفاعه حـك لكن هذا المجسم الاخير مثل مكعب بك مع المجسم الذى قاعدته مربع بك و ارتفاعه بـج الذى هو عدة الاموال المفروضة و المجسم الاول مساو للمجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه اب الذى عملناه مثل العدد المفروض مع المجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه بك الذى هو عدة اضلاع مكعب بك المفروضة فمكعب بك مع عدة امواله المفروضة مثل العدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و اذا كان س مثل بـج فان بد هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان المجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه ايضا بد الذى هو عدة اضلاع مكعب بد مساو لمكعب بد و المجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه بـج الذى هو عدة اموال مكعب بد المفروضة مساو للمجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه س الذى هو العدد المفروض فيكون مكعب بد مع عدة امواله المفروضة مساو للعدد المفروض مع عدة اضلاعه المفروضة و ذلك المراد و معلوم ان مكعب بد فى هذا الوقوع مع العدد المفروض مساو لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة فقد داخل هذا الصنف الصنف الثالث و هو مكعب و اعداد تعدل اموالا و اضلاعا و ان كان س اعظم من بـج فانا نجعل اب مثل س و نعمل القطع الثانى على نقطة جـ و كل واحد من ضلعيه مثل اج و هو باضطراب يقطع القطع الآخر و يكون ضلع المكعب ايضا

بك و باقى العمل و البرهان شبيه بما تقدم الا ان نسبة مربع حك الى مربع كا



كنسبة اك الى كج فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف و قوعات و انواع و احد انواعه يداخل الصنف الثالث و ليس في مسائله مستحيل و قد خرج بخواص قطعين زائدين [§ ١٠٩٠٣]

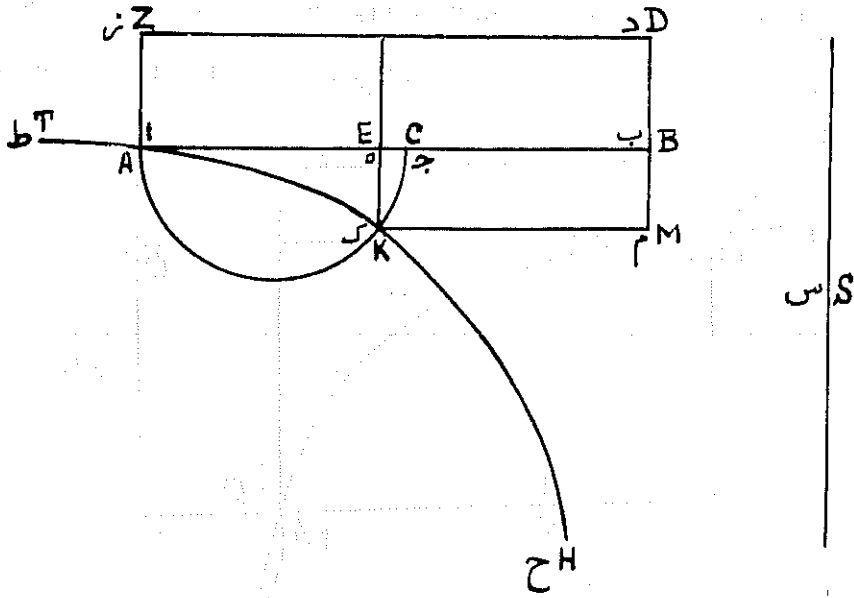
و اضلاع تعدل اموالا و اعدادا نضع بجد لعدة الاموال المفروضة و بد ضلع مربع مثل عدة الاضلاع عمودا على بجد و نعمل مجسما مساويا للعدد المفروض و يكون قاعدته مربع بد وليكن ارتفاعه س فخط س اما ان يكون اصغر من بجد او مثله او اعظم منه فليكن اولا اصغر منه و نفضل من بجد با مثل س و نتم اك و نعمل



على قطر اج دائرة اكج فتكون معلومة الوضع و نعمل على نقطة ا قطعاً زائدا لا يلقاه بد دز و هو قطع حاظ ويكون معلوم الوضع و حاظ يقطع ان المماس للدائرة فهو يقطع الدائرة لانه لو وقع بينها و بين از امكننا ان نخرج امن

نقطة α خطا يماس القطع كما بينه ابلونيوس في شكل σ من مقالة β فذلك الخط
اما ان يقع بين α و الدائرة و ذلك محال و امان ان يقع خارج α فيكون α
خطا مستقيماً واقعا بين القطع و بين ذلك الخط المماس و ذلك محال فليس يقع
قطع طاح بين الدائرة و بين α فهو اذن يقطعها و يقطعها باضطرار على نقطة أخرى
فليقطعها على κ فيكون κ معلومة الوضع و نخرج منها عمودى $\kappa\eta$ على
 $\beta\delta$ فيكونان معلومى الوضع و القدر كما عرفته و تتم سطح $\kappa\delta$ فسطح $\alpha\delta$ مثل
سطح $\kappa\delta$ و تلقى $\mu\zeta$ المشترك و نجعل $\alpha\kappa$ مشتركاً فيكون $\beta\kappa$ مثل $\alpha\delta$ فاضلاهما
متكافية و كذلك مربعات اضلاهما لكن نسبة مربع $\kappa\delta$ الى مربع $\eta\alpha$ كنسبة $\eta\beta$
الى $\eta\alpha$ فيكون نسبة مربع $\beta\delta$ الى مربع $\eta\alpha$ كنسبة $\eta\beta$ الى $\eta\alpha$ فالمجسم الذى
قاعدته مربع $\beta\delta$ و ارتفاعه $\eta\alpha$ مثل المجسم الذى قاعدته مربع $\eta\alpha$ و ارتفاعه $\eta\beta$ و
نجعل مكعب $\beta\delta$ مشتركاً فيكون المجسم الذى قاعدته مربع $\eta\alpha$ و ارتفاعه $\eta\beta$ مثل
مكعب $\eta\alpha$ مع المجسم الذى قاعدته مربع $\beta\delta$ و ارتفاعه $\eta\alpha$ لكن المجسم الاول مثل
عدة اموال مكعب $\eta\alpha$ المفروضة و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع $\beta\delta$ و ارتفاعه
 $\eta\alpha$ الذى عملناه مساوياً للعدد المفروض مشتركاً فيكون مكعب $\eta\alpha$ مع المجسم
الذى قاعدته مربع $\beta\delta$ و ارتفاعه $\eta\alpha$ هو عدة اضلاع مكعب $\eta\alpha$ المفروضة مثل عدة
امواله المفروضة مع العدد المفروض و ذلك المراد و ان كان σ مثل $\beta\delta$ فان $\beta\delta$
هو ضلع المكعب المطلوب برهانه ان مكعب $\beta\delta$ مثل عدة امواله المفروضة و المجسم
الذى ارتفاعه $\beta\delta$ و قاعدته مربع $\beta\delta$ هو مثل العدد المفروض و هو ايضاً مثل عدة
اضلاع مكعب $\beta\delta$ المفروضة فمكعب $\beta\delta$ مع عدة اضلاعه المفروضة مساو لعدة امواله
المفروضة مع العدد المفروض و كذلك هذا النوع يداخل الصنف الثالث لان
عدة اضلاع مكعب $\beta\delta$ المفروضة هو مثل العدد المفروض فيكون مكعب $\beta\delta$ مع
العدد المفروض مساوياً لعدة امواله المفروضة مع عدة اضلاعه المفروضة و ان كان
 σ اعظم من $\beta\delta$ فانا نجعل $\beta\delta$ مثل σ و نعمل الدائرة على قطر $\alpha\beta$ و القطع على
نقطة α يقطع الدائرة على κ كما بيناه و نخرج من نقطة κ عمودى $\kappa\eta$ كما

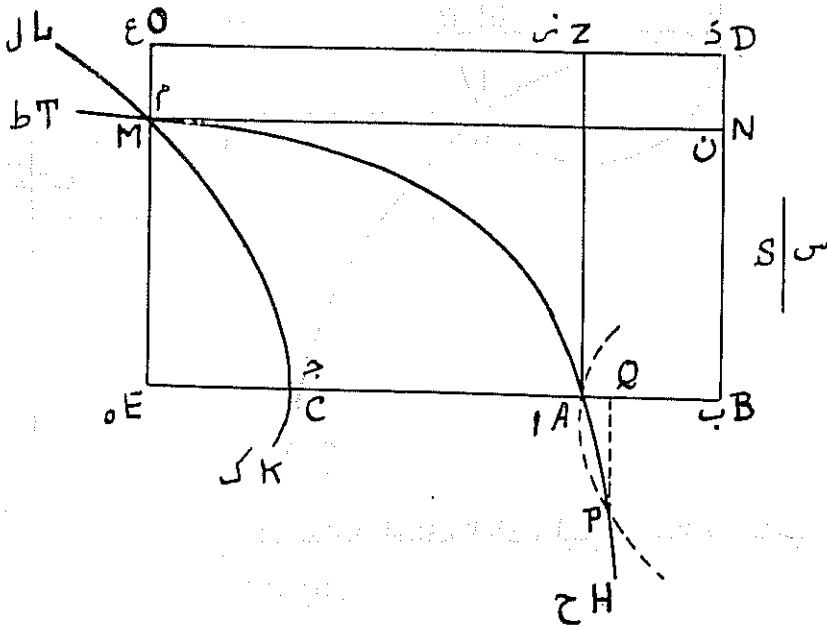
فعلناه في الشكل المتقدم فيكون هب هو ضلع المكعب المطلوب و البرهان عليه كما تقدم نلقى سطح هـد المشترك فيكون اضلاع هم هز متكافية و كذلك مربعاتها فيكون البرهان بعينه كما تقدم لا يتغير منه شيء فقد تبين ان لهذا الصنف اختلاف



وقوعات و انواع و نوع منها يداخل الصنف الثالث و ليس في مسائله مستحيل و قد خرج بخواص الدائرة و قطع زائد

[§١٠٩٠٤] الصنف الثالث من الاصناف الثلاثة الرباعية الباقية هو مكعب و اعداد تعدل اضلاعا و اموالا نفرض بجد لعدة الاموال و بد عمودا عليه و هو ضلع مربع مساو لعدة الجذور و نعمل هجسما قاعدته مربع بد و يكون مساويا للعدد المفروض وليكن ارتفاعه س فخط س اما ان يكون اصغر من بجد او مثله او اعظم منه وليكن اولا اصغر منه و نفصل من بجد با مثل س و نتمم بـز و نعمل على نقطة ا قطعاً زائدا لا يلقاه بد دز و هو قطع حاظ و نعمل قطعاً آخر زائدا رأسه نقطة ج و سهمه على استقامة بجد و كل واحد من ضلعيه القائم و المائل مثل ا ج فهو لامحالة يقطع القطع الآخر و هو كجل فليتقاطع قطع كجل و قطع حاظ على نقطة م فيكون

نقطة م معلومة الوضع لان القطعين معلوما الوضع و نخرج منها عمودى من همع
 فيكونان معلومى الوضع و القدر فسطح دا مثل سطح دم و يكون نه مثل زه
 على ما بيناه مرارا فاضلاعهما متكافية و كذلك مربعات اضلاعهما لكن نسبة مربع
 مه الى مربع ها كنسبة جه الى ها لقطع كجل فيكون نسبة مربع بد الى مربع
 به كنسبة جه الى ها فالمجسم الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه ها مثل المجسم الذى



قاعدته مربع به و ارتفاعه جه و نجعل المجسم الذى قاعدته مربع به و ارتفاعه بج الذى
 هو عدة اموال مكعب به مشتركا فمكعب به مثل عدة امواله المفروضة مع المجسم
 الذى قاعدته مربع بد و ارتفاعه ها و نجعل المجسم الذى ارتفاعه با و قاعدته مربع
 بد الذى عملناه مساويا للعدد المفروض مشتركا فيكون المجسم الذى قاعدته مربع
 بد و ارتفاعه به الذى هو مثل عدة اضلاع مكعب به المفروضة مع عدة اموال مكعب
 به المفروضة مساويا لمكعب به مع العدد المفروض و ان كان س مثل بج فان بج هو
 ضلع المكعب برهانه ان مكعب بج مثل عدة امواله المفروضة و العدد المفروض يكون

نوع من الثالث هو بعينه نوع من الثاني كما بيناه

[§ ١٠١٥٠١] واذ قد أتينا على الاصناف الخمسة والعشرين من مقدمات الجبر والمقابلة و استوفيناها حق الاستيفاء و حصلنا انواع كل صنف منها و اعطينا القانون في معرفة الممكن من المستحيل في مسائل ما يقع فيه المستحيلات و بينا ان اكثرها لا يقع فيه المستحيلات[†] فلنقل على اجزائها

[§ ١٠١٥٠٢] جزء الشيء هو عدد نسبتد الى الواحد كنسبة الواحد الى ذلك الشيء فان كان الشيء ثلاثة كان جزؤه ثلثا و ان كان الشيء ثلثا كان جزؤه ثلاثة و كذلك ان كان اربعة كان جزؤه ربعا و ان كان ربعا كان جزؤه اربعة و بالجملة فان جزء كل عدد هو الجزء السمي لذلك العدد كالثلث من الثلاثة ان كان العدد صحيحا و الثلاثة من الثلث ان كان العدد كسورا و كذلك جزء المال هو الجزء السمي لعدده صحيحا كان او كسورا و كذلك جزء الكعب ولكي يكون اظهر للحس فانا نضعها في لوح

جزء الكعب ☆ جزء المال ☆ جزء الجذر ☆

١	١	١
٢	٤	٨

الواحد ☆ الجذر ☆ المال ☆ الكعب ☆

٨	٤	٢	١
---	---	---	---

[§ ١٠١٥٠٣] فنسبة جزء الكعب الى جزء المال كنسبة جزء المال الى جزء الجذر و كنسبة جزء الجذر الى الواحد و كنسبة الواحد الى الجذر و كنسبة الجذر الى المال و كنسبة المال الى الكعب فهذه سبع مراتب متوالية على نسبة واحدة و نتكلم في معادلاتها لا غير و اما جزء مال المال و جزء مال الكعب و جزء كعب الكعب بالغا ما بلغ يكون ايضا متناسبة و لا حاجة لنا الى ذكرها اذ لا سبيل الى استنباطها

(†) نسختهى C (٤٠٣٠٢٠١) اين عبارت را بين « المستحيلات » و « فلنقل » اضافه دارد:

« فقد حان لنا ان نختم هذه الرسالة حامدين لله تعالى مصليين على خير الانبياء محمد وآله اجمعين و

ادن كما اتى هذه الاصناف » . و نیز رجوع شود به ذیل صفحہى ٥١ .

[١٠١٥٠٤] و اعلم انك ان اخذت الثمن الذى هو جزء الكعب كعبا فيكون جزؤه ثمانية الذى هو الكعب بالعكس فقس عليه سائره فجزء الكعب و جزء المال و جزء الجذر و الواحد هذه الاربعة تكون فى حكم الكعب و المال و الجذر و الواحد مثاله اذا قيل جزء مال يعدل نصف جزء جذر فكانه قيل مال يعدل نصف جذر فالمال يكون ربعا و هو جزء المال فالمال المطلوب يكون اربعة و جزؤه الربع و جزء جذره النصف و على هذا القياس فى مفرداته و اما فى المركبات اذا قيل جزء مال و جزءا جذر يعدل واحدا و ربعا فكانه قيل مال و جذران يعدل واحدا و ربعا فبالطريق الذى بيناه نخرج الجذر نصفا و المال ربعا الا انه بموجب السؤال جزء مال و جزءا جذر فيكون الربع الذى هو المال الاول جزء المال المطلوب فيكون المال المطلوب اربعة و كذلك فى الرباعيات اذا قيل جزء كعب و ثلاثة اجزاء مال و خمسة اجزاء جذر يعدل ثلاثة و ثلاثة اثمان و كانه قيل كعب و ثلاثة اموال و خمسة اجزاء يعدل ثلاثة و ثلاثة اثمان فبالطريق الذى بيناه بالقطع المخروطية يتبين ضلع الكعب فيكون هو جزء الجذر المطلوب فنجعل نسبه الى الواحد المفروض كنسبة الواحد المفروض الى خط آخر فيكون ذلك الخط هو ضلع المكعب المطلوب فقد لاح انه يكون خمسة وعشرون صنفا اخرى من هذه المعادلات بين هذه الاربعة متناسبة للخمسة والعشرين صنفا المتقدمة

[§ ١٠١٥٠٥] و اما ضرب بعضها فى بعض فمعلوم ظاهر من كتب الجبرين و انت يمكنك ان تتفطن له ولا تطول به القول [§ ١٠١٥٠٦] و اما معادلة هذه الاربعة بالاربعة المتقدمة فكما بين [§ ١٠١٥٠٦٠١] اذا قيل كعب يعدل عشرة اجزاء كعب اى عشرة اجزاء نفسه فالكعب هو الاول من المراتب السبع و اجزاء الكعب هو السابع منها فاضرب احدهما فى الآخر و خذ جذر المجتمع فما خرج فهو الواسط اعنى الرابع و هو المكعب المطلوب و تفضيل هذا الكلام ان كل عدد اذا ضرب فى جزئهسمى له خرج الواحد و ان ضرب فى جزئه خرج اثنان و ان ضرب فى عشرة اجزائه يخرج عشرة من العدد فكانه قيل فى مسألنا اى كعب اذا ضرب فى مثله كان

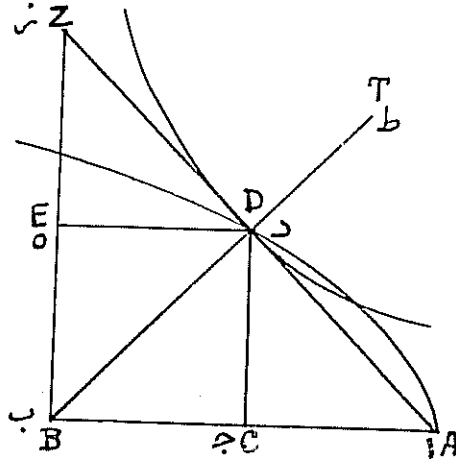
عشرة فجزره هو المكعب المطلوب ثم استخراج ضلع ذلك المكعب هو على ما بيناه بالقطع المخروطية وكذلك اذا قيل اي مال يعدل ستة عشر جزءا من اجزائه السمية له فاضرب الواحد في ستة عشر وخذ جذر المبلغ و هو اربعة فيكون هو المال المطلوب فكانه قيل اي مال ضربته في مثله يكون ستة عشر على القياس المتقدم و كذلك اذا قيل اي جذر يعدل اربعة اجزائه فكانه قيل اي عدد اذا ضربته في مثله حصل اربعة و هو اثنان و اما اذا قيل اي مال يعدل عدة اجزاء مكعب ضلعه فان استخراج ذلك لا يمكن بالطرق التي بينها اذ هو محتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة و ذلك قد بينه ابو على بن الهيثم رحمه الله تعالى الا انه صعب جدا لا يمكن ان يلحق بكتابتنا هذا و كذلك ان قيل اي مكعب يعدل عدة اجزاء مال ضلعه يحتاج الى المقدمة المذكورة فلا يمكن استخراجها بطرقنا و بالجملة فان ضرب الاول في السادس من هذه السبع المراتب يحتاج الى ايراد اربعة خطوط بين خطين ليتوالى الستة على نسبة واحدة كما بينه ابو على بن الهيثم رحمه الله تعالى و اما اذا قيل اي مكعب يعدل ستة عشر جزء ضلعه فيضرب الاول في الخامس فيكون جذر جذر المبلغ هو ضلع المكعب المطلوب و على هذا القياس كل ما يعادل من هذه السبع المراتب خاصه في النسبة [§١٠١٥٠٦٠٢] و اما في المركبات مثل جذر يعدل واحدا و جزء جذر فهو في قوة مال يعدل جذرا و اثنين من العدد لان هذه الثلاثة مناسبة للثلاثة المذكورة فنستخرجه بالطريقة المذكورة يخرج المال اربعة و هو يعدل جذره مع اثنين من العدد فجزره هذا هو المطلوب و جذره اثنان و هو يعدل واحدا مع جزء جذره و كذلك ان قيل مال و جذراه يعدل واحدا و جزء جذر يكون في قوة كعب و مالان يعدل جذرا و اثنين فنستخرج ضلع المكعب كما بيناه بالقطع المخروطية فيكون مربع ذلك الضلع هو المال المطلوب و كذلك ان قيل جذر و اثنان من العدد و عشرة اجزاء جذر يعدل عشرين جزء مال فيكون في قوة كعب و مالان و عشرة اجزاء يعدل عشرين عددا فنستخرج ضلع المكعب بالطريق

تأليفى هذه الرسالة بخمس سنين ان لابي الجود محمد بن الليث المهندس رحمه الله
 كلاما فى تعديد هذه الاصناف و تحليل اكثرها الى القطوع المخروطية من غير
 استيفاء جميع انواعها و تمييز الممكن من المستحيل بل بحسب ما تأدى به
 النظر فى المسائل الجزئية اليها فلم استبعد ذلك لان هذين الصنفين الذين نسبتها
 الى واحد ممن تقدمنا منسوبان اليه و قد تصفحهما فى جملة تصنيفات ابي الجود
 بخط الحازمي الخوارزمي و احدهما من الثلاثيات و هو مكعب و عدد يعدل
 اموالا و له انواع و لانواع شرائط كما هو مذكور فى هذه الرسالة و لم يستوف
 شرائطها ثم ابطال فى حكمه ايضا فى هذا الصنف بقوله ان كان ضلع المكعب
 المساوى للعدد اعظم من نصف عدة الاموال استحالت المسئلة و ليس كذلك كما
 بيناه و ذلك بسبب انه لم يتفطن لتماس القطعين او لتقاطعهما فى ذلك الجانب
 الآخر و الثانى من الرباعيات و هو مكعب و عدد و اضلاع تعدل اموالا فلعمري
 انه قد احسن فى الوقوف على هذه المسئلة بعد ما اعيت جماعة من المهندسين لكنه
 مسئلته جزئية و للصف انواع و شرائط فان فى مسائله ما يستحيل فلم يستوفها
 حق الاستيفاء و انما ذكرت هذا ليقابل من يصل اليه الرسلتان ان كان ما حكي
 لى من حال هذا الفاضل حقا بين رسالتى هذه و المنسوبة الى هذا الفاضل فانى
 اظن لم آل جهدا فى الاستيفاء مع الانجاز و تجنب التطويل المبرم و لو شئت
 لأتيت بمثال لكل واحد من هذه الاصناف و انواعها لكنى خشيت التطويل
 فافتصرت على هذه القوائين الكلية تعويلا على ذهن المتعلم لان من يكون ذهنه
 بحيث يتصور هذه الرسالة لا يقصر عما يرومه من الامثلة الجزئية و استقرآئها و
 الله الموفق للصواب و عليه المعول فى كل حال

[§ ١٠١٠٢] و بعد فان واحدا من اصحابنا اقترح علينا ان نبين خطاء ابي

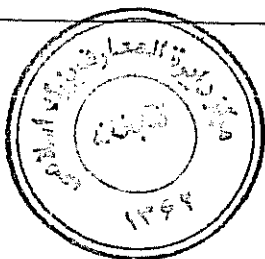
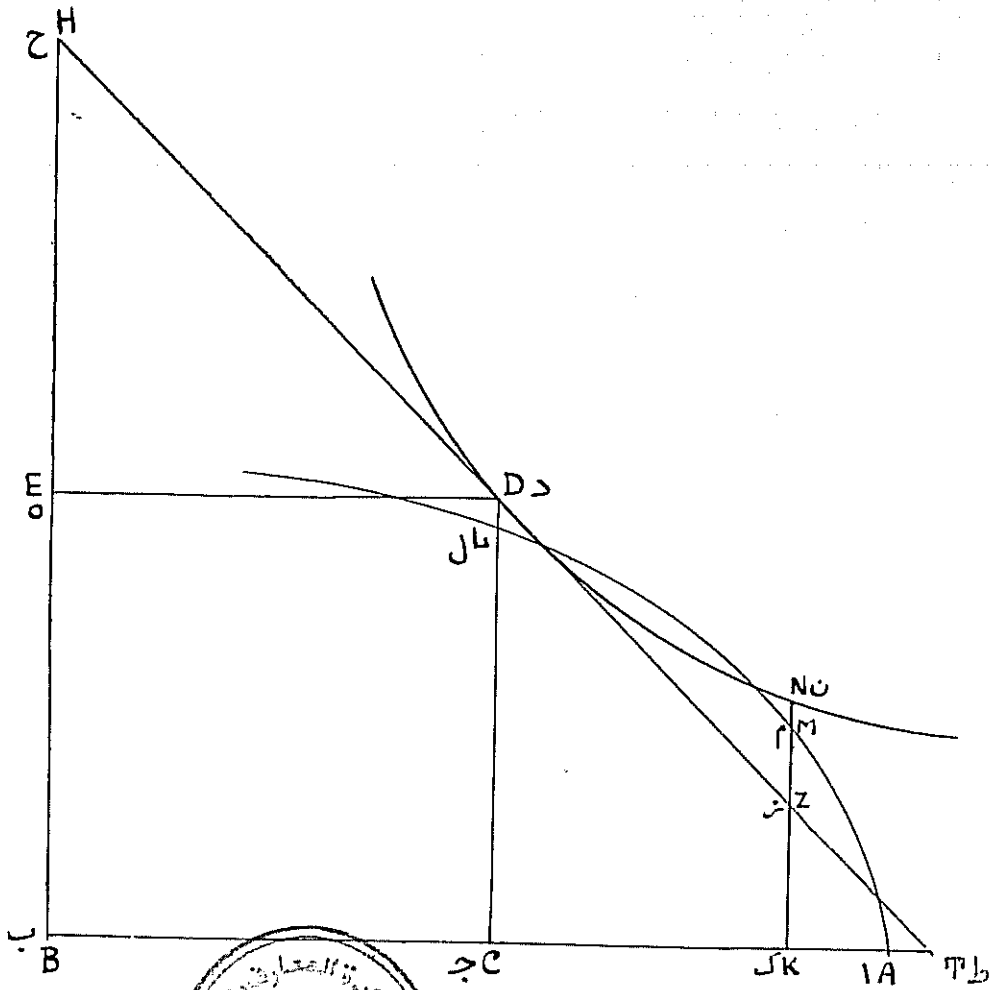
الجود محمد بن الليث فى الصنف الخامس من الاصناف الستة الثلاثية التى تنحل
 بالقطوع و هو مكعب و عدد يعدل اموالا قال ابو الجود نضع عدة الاموال خط اب
 ونفصل منه ضلع مكعب مساو للعدد و هو بـجـ فخط بـجـ اما ان يكون مثل جـ او

اعظم مند او اصغر قال اذا كان مثل بجد فانا نتمم سطح جه و نعمل على د قطعاً زائدا لا يلقاه اب به ونعمل قطعاً مكافياً رأسد نقطة ا و سهمه اب و ضلعه القائم



بجد فيمر القطع لامحالة على نقطة د كما بيناه ثم زعم ان القطعين يتماسان على نقطة د و اخطأ لانه يجب ان يكونا متقاطعين برهانه انا نجعل بز مثل با و نصل از فهو يمر على د لامحالة و يكون في داخل القطع المكافى ويكون زاوية ادب قائمة و زاوية ابد مثل زاوية زبد و معلوم ان سهم القطع الزائد يقسم الزاوية المحيطة بالقطع بنصفين فيجب ان يكون خط بد سهم القطع الزائد الذى على د و خط اد مواز لخطوط الترتيب فهو يماس القطع الزائد فيلزم ان يكون المكافى قطعاً للزائد لا يجوز ان يكون بينه و بين الخط المماس له لانه لو كان مماساً له لكنت الخطوط الخارجة من نقطه د الى اية نقطة فرضت على محيط اد واقعة بين القطع و بين الخط المماس له و ذلك محال فباضطرار ان يكون المكافى يقطع الزائد على نقطة اخرى فيما بين ا د و ذلك ما اردنا ان نبين فهذا وجه خطأ هذا الفاضل فى قوله ان القطعين يجب ان يكونا متماسين على د و اما قوله اذا كان بجد اعظم من جا فان المسئلة مستحيلة و ذلك لان القطعين لا يتلاقيان كلام باطل بل يجوز ان يتلاقيا بالتقاطع او بالتماس على نقطة او نقطتين فيما بين ا د

القطعين لا يتلاقيان و ذلك المراد ولكي يكون اظهر فانا نضع اب ثمانين و بـج الذي هو ضلع المكعب المساوي للعدد احدا واربعين و هو اعظم من اج فنقطه د تقع من خارج القطع المكافئ فليعر المكافئ على ل فيكون خط لـج جذر ألف و خمس مائة وتسعة و تسعين و هو اربعون الا شيئا يسيرا و نجعل طـج مثل جب و بـج مثل بط و نصل طـح فهو يماس القطع الزائد كما بيناه و نفصل اك ربع اج و نخرج منة عمودا يقطع القطع على نقطة م فيكون نسبة مربع لـج الى مربع كم كنسبة



اج الى اك لانهما خطان من خطوط ترتيب المكافى و قد بينه ابلونيوس فى شكل يـ طـ من مقالة آ فيكون كم نصف لـ جـ و هو عشرون الا شيئاً يسيراً و جـ طـ احدا و اربعين و اك تسعة و ثلاثة ارباع و اط اثنان فيكون خط كـ زـ احد عشر و ثلاثة ارباع لان نسبة كـ زـ الى كـ طـ كنسبة حب الى بط و هما متساويان فخط زـ م يكون اعظم من ثمانية و هو فى داخل النخط المماس للزائد فهو فى هذا الوضع يكون فى داخل القطع الزائد لا محالة نعم قد يكون القطعان غير متالقيين اذا كان بـ جـ اعظم من جا لكن ذلك غير واجب فى جميع الانواع فقد ابطال ابو الجود فى هذا الحكم فافهمه ولو اردت ان تجد امثلة عديدة لا يمكنك ذلك [§ ١٠١١٠٢٠١] وهذه المسئلة هى اضافة مجسم الى خط مفروض ينقص عن تمامه مكعبا و يكون مساويا لمجسم آخر مفروض فان كان ضلع المكعب المساوى للمجسم المساوى مثل نصف النخط او اصغر فان ذلك واجب و ان كان اعظم فانه يمكن ان يقع فيدهما يستحيل بحسب ما بيناه لك * والله الميسر لحل هذه العويصات بمنه و كرمه

تمت الرسالة ظهيرة يوم الاحد الثالث والعشرين

من شهر ربيع الاول سنة ١٠١١ هـ والحمد

لله وحده و كفى فسلامه على عباده الذين اصطفى

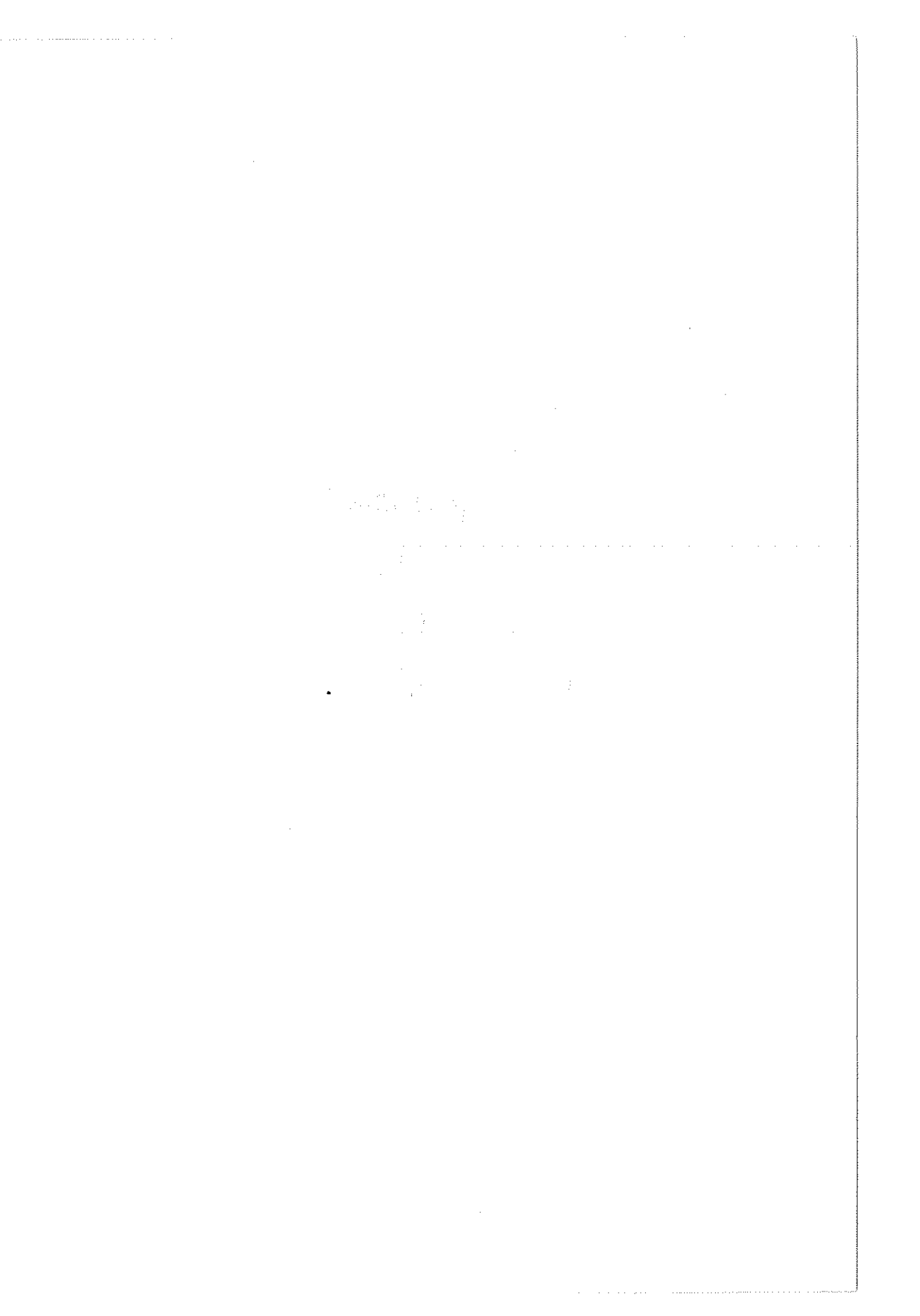
قسمت دوم

هذه

رسالة

لابى الفتح عمر بن ابراهيم الخيامى

(متن)

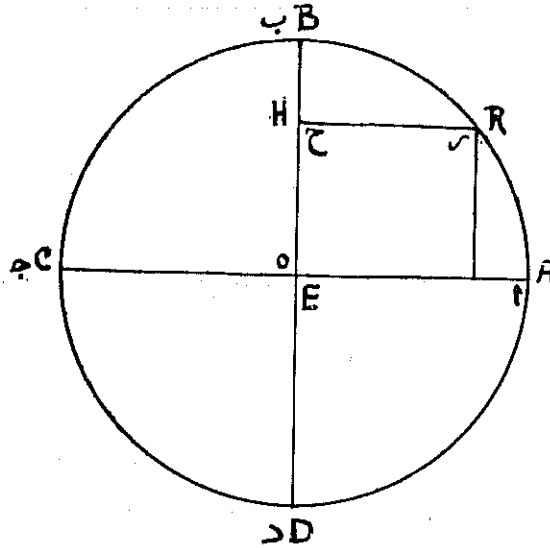


بسم الله الرحمن الرحيم و به نستوثق و عليه نستعين

هذه رسالة

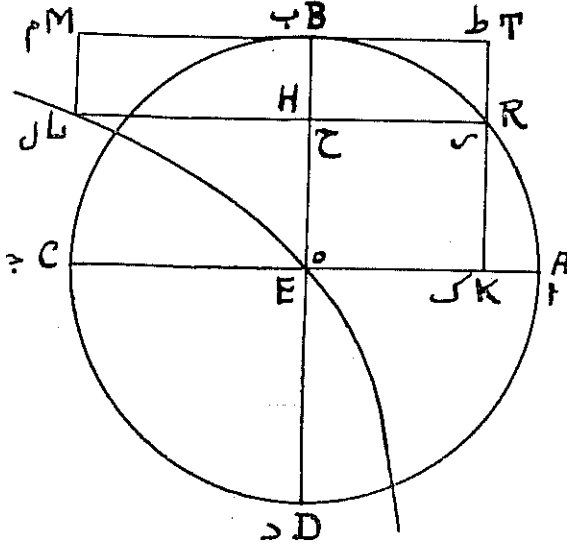
لابي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي

[§ ٢٠١] نريد ان نقسم ربع دائرة اب من دائرة ا ب ج د بقسمتين على نقطة مثل ر و نخرج عمود رح على قطر ب ج فيكون نسبة اه الى رح كنسبة ه ح الى ح ب و ه مركز الدائرة و اه نصف القطر



فانا نزل انا قد فعلنا حتى يؤدي التحليل الى امر معلوم ثم نركب على تلك الصفة فتعيد دائرة ا ب ج د و مركزها ه و نخرج ا ج ب د يتقاطعان على زوايا قائمه و نخرج عمود رح يكون نسبة اه اليه كنسبة ه ح الى ح ب و نخرج عمودي ك ر ط ب م و تتم سطح ط ل بعد ان جعلنا خط ب م مثل اه فلان نسبة اه الى رح كنسبة ه ح الى ح ب و ب م مثل اه يكون ضرب ب م في

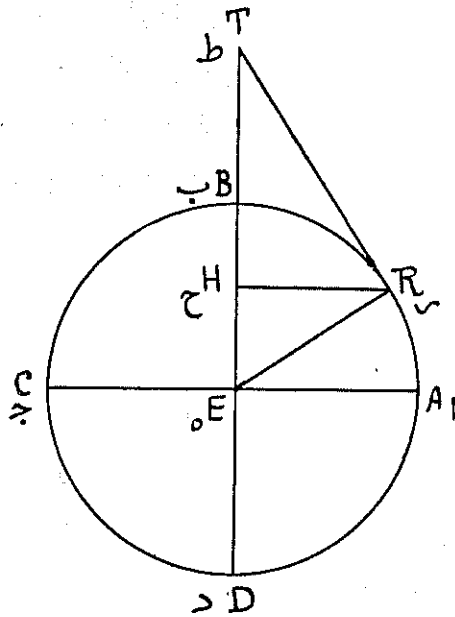
ح ب مساويا لضرب ر ح في ه ح كما بينه اقليدس في يو من و الاصول و ضرب
ب م في ح ب مثل سطح ب ل و ضرب ر ح في ه ح مثل سطح ح ك فيكون سطح



ب ل مساويا لسطح ح ك و نجعل سطح ح ط مشتركا فيكون سطح ط ه مساويا
لسطح ط ل فان عملنا قطعا زايدا لا يلقاه خطا ك ط ط م و يمر على نقطة ه كما
بينه ابلونيوس في نط من المقالة الاولى من كتاب المخروطات و الشكل و ه
من المقالة الثانية من هذا الكتاب اذ هذا العمل يتم بهذه الاشكال الثلاثة فان ذلك
القطع الزايد يمر على نقطة ل لا محالة كما يتبين من عكس الشكل الثامن من المقالة
الثانية من كتاب المخروطات و نقطة ه معلومة الوضع و خط ب م معلوم الوضع و
القدر الا ان نقطة ل عند التركيب غير معلومة الوضع لانها لو كانت معلومة الوضع
لكانت نقطة ح معلومة الوضع لان خط ح ل معلوم القدر فيكون خط ب ح معلوم
القدر و لكان الشكل معلوما و كذلك خط ط ك غير معلوم الوضع لانه لو كان معلوم
الوضع لكانت نقطة ط معلومة الوضع و لو كانت نقطة ط معلومة الوضع لكان خط
ط ب معلوم القدر و لو كان خط ط ب معلوم القدر لكان الشكل معلوما و ليس كذلك
اذ المقصود علم الشكل فلو كان نقطة ل معلومة الوضع او خط ط ك معلوم الوضع

لكان يمكن ان يعمل الشكل و ينال المقصود عند التركيب بسهولة و ليس المعرفة بواحدة منها سهلة فحسب * . هذه الطريقة للباحث المستبصر بكتاب المخروطات لا يوصل الى المطلوب بطريقة اخرى امكنه التفتن لهذه الطريقة وانما اوردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للمتعلم و توطية له و لم اتممها و لم اركبها على الوجه الهندسى لصعوبتها و كثرة افتقارها الى عدة مقدمات و غيره من القطوع المخروطية فليتمم من شاء من العالمين بقطوع المخروط بعد ما تحصلت له الطريقة التي اذكرها فانها و ان كانت ايضا مفتقرة الى مقدمات مخروطية فهي اسهل بكثير من الاولى و مقدماتها اعم منمنفعة

[§ ٢٠٢] فاقول بعون الله نعيد الشكل و نزل بالتحليل انا قد فعلنا ما اردنا و صارت نسبة ا ه الى ر ح كنسبة ه ح الى ح ب و نخرج من نقطة ر خطا



يماس الدائرة و هو ر ط على ما بينه اقليدس في يو من ج و نخرج ه ب على

(*) در اصل چنین بود .

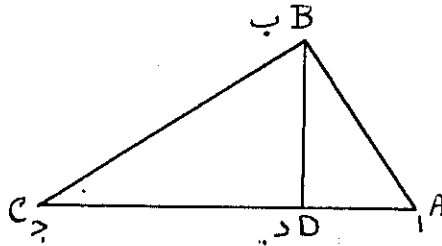
استقامته حتى يقطع الخط المماس على نقطة ط و نصل ره فلان مثلث ه ر ط زاوية ر منه قائمة و خرج من زاوية ر عمود رح الى القاعدة فعلى ما تبين في شكل ح^١ من و يكون نسبة ه ح الى ح ر كنسبة ح ر الى ح ط فيكون مربع ح ر مساويا لضرب ه ح في ح ط و لكن مربع ح ر مساو لضرب د ح في ح ب فيكون ضرب د ح في ح ب مساويا لضرب ه ح في ح ط فيكون نسبة ح د الى ه ح كنسبة ح ط الى ح ب على ما تبين في يو^١ من و بالتفضيل يكون نسبة ه د الى ه ح كنسبة ب ط الى ب ح و قد كانت نسبة ا ه الى رح كنسبة ه ح الى ح ب فبالتبديلين يكون نسبة ا ه الى ه ح كنسبة رح الى ح ب و قد كانت نسبة د ه الى ه ح كنسبة ب ط الى ب ح فيكون نسبة رح الى ح ب كنسبة ب ط الى ح ب و المقادير التي نسبتها الى شيء واحد بعينه متساوية فانها ايضا متساوية كما تبين في شكل ط^١ من مقالة ه^١ فيكون رح مساويا لب ط و ره مثل ه ب فيكون مجموع ه ر ح مساويا لخط ه ط فقد ادى التحليل الى مثلث قائم الزاوية بشرط ان يكون وتر الزاوية القائمة مساويا لاحد الضلعين المحيطين بالزاوية مجموعا الى العمود الخارج منها الى وترها فكلما عملنا مثلثا قائم الزاوية بهذه الصفة امكنا تركيب هذا الشكل على الوجد الهندسى و ان هذه المقدمة اعنى هذا المثلث بهذه الصفة عظيمة المنفعة في امثال هذه الاشكال و له خواص اخرى يذكر بعضها حتى يتفطن الناظر لمنفعتها في اكثر اشباه هذه المسئلة

[٢٠٣٠١ §] اقول ان هذا المثلث لا يمكن ان يكون متساوى الساقين لانه لو كان ضلع ه ر مثل ر ط لكان ه ح مثل ح ط و لكان العمود مساويا لكل واحد منهما و لكان ه ط ضعف العمود و لكان مجموع ه ر والعمود اعظم من الوتر و قد فرضناه مساويا له هذا خلف [٢٠٣٠٢ §] و اقول ان ه ر اصغر من ر ط لانه لو كان اعظم منه لكان ه ح اعظم من ح ط و لكان ح ر الذى هو الخط الوسط بين خطي ه ح ط اعظم من ح ط و قد فرض ح ر مثل ط ب فيكون ط ب اعظم من ط ح

الجزء اعظم من الكل هذا مجال فقد تبين ان المثلث على هذه الصفة يكون الضلع الاصغر مع العمود مساويا لضلع الاعظم و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٣٠٣] و من خواصه ان الضلع الاعظم من الضلعين المحيطين بالزاوية القائمة مساو لمجموع الاصغر مع القطعة التي يفرزها العمود من الوتر من جانب الضلع الاصغر و ليكن مثالنا من الشكل المتقدم اقول ان مجموع $هـ ر هـ ح$ مساو لضلع $ر ط$ برهانه ان نسبة $هـ د$ الى $هـ ح$ كنسبة $ط ب$ الى $ب ح$ فبالتركيب يكون نسبة $د ح$ الى $ح هـ$ كنسبة $ط ح$ الى $ح ب$ و بالتبديل يكون نسبة $د ح$ الى $ح ط$ كنسبة $هـ ح$ الى $ح ب$ ولكن نسبة $هـ ح$ الى $ح ب$ كنسبة $هـ ر$ الى $ر ح$ و نسبة $ر هـ$ الى $ر ح$ كنسبة $ر ط$ الى $ح ط$ لتشابه مثلثي $هـ ر ح$ و $ر ح ط$ فيكون نسبة $ر ط$ الى $ح ط$ كنسبة $د ح$ الى $ح ط$ فيكون $ر ط$ مساويا لـ $ح د$ و $ح د$ هو مثل مجموع $هـ ر ح$ مثل $ر ط$ و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٣٠٤] و من بعد ما تقدم هذا فاننا نضع مثلث $ا ب ج$ و زاوية $ب$ منه قائمة و نخرج من نقطة $ب$ عمود $ب د$ على $ا ج$ و لننزل بالفرض ان ضلع $ا ب$ مع عمود $ب د$ جميعا مثل $ا ج$ حتى يؤدي التحليل الى معلوم ثم نركبه حتى يحصل لنا مثلث بالصفة المذكورة و لكن نكون مقتدين بالمتقدمين الافاضل من



اصحاب الصناعة في تسهيل الطرق الحسية باستعمالهم الفاظ اهل الجبر في امثال هذه المسائل فنستنهج سبيلهم في ذلك و ان لم يستعمل الفاظ الجبريين جاز و يكون العمل واحدا الا ان هذه الالفاظ اذا استعملت كان الضرب و القسمة اسهل و نضع

خط اد منطفا في الطول و ليكن عشرة و نضع بد شيئا و نضربه في مثله يكون
مالا و نضرب عشرة في مثلها يكون مائة و نجمعها يكون مائة و مال و هو مربع اب
كما تبين في مز من آ و من ان نسبة اج الى اب كنسبة اب الى اد لتشابه مثلثي
ابج ابد يكون ضرب اج في اد مساويا لمربع اب فاذا قسمنا مربع اب
الذي هو مائة عدد و مال على اد الذي هو عشرة يخرج من القسمة عشرة عدد و عشر
مال و هو اج و قد كنا فرضنا ان اج مثل مجموع اب بد فيكون مجموع اب
بد عشرة عدد و عشر مال نقصنا منه بد الذي هو الشيء يبقى عشرة عدد و عشر مال
الاشيء و هو اب فنضربه في مثله يحصل مائة من العدد و ثلثة اموال و عشر عشر مال
مال الاشرين شيئا و الا خمس مكعب يعادل مائة من العدد و مالا فيجبر و يقابل و
يقاص يبقى مالان و عشر عشر مال مال يعدل عشرين شيئا و خمس مكعب فيقسم
الجميع على الشيء ليرجع الى اقل اربعة اجناس على هذه النسبة فيخرج من القسمة
عشر عشر مكعب و شيان يعدل خمس مال و عشرين من العدد فيكمل عشر عشر
مكعب بان يضرب في مائة و كذلك جميع الاجناس نضربه في مائة فيحصل مكعب
و مائتا شيى يعدل عشرين مالا و الفين من العدد فقد ادى التحليل الى معادلة اربعة
اجناس و هذا لا يمكن ان يستنبط بالهندسة المسطحة لمكان المكعب و يحتاج فيها
الى قطوع المخروطات [٢٠٤٠٦ §] و من قبل ان نخوض في ابانة مطلوبنا بالقطوع
نقدم معنى يكون تحريضا للناظر في هذه الرسالة على طلب العلوم و اتقان القدر
الذي ننبه عليه و شكرا لنعم الله تعالى على بعض عباده فان التحدث بالنعم شكر عظيم
للمنعم كما انزل و اما بنعمة ربك فحدث فلا يظن الناظر ان هذا كلام جره الى
هذا المقام حب المباهاة فان ذلك من عادات العجزة المتصلفه المعجبه و حق السفلة
الاعجاب فان نفوسهم لا تسع الا لتفطن شيء نزر من العلوم فلما ادر كوه ظنوا ان ذلك
القدر هو الذى حصر العلوم و جمعها و نعوز بالله من ان يسؤل لنا انفسنا آراء تتخبطننا
و تمنعنا عن درك الحقايق و الفوز و النجاة

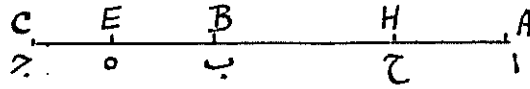
[٢٠٤٠٢ §] اقول ان هذا الذى يسميه الجبريون مال مال امر موهوم في

المقادير المتصلة ولا وجود لها في الاعيان بوجه من الوجوه وانما يطلق على المقادير المتصلة لفظة مال المال و مال الكعب و كعب الكعب و ماعداها من حيث اطلاق العدد عليها اذا العدد و المقادير يشترك في جنس الكمية على ما يتولى بيانه صاحب العلم الاعلى فاما الامور التي تستعمله الجبريون و لها وجود في الاعيان و المقادير المتصلة اربعة العدد و الشيء و المال و المعكب اما العدد فهو ان يؤخذ العدد مجردا عن جميع المواد في العقل ولا يكون له وجود في الاعيان اذ العدد شيء معقول كلي لا يوجد الا متشخصا بالمواد و اما الشيء فمنزلته من المقادير المتصلة منزلة الخط المستقيم و اما المال فهو بمنزلة المربع المتساوي الاضلاع القائم الزوايا الذي ضلعه ذلك الخط المستقيم المطلق عليه لفظ الشيء و المكعب هو المجسم الذي يحيط به ستة سطوح مربعة و متساوية و متساوية الاضلاع و قائمة الزوايا الذي ضلعه الخط المستقيم المطلق عليه اسم الشيء و احد سطوحه المربع المطلق عليه اسم المال فهو الحاصل من ضرب الشيء في مثله ثم ضرب المبلغ في الشيء و قد بين عمله اقليدس و برهن عليه في يز من مقالة يج من كتابه في الاصول و اما مال المال الذي هو عند الجبريين حاصل من ضرب المال في مثله فلا معنى له في المقادير المتصلة لان المربع الذي هو سطح كيف يمكن ان يضرب في مثله اذ السطح ما له بعدان و بعدان في بعدين اربعة ابعاد و الجسم لا يمكن ان يكون له اكثر من ثلاثة ابعاد فجميع الاشياء التي يخرج بالجبر انما يخرج من هذه الاربعة الاجناس و من ظن من الناس ان الجبر حيلة في استخراج الاعداد المجهولة فقد ظن محالا فلا تلتفت الى الظاهرين المختلفين بل الجبر و المقابلة امور هندسية برهن عليها في مقالة ب من الاصول في شكلى ه و زمه [§٢٠٤٠٣٠١]

و اما من قال مال مال و ثلثة اموال يعدل ثمانية و عشرين من العدد فنصف الاموال و ضربه في مثله و زاده العدد و اخذ جذر المبلغ فكان خمسة و نصف و نقص منه نصف ما لاموال فبقى اربعة و هو المال و مال المال ستة عشر ثم ظن ان مال المال استنبط بطريق الجبر فهو ضعيف الظن جدا لانه لم يستنبط مال المال بل استنبط

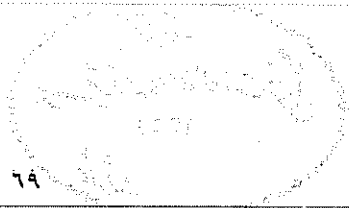
المال فكانه مال و ثلاثة اجذار يعدل ثمانية وعشرين ثم استخراج الجذر بالمقالة الثانية و صادر على ان ذلك الجذر مال مال و هذا سر تطلع منه على اسرار [٢٠٤٠٣] و نرجع الى ما كنا فيه نقول ان الثلاثة الاجناس الاول اعنى الاعداد و الجذور و الاموال عند المعادلة ترجع الى ست شعب ثلثة مفردة و ثلثة مقترنة و يمكن ان يعلم مجهولاته بالمقالة الثانية على ما هو مذکور مشروح في كتب الجبرين و اما اذا نظر في المكعب و عودل بينه و بين سايره احتيج حينئذ الى المجسمات وخاصة المخروطات و قطوعها لكون المكعب مجسما اما مفرداته فثلاثة مكعب يعدل الاموال و هو الجذور يعدل الاعداد و مكعب يعدل الجذور و هو اموال يعدل الاعداد و مكعب يعدل الاعداد و لا سبيل الى استنباطه الا بالطرق العديدة المعدة لاستخراج الكعاب و اما بالطرق الهندسية التي يعمل فيها مجسم متوازي السطوح مساويا لمجسم آخر متوازي السطوح مفروض و يفترق في امثال هذه الاعمال الى قطوع المخروط باضطرار او الى آلات عند من لا يعرف المخروطات و اما مقترناته فهي صنفان اما ثلاثي و اما رباعي فالثلاثي مكعب و اموال يعدل اعدادا ولا يخرج الا بالقطوع و مكعب و اموال يعدل جذورا و يكون حكمه حكم مال و جذور يعدل اعدادا و مكعب و اعداد يعدل جذورا و لا يخرج الا بالقطوع و مكعب و اعداد يعدل اموال و لا يخرج الا بالقطوع و مكعب و اعداد يعدل اموال و يكون حكمه حكم مال و عدد يعدل جذرا و اموال و جذور يعدل مكعبا و يكون حكمه حكم جذور و اعداد يعدل مالا و اموال و اعداد يعدل مكعبا و لا يخرج الا بالقطوع و جذور و اعداد يعدل مكعبا و لا يخرج الا بالقطوع فهذه تسعة انواع ثلاثية نائة منها يخرج بثانية الاسطوانات و ستة منها لا يخرج الا بقطوع المخروط و اما الرباعي مكعب يعدل اموالا و جذورا و اعدادا مكعب و جذور و اعداد يعدل اموالا مكعب و اموال و اعداد يعدل جذورا مكعب و اموال و جذور يعدل اعدادا مكعب و مال يعدل جذورا و اعدادا مكعب و جذور يعدل اموالا و اعدادا مكعب و اعداد يعدل اموالا و جذورا

فهذه سبعة انواع رباعية لا يخرج شيء منها الا بقطع المخروطات فقد حصل من المركبات ثلثة عشر نوعا لا يخرج الا بقطع المخروط و نوع من المفردات الا بقطع المخروط و هو مكعب يعدل اعدادا [٢٠٤٠٤] و اما المتقدمون الرياضيون من غير اهل لساننا فلم ينبهوا على شيء من هذا ولم يصل اليها ولم ينقل الى لساننا و اما المتأخرون من اهل لساننا فاول من اضطر الى صنف ثلاثي من هذه الاصناف الاربعة عشر هو الماهاني المهندس فانه كان يحل المقدمة التي اخذها ارشميدس مسلمة في شكل د من مقالة ب من كتاب الكرة و الاسطوانة و هي هذا الذي ذكره قال ارشميدس ان خطي اب بج معلوما القدر و متصلان على استقامة و نسبة بج الى به معلومة فيكون ج ه معلوما على ما تبين في المعطيات ثم قال و نجعل نسبة ح ج الى ج ه كنسبة مربع اب الى مربع اح و لم يقل كيف نعلم هذا لان هذا محتاج الى قطع المخروط باضطرار و لم يورد في الكتاب شيئا مبني على

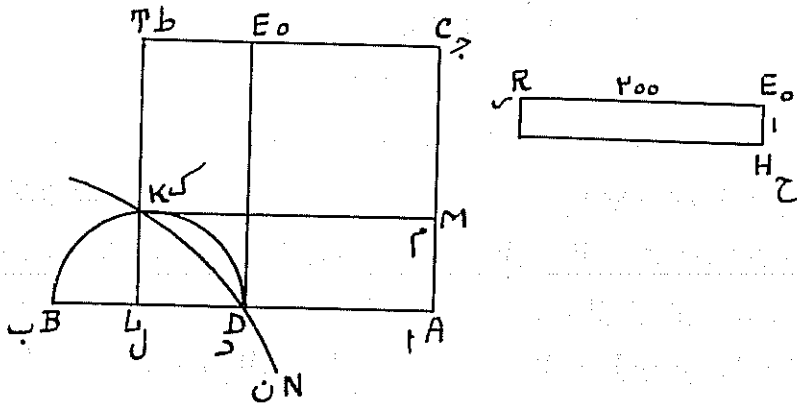


القطع الا هذا فاخذ هذا ايضا مسلما و الشكل الرابع هو في قسمة الكرة بسطح مستو على نسبة معلومة و كان الماهاني يستعمل الفاظ الجبريين للتسهيل فلما ادى التحليل الى اعداد و اموال و كعاب متعادلة و لم يمكنه ان يستخرجه بقطع المخروطات جزم القول بان هذا ممتنع فهذا الفاضل مع فضله و تقدمه في هذه الصناعة استبهم عليه حل صنف من هذه الاصناف حتى نبغ ابو جعفر الخازن و تنبه على طريقة و اتى به في رسالة و ابونصر بن عراق مولى امير المؤمنين من اهل خوارزم كان يحل المقدمة التي اخذها ارشميدس في استخراج ضلع المسبع في الدائرة و هي المربع بتلك الصفة المذكورة و كان يستعمل الفاظ الجبريين فادى التحليل الى مكعب و اموال يعدل اعدادا فاستخرجه بالقطع و هذا الرجل لعمرى كان من معالي الطبقة في الرياضيات و المسئلة التي اعجزت ابا سهل الكوهي و ابا الوفاء

البوزجاني و ابا حامد الصغاني و جماعة من اصحابهم الذين كانوا منقطعين الى جناب
عضدالدوله بمدينة السلام هي هذه عشرة قسمتها قسمين فكان مجموع مربعيها مع
الخارج من قسمة الكثير على القليل اثنين و سبعين عددا و كان يؤدي التحليل الى
اموال يعدل مكعبا و جذورا و اعدادا و هؤلاء الافاضل كانوا متحيرين في هذه المسئلة
مدة مديدة حتى استخرجها ابوالجود و خزنها في دارالكتب الملوك السامانية
فهذه ثلثة اصناف اثنان منها ثلاثيان و واحد رباعي من المركبات و المقردة الواحدة
اعنى المكعب الذي يعدل الاعداد فانها قد استخرجها من تقدمنا من الافاضل و لم
يصل الينا منهم كلام في العشر البواقي و لا في هذا التفصيل فان تراحت المدة و
صحبنى التوفيق اودعت هذه الاصناف الاربعة عشر بجمع شعبها و فروعها و تمييز
الممكن منها من الممتنع فان بعض اصنافه مفتقر الى شرايط حتى يصح رسالة
شاملة على عدة مقدمات لها عظمة المنفعة في اصول هذه الصناعة معتصما بجبل التوفيق
من الله و متوكل عليه انه المستعان على جميع الامور و به الحول و القوة جلت عظمته
[§ ٢٠٥] و نرجع الى مسألتنا هذه بعد تمهيد هذه المقدمات و هي طلب مكعب
يكون مع مائتين ضلعه عدلا لعشرين مربع ضلعه مع الفين من العدد نضع خط ab
مساويا لعدد المربعات و هو عشرون و خط bc مائتان و خط cd واحدا فيكون سطح
 $abcd$ مائتين و نجعل مربعا مساويا لسطح $abcd$ على ما تبين في شكل يد من مقالة b
و ليكن ضلع ذلك المربع مثل aj و aj عمود على ab و هو جذر مائتين و ad هو
خارج القسمة اذا قسم العدد على عدد الجذور و هو عشرة لان العدد الفان و عدد
الجذور مائتان و اذا قسم الالفان على مائتين يخرج عشرة و db ايضا عشرة و نعمل
على db نصفدايرة dkb و نخرج de يوازي aj و تتم سطح ade و نعمل قطعاً زايدا
يمر على نقطه e و لا يلتقي خطي aj و de كما بينه ابولونيوس الفاضل في الشكل $نط$
من المقالة الاولى من كتاب المخروطات و الشكل $هـ$ و من المقالة الثانية من ذلك
الكتاب ان هذا العمل لا يتم الا بهذه الاشكال الثلاثة و هو قطع $ندك$ و يقطع
الدايرة على نقطه $ك$ و نخرج من نقطة $ك$ عمود $كج$ على ab فاقول ان ضلع $ال$ هو



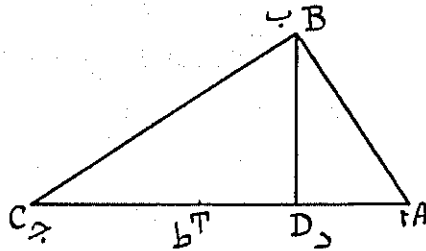
ضلع مكعب يكون مع مائتي ضلعه عدديلا لعشرين مربع ال مع الفين من العدد برهانه انا نخرج لك على استقامة حتى يقطع خط جه على نقطة ط و نخرج لك م يوازي ال فلان لكط يوازي ده و لك م يوازي اد يكون سطح اه القائم الزوايا مساويا لسطح لكج القائم الزوايا لان نقطتي ك د على محيط قطع زايد لا يلقاه خطا اج حط و قد



خرج من كل واحدة منها خطان الى الخطين اللذين لا يلتقيان موازيين لنظيريهما الخارجين من النقطة الاخرى و قد برهن عليه ابلونيوس الفاضل في شكل د من مقالة ب من كتاب المخروطات و دايره ذلك معلومة الوضع لان قطرها الذي هو د معلوم الوضع و القدر و خطا اج حط معلوما الوضع و نقطة د معلومة الوضع فيكون قطع ن ذلك معلوم الوضع و دايرة ذلك معلومة الوضع فيكون نقطة ك معلومة الوضع و خط لك ل يكون معلوم الوضع فيكون نقطة ل معلومة الوضع و نقطة ا معلومة الوضع فيكون خط ال معلوم القدر و هذه اشياء ظاهرة من كتاب المعطيات و قد بينا ان سطح اه مثل سطح لكج فيلحق م ه المشترك يبقى سطح م د مثل سطح كه و نجعل سطح دك مشتركا فيكون سطح اك مساويا لسطح دط و هما متساويا الزوايا لان زواياهم قوائم فيكون اضلاعهما متكافية في النسبة كما بينه اقليدس في الشكل يد من مقالة و يكون نسبة ال الى ل ط كنسبة دل الى لك فيكون مربعاتها ايضا متناسبة و نسبة مربع ال الى مربع ل ط كنسبة مربع دل الى مربع لك و نسبة دل

الى لك كنسبة لك الى ب فيكون نسبة مربع دل الى مربع لك كنسبة دل الى
 لب فيلزم ان يكون نسبة مربع ال الى مربع ل ط كنسبة دل الى لب فيكون
 ضرب مربع ال في خط لب مساويا لضرب مربع ل ط في خط دل ونجعل ضرب
 مربع ل ط في اد مشتركا فيكون ضرب مربع ل ط في ال مساويا لضرب مربع ل ط
 في اد و ضرب مربع ال في لب لكن مربع ل ط هو مثل عدد الاضلاع اعني مائتين
 و ال هو ضلع المكعب فيكون مائتا ضلع المكعب مساويا لضرب مربع ل ط في
 اد و ضرب مربع ال في لب و ضرب مربع ل ط في اد مساويا للعدد كما قدمنا
 وهو الفان فيكون الفان من العدد و ضرب مربع ال في لب مساويا لمائتي ضلع
 المكعب و نجعل مكعب ال الذي هو ضرب مربع ال في ال مشتركا فيكون مكعب
 ال [مع مائتين ال] مساويا لالفين من العدد مع ضرب مربع ال في ال و ضرب مربع
 ال في لب و ضرب مربع ال في ال مع ضرب مربع ال في لب هو مساويا لضرب
 مربع ال في اب و اب قد فرضناه عشرين ف ضرب مربع ال في اب هو عشرين مربع
 ال فيكون مكعب ال مع مائتين خط ال مساويا لالفين من العدد مع عشرين مربع
 ضلع المكعب و ذلك ما اردنا ان نبين

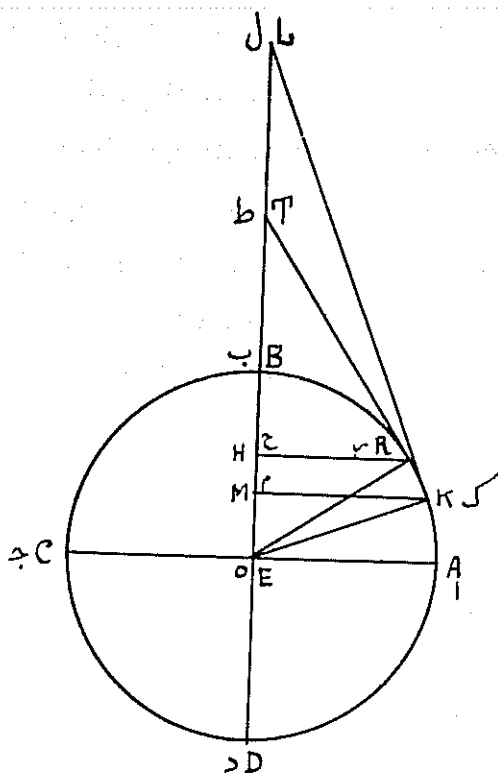
[٢٠٥٠١ §] و من بعد ما تقدم هذا فانا نعيد مثلث اب ج و نضع اد منطقا
 و هو عشرة يكون دب هو خط ال الذي برهنا على انه معلوم القدر و لست اعني
 بقولي معلوم القدر انه معلوم الكمية فان بينهما فرق بل اعني بقولي معلوم القدر ما اعني
 به اقليدس في كتاب المعطيات و هو الذي يمكن ان يوجد مقدار مساو له وبالتركيب



نضع خط اد عشره و نضع بد قائما على خط اد على زوايا قائمه و مساويا لخط ال

من الشكل المتقدم و نصل $اب$ و نقيم على نقطة $ب$ عمود $بج$ و نخرج $اد$ على استقامته حتى يقطع العمود على نقطة $ج$ فباضطرار يجب ان يكون مثلث $ابج$ قائم الزاوية اعنى زاوية $ب$ منه قائمة و يكون خط $اب$ مع عمود $بد$ مساويا لوتر $اج$ و خط $اب$ مع خط $اد$ مساويا لخط $بج$ و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٦] و نعيد ربع دائرة $اب$ من دائرة $ابج$ و نخرج فيها قطري $اج$ $بد$ يتقاطعان على زوايا قائمة و مركز الدائرة نقطة $هـ$ و نصل من خط $ج$ د مثلث $ابج$ في الشكل المتقدم خط $جط$ مساويا لعمود $بد$ و نقسم نصف قطر الدائرة الذي هو خط $هـ ب$ من هذا الشكل على نسبة $اد$ الى $دط$ من مثلث $ابج$ المتقدم كما



بينه اقليدس في شكل $بج$ من مقاله و على نقطة $ح$ و نخرج عمود $ح ر$ و نصل $هـ ر$ و

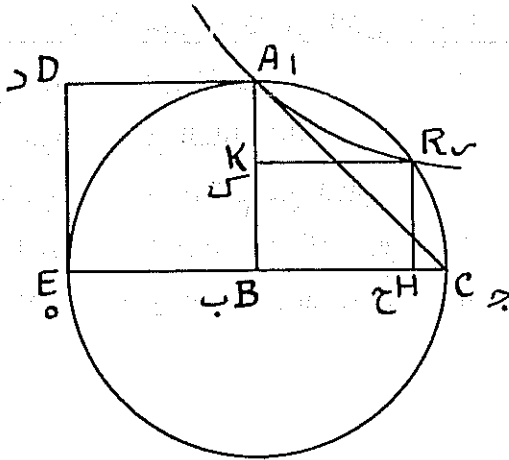
نخرج من نقطة ر خطا يماس الدائرة و هو خط رط و نخرج ه ب على استقامة الى ان يقطع خط رط على نقطة ط فيكون مثلث ه ر ط شبيها بمثلث ا ب ج من الشكل المتقدم برهانه ان زاوية ره ح مساوية لزاوية با ج فان لم يكن فليكن احديهما اعظم مثل با ج فنقيم على نقطة ه من خط ه ب زاوية مثل زاوية با ج و هي ك ه ب و نخرج من نقطة ك خطا يماس الدائرة و هو ك ل يقطع ه ط على نقطة ل فيكون مثلث ه ك ل شبيها بمثلث ا ب ج لان زواياهما متساوية و نخرج من نقطة ك عمود ك م على ه ب فيكون ه ك م جميعا مساويا لخط ه ل و ه ب مثل ه ك يكون بل مثل ك م و نسبة ل م الى ك م كنسبة ج د الى د ب فيكون نسبة م ل الى ل ب كنسبة د ج الى ب د و بالتفضيل يكون نسبة ك م الى ب ل كنسبة ط ل الى ط ج و نسبة ط ج الى ج د هو مثل د ب الى د ا كنسبة ب ل الى ل ا الذي هو مثل ك م الى م ه ففي نسبة المساواة يكون نسبة م ه الى م ب كنسبة ا د الى د ط و قد كنا جعلنا نسبة ه ح الى ح ب كنسبة ا د الى د ط فيكون نسبة م ه الى م ب كنسبة ه ح الى ح ب و م ه الاول اصغر من ه ح الثالث يلزم ان يكون م ب الثاني اصغر من ح ب الرابع على ما تبين في خامسة الاصول في شكل يد منها الا انه اعظم هذا محال فليست زاوية ره ح باصغر من زاوية با ج من مثلث ا ب ج المتقدم و لا اكبر منها فيكون مثلث ه ر ط شبيها بمثلث ا ب ج المتقدم فيكون ه ر ح جميعا مثل ه ط فيكون ب ط مثل ر ح و ضرب د ح في ح ب مثل مربع ح ر و كذلك ضرب ه ح في ح ط مساويا لمربع ح ر فيكون ضرب د ح في ح ب مثل ضرب ه ح في ح ط فيكون الخطوط الاربعة متناسبة على تبين في شكل يو من مقالة و فنسبة د ح الاول الى ج ه الثاني كنسبة ح ط الثالث الى ح ب الرابع و بالتفضيل يكون نسبة د ه الى د ح كنسبة ب ط الى ب ح و د ه مثل ا ه و ب ط مثل ر ح فيكون نسبة ا ه الى ه ح كنسبة ر ح الى ح ب و بالتبديل يكون نسبة ا ه الى ر ح كنسبة ه ح الى ح ب فقد قسمنا ربع دائرة بقسمين على نقطه ر و اخرجنا منها عمود ر ح حتى صارت نسبة ا ه الى ه ح هو نصف القطر الى ر ح كنسبة ه ح الى ح ب و ذلك ما اردنا ان نبين

[§ ٢٠٧] ومن اراد ان يعلم بالحساب فلا سبيل اليه اذا حاول التحقيق فان الاشياء التي يستخرج بقطوع المخروطات لا يمكن فيها ان يحلل الى الحساب و ان قنع بالتخمين فعليه بجداول الاوتار من كتاب المجسطى او جداول الجيوب و السهام من زيچ معتمد و يطلب فيه قوسا يكون نسبة ستين الذى هو نصف قطر الدائرة فرضا الى جيبها كنسبة حبيب تمامها الى سهمها و نجد ذلك القوس قريبة من نزّ درجة بالاجزاء التي بها الدائرة شـ و جيبها قريب من نـ جزوا و سهمها قريب من كزّ جزوا و ثلث جزء و جيب تمامها قريب من اثنين و ثلثين جزوا و ثلثي جزوا و يمكن ان يبلغ فى التدقيق حتى يقل التفاوت بحيث لا يحس فهذا هو الذى سنح فى هذا المعنى مع تقسم الفكر و توزع الخاطر و اقتتان الاشغال العاتية عن امثال هذه الجزئيات ولولا شرف المجلس دام شرفه و حق السائل ادام الله تأييده لكنك عنها فى منحرف واسع ان عنايتي مقصورة على ما هو اهم من امثال هذه عندي و همتي مصروفة اليه و الله تعالى المحمود و المشكور على كل حال و المأمول منه ان يوفق للخيرات انه ولى الاجابة - تمت الرسالة و الصلوة على خاتم الرسالة

مسئله

ربع دائرة AC مفروض على مركز B ونريد ان نقسم AB بقسمين كما قد عرفته

فانا نعمل على AB مربعا متساوي الاضلاع والزوايا وهو AE فيكون خطا به ED معلومي الوضع ونقطه A معلومة الوضع فنعمل على نقطة A قطعاً زايدا لا يلقاه خطا به ED وهو قطع AD فيكون معلوم الوضع ونصل AC فهو لا محالة



يكون مماسا للقطع وهو في داخل الدائرة فيلزم ان يقطع القطع الزايد الدائرة فليقطعها على نقطه R ونخرج عمودي RC فاقول قد تم العمل برهانه ان نقطتي A و R على محيط القطع وقد اخرج من كل واحد منها خطان السى القطع موازيان للآخرين فيكون سطح RE مساويا لسطح AE و نقلتي KE المشترك يبقى KE مثل KE وهما سطحيان متساويا الزوايا فيكون اضلاعهما متكافيه نسبة AE الى KE كنسبة BE الى KE امت \square

(*) در اصل شكل نداشت . رجوع كنيد به آخر قسمت ششم .

قسمت سوم
نظر اجمالی به
تاریخ علم جبر
از ایام قدیم تا زمان خیام

1. 1950

2. 1951

3. 1952

4. 1953

قسمت سوم

نظر اجمالی به تاریخ علم جبر از ایام قدیم تا زمان خیام

۳۰۱ - § ملاحظات کلی و مقدماتی

§ ۳۰۱۰۱ مقدمه - در دیباچه‌ی کتاب گفتیم که برای دریافتن ارزش کارهای جبری خیام باید لااقل اجمالاً نظری به تاریخ بسط علم جبر و مبانی و مقدمات آن افکند. همین مطلب در این قسمت به خوانندگان عرضه می‌شود.

تاریخچه‌ای که در این قسمت می‌آید، آنچه خارج از دوره‌ی نهضت علمی اسلامی است، تقریباً محدود است به سرزمینهایی که دانش آنها مستقیماً در بسط علوم ریاضی و خاصه علم جبر درین دوره مؤثر بوده است، و آن در درجه‌ی اول یونان و بعد هند می‌باشد. پس، اگر در صفحات آتیه از مصر قدیم و چین و غیره سخنی بمیان آید بیش از مطالب دیگر مجمل خواهد بود، و ذکر آنها فقط به منظور توطئه‌ی زمینه‌ی نسبتاً جامعی است و بس.

§ ۳۰۱۰۲ ادوار جبر - در بحث از پیدایش جبر و بسط آن باید قبلاً دانست که مقصود از علم جبر چیست، چه اگر این علم بمعنایی که حالیه در ذهن ما است^۵ و استعمال حروف و علامات جزء لاینفک آن می‌باشد گرفته شود، باید تاریخ پیدایش آنرا قرن هفدهم میلادی شمرد. از طرف دیگر اگر «نوعی» استعمال علامات را ملاک قرار دهیم باید پیدایش جبر را در قرن سوم میلادی در زمان دیوفانتوس (۳۰۲۰۲ §) دانست. اما اگر حل مسائل هندسی را که از نظر جبری به حل معادلات باز می‌گردد جزء جبر بشماریم، باید گفت که این علم در زمان فیثاغوریان موجود بوده و شاید در حوزه‌ی فیثاغورس پیدایش یافته است (۳۰۲۰۱ §). بالاخره، اگر هر مسئله‌ای که

(۵) جبر مقدماتی کنونی را مجملاً میتوان علم به خواص اعداد و روابط آنها بوسیله‌ی علامات

و به کومک قواعد عمومی محاسبه تعریف کرد.

امروز به وسایل جبری حل می‌شود - قطع نظر از طریق حل آن، که ممکن است صرف حدس و امتحان کمابیش اصولی و علمی باشد - جزء جبر بحساب آید، باید گفت که جبر در حدود ۲۰۰۰ سال قبل از میلاد و شاید پیش از آن پیدایش یافته است. یکی از محققین تاریخ جبر را به سه دوره تقسیم کرده است^۵. اول دوره‌ی لفظی، که در آن طرح و حل مسائل صرفاً بوسیله‌ی الفاظ زبانهای عرفی و بکلی عاری از هر نوع تلخیص یا استعمال علامات انجام می‌گرفته است. دوم دوره‌ی تلخیص، که در آن در مواردی، برای اختصار، قسمت‌هایی از کلمات را می‌انداختند. سوم دوره‌ی علامی، که در آن استعمال حروف و علامات پیدایش و رواج یافت. اگرچه حد فاصلی بین این ادوار نیست، و مثلاً در بعضی آثار قدیم هر سه جنبه مشهود است، تقسیم مذکور در بحث از تاریخ جبر خالی از فایده نیست.

§ ۳۰۱۰۳ تالیفات جبری قدیم - موضوع تالیفات جبری دانشمندان قدیم نیز جالب و در تاریخ ریاضیات حائز اهمیت و در عین حال در خور تأمل است. زیرا، از علمای یونان (خاصه دانشمندان حوزه‌ی اسکندریه) که بگذریم، دانشمندان قدیم مباحث مختلف و متنوعی از ریاضیات را در آثار خود می‌کنجانیده‌اند، خاصه آنکه در ایام قدیم جبر بعنوان علمی مستقل مورد نظر نبوده بلکه وسیله‌ی جوابگوئی به معماهای عددی یا، مانند سایر شعب ریاضیات، آلتی برای حل مسائل عملی شمرده می‌شده و حتی اسم خاصی نداشته است. بنابراین، اگر در بحث از تاریخ جبر مثلاً صحبت از آثار نجومی بمیان آید، نباید این امر را خارج شدن از موضوع تلقی کرد، بلکه ورود آنها در بحث ازین جهت است که بسیاری از کتابهای نجومی مشتمل بر فصولی در حساب و هندسه و جبر بوده است.

بر طبق اطلاعات کنونی، اولین کتابی که صرفاً به جبر پرداخته از ریاضیدان بزرگ یونانی دیوفانتوس (اواسط قرن سوم میلادی) است (§ ۳۰۲۰۲)، ولی

(۵) سمیت، تاریخ، جلد ۲، ص ۳۷۹.

یونانیان تمام مطالب مربوط به خواص اعداد را تحت عنوان آریتمتیکه* می‌آوردند، که می‌توان آنرا علم حساب (در مقابل محاسبه) نامید، و باین جهت، مسائل جبری در نزد آنان جزئی از آریتمتیکه بوده، و عنوان مستقلی نداشته، و کتاب جبر دیوفانتوس هم همین عنوان را داشته است.

تا حدی که اطلاع داریم، اول کسی که کتابی به اسم «جبر و مقابله» نوشته محمد ابن موسی خوارزمی است (۳۰۴۰۴ §).

§ ۳۰۱۰۴ جبر در مصر و چین قدیم - قدیمترین اثری در جبر که به ما رسیده از يك ریاضیدان مصری بنام آحمس است که در حدود ۱۵۵۰ یا ۱۶۵۰ ق م یا پیش از آن می‌زیسته، و از وی پاپیروسی بجا مانده که تألیف اوست یا آنرا از نسخ قدیمتری استنساخ کرده است.

پاپيروس آحمس، که فعلاً در موزهی بریتانیائی است، در حکم کتابی است در ریاضیات عملی، و مشتمل است بر حساب مساحات، مسائلی که حل آنها به معادلات درجهی اول باز می‌گردد*، و مسائل مقدّماتی در باب سلسله‌ها. طرح مسائل عموماً در مرحلهی لفظی است (۳۰۱۰۲ §)، ولی آحمس عدهی قلیلی علامات نیز بکار برده است. حل معادلات بوسیلهی «امتحان و تصحیح» بعمل می‌آید. مثلاً برای حل معادلهی $x + x/7 = 19$ ، آحمس عدد ۷ را امتحان می‌کند. چون در طرف اول معادله بجای x این عدد را قرار دهیم حاصل مساوی هشت می‌شود. سپس آحمس با چند «تصحیح» و «امتحان» معلوم میکند که عدد هفت را در چه عددی باید ضرب کرد تا حاصل، بجای ۸، مساوی ۱۹ گردد.

علاوه بر پاپيروس آحمس، پاپيروسهای دیگری حاکی از اطلاعات ریاضی مصریان قدیم بدست آمده که متضمن مسائلی است که به معادلات درجات اول و دوم

(*) از لغت یونانی آریتموس، بمعنی عدد. همین لفظ است که در ترجمه‌ی کتابهای یونانی

به عربی بصورت اَرْتِمَاتِیْقِی درآمده است.

* مانند مسئله‌ای که با علامات امروزی به معادلهی $x + x/7 = 19$ باز می‌گردد.

بر می گردد.

چینیها نیز ظاهراً در هزار سال قبل از میلاد نوعی جبر لفظی داشته‌اند ، و در قرن اول میلادی حلّ معادلات درجه‌ی دوّم را می‌دانسته‌اند .

§ ۳۰۲ -- جبر در یونان

§ ۳۰۲۰۱ - اطلاع یونانیان از جبر قبل از زمان دیوفانتوس (اواسط قرن سوّم میلادی) در خور تأمل است ، زیرا آنچه را « جبر هندسی » یونانیان می‌خوانند حلّ هندسی بعضی مسائل هندسی است که حلّ جبری آنها به معادلات درجه‌ی دوّم باز می‌گردد ^{۵۵} ، و آنهم صرفاً جنبه‌ی لفظی داشته است .

بقول بعضی محققین ، مبنای جبر هندسی یونانیان از فیثاغورس ^{۵۶} یا از فیثاغوریان است ، و مسئله‌ی اضافه کردن سطحی برخطی (§ ۳۰۲۰۳۰۱) ، که از نظر جبری به حلّ معادله‌ی درجه‌ی دوّم باز می‌گردد ، در حوزه‌ی علمی فیثاغوری پرداخته

(۵۶) از قبیل مسئله‌ی تقسیم خط به نسبت ذات وسط و طرفین و مسئله اضافه کردن سطحی برخطی (§ ۳۰۲۰۳۰۱)

توضیحات مقتبس از ویکه که در § ۳۰۷۰۲ آورده‌ایم تا حدی کیفیت این جبر هندسی یونانیان را روشن می‌سازد .

(۵۵) ریاضیدان و فیلسوف بزرگ یونانی ، که در حدود ۵۷۲ ق م احتمالاً در جزیره‌ی ساموس از جزایر دریای اژه (بحرالجزایر) متولد شده و در ۵۳۲ برآمده و در ۴۹۷ یا ۴۹۶ ق م و بقولی در حدود ۵۵۱ ق م وفات یافته است .

کویند فیثاغورس به مصر و ایران و هندوستان مسافرت کرده ، و پس از بازگشت ، در شهر کروتونا در ایتالیا جنوبی جمعیتی سری تأسیس کرد که بکوشش وی و فیثاغوریان ، یعنی پیروان او ، از حوزه‌های علمی معتبر قدیم گردید ، و تا نیمه‌ی دوّم قرن چهارم ق م دوام داشت . فیثاغورس عدد را اصل وجود می‌دانست ، و همین فلسفه‌ی وی از یک طرف منجر به پیدایش اعتقاد به خواص غریبه برای اعداد و از طرف دیگر منجر به تحقیق کمی در طبیعت شد .

کشف بسیاری از قضایای هندسی منسوب به حوزه‌ی علمی فیثاغوری است ، ولی تفکیک اکتشافات شخصی فیثاغورس از آثار پیروان او ممکن نیست ، کویند مفهوم کمیات اصم را اول بار فیثاغوریان پرداختند .

شده، و نیز گویند بقراط خیوسی*، فیلسوف فیثاغوری و ریاضیدان بزرگ یونانی، مسئله‌ی تضعیف مکعب (§ ۳۰۷۰۱) را به مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض (§ ۳۰۷۰۱) برگردانید، و طریقی برای حل همین مسئله به افلاطون (حدود ۴۲۸-۳۴۸ یا ۳۴۷ ق م) منسوب است.

همچنین، ائودوکسوس کنیدوسی** (حدود ۴۵۸ - حدود ۳۵۵ ق م)، یکی از بزرگترین ریاضیون جهان، علاوه بر تحقیقات گرانبهای دیگر که از موضوع بحث ما خارج است، مسئله‌ی تقسیم خط را به نسبت ذات وسط و طرفین تنقیح و تکمیل کرده است. از شاگردان وی مِنايخْموس[†] (نیمه‌ی قرن چهارم ق م) است که گویند قطوع مخروطی را کشف و مسئله‌ی تضعیف مکعب (§ ۳۰۷۰۱) را بوسیله‌ی آنها حل کرده است.

اولین و معروفترین کتابی که در آن دانش ریاضی یونانیان به صورت علمی تنظیم و عرضه شده از اقلیدس^{††}، ریاضیدان بزرگ حوزه‌ی علمی اسکندریه است. این کتاب که به کتاب اصول هندسه (یا، بالاخصار، اصول) معروفست، و تا زمان حاضر مبنای تعلیم هندسه‌ی مقدماتی است، اساس کارهای ریاضی دانشمندان دوره‌ی اسلامی بوده است، و مثلاً در رساله‌ی خیّام در جبر پیوسته اشاره به کتاب اصول و کتاب دیگر اقلیدس بنام معطیات میشود، و ما از این دو کتاب بعداً با تفصیل بیشتری یاد خواهیم کرد (§ § ۳۰۲۰۳۰۱-۳۰۲۰۳۰۲). هر دو کتاب متضمن حل هندسی مسائلی است که از نظر جبری به معادلات درجه‌ی دوم باز می‌گردد.

(*) Hippocrates . با بقراط طبیب که اهل کوس بوده و در حدود ۴۶۵ ق م متولد شده اشتباه نشود . بقراط خیوسی منسوب است به جزیره‌ی خیوس از جزایر دریای اژه . و در حدود ۴۵۵ تا ۴۳۵ ق م در آتن رونق داشته است .

(**) Eudoxos . وی منسوبست به شهر قدیم کنیدوس در ناحیه‌ی کاربا (آسیای صغیر) .
Menaechmos (†)

(††) از زندگی او اطلاع درستی نداریم . همین قدر می‌دانیم که در حدود ۳۵۵ ق م ،

در زمان سلطنت (۳۲۳ - ۲۸۵ ق م) بطلمیوس I ، در اسکندریه رونق داشته است .

نسخه‌ای قدیمی از اثر وی را در نظر داشت .

کتاب دیوفانتوس در علم حساب مجموعه‌ی کمابیش متشتمنی است از مسائل عددی که بعضی به معادلات درجه‌ی اول يك مجهولی تادستگاههای چهار مجهولی و برخی به معادلات درجه‌ی دوّم بر می‌گردد* ، ولی اکثر مسائل آن به معادلات سیّال (§ ۳۰۶۰۹) از درجات دوّم تا چهارم باز می‌گردد** ، و دانشمند یونانی در مورد معادلات درجه‌ی اول جوابهای مُنطق را می‌دهد ، و در معادلات دسته‌ی اخیر، حتّی وقتی معادله دو جواب مثبت دارد ، فقط یکی را اختیار می‌کند ، و اگر معادله جواب مثبت نداشته باشد آنرا ممتنع می‌شمارد . باید دانست که دیوفانتوس مسائل مورد بحث را طوری ساخته است که جوابهای مثبت دارند ، و بعلاوه وی طریق کلی برای حلّ این معادلات نمی‌آورد ، بلکه هر معادله را به طریق خاصی حل می‌کند .

دیوفانتوس اول کسی است که در راه وضع يك سلسله علامات در جبر قدم برداشته است ، ولی چون نسخه‌ی معتبری از کتاب جبر او در دست نیست ، در باب علامات که بکار برده نمی‌توان نظر قطعی اظهار کرد . در هر حال ، باتوجّه به جهاتی که ذکر شد ، دیوفانتوس را اغلب پدر علم جبر می‌خوانند .

کتاب دیوفانتوس را قسطا ابن لوقا البعلبکی (§ ۳۰۴۰۳) بزبان عربی ترجمه نموده و ابوالوفای بوزجانی (§ ۳۰۴۰۵۰۳) آنرا تفسیر کرده و کرخی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) فایده‌ی فراوان از آن برده است . نیز رجوع کنید به §§ ۳۰۶۰۲ و ۳۰۶۰۴ - ۳۰۶۰۹ .

§ ۳۰۴۰۴ معرفی چند کتاب - از دانشمندان یونانی چند تن هستند که

(*) یکی از آنها (مئلای هفدهم مقاله‌ی ششم) بحل معادله $x^2 + x = 4x^2 + 4x$ (بحل معادله $x^2 + x = 4x^2 + 4x$) بر می‌گردد که دیوفانتوس جواب آنرا $x = 4$ می‌دهد ، بدون آنکه طریق حل را ذکر کند . احتمالاً این جواب را به حدس یافته است . رجوع شود به کتاب سابق الذکر پول وراک (ص ۲۶۵ - ۲۶۶) .

(**) بهمین جهت ، معادلات سیّال را اغلب معادلات دیوفانتی می‌خوانند .

آثارشان از همان اوایل رونق گرفتن حوزه‌ی علمی بغداد به عربی ترجمه شد، و مبنای کارهای ریاضیون دوره‌ی اسلامی قرار گرفت.

معروفترین این دانشمندان یکی اقلیدس (رونقش در حدود ۳۰۰ ق م) است که در ۳۰۲۰۱ § از او اسم بردیم. دیگر ارشمیدس (۲۸۷ - ۲۱۲ ق م) است که بزرگترین ریاضیون و فیزیکدانان و مهندسین قدیم است، و درین کتاب بمناسبت مسئله‌ی (۳۰۷۰۱ §) اسمش خواهد آمد.

سومی آپولونیوس پرفرائی* است که احتمالاً در حدود ۲۶۲ ق م متولد شده و در نیمه‌ی دوم قرن سوم ق م در اسکندریه برآمده و بجهت کتابی که در مخروطات پرداخته نام جاودانی یافته است.

چون در رسائل جبری خیام همواره از کتابهای اصول هندسه و معطیات اقلیدس و مخروطات آپولونیوس صحبت و بآنها استناد می‌شود، و از طرف دیگر ممکن است بعضی از خوانندگان آشنائی کافی با این شاهکارهای علمی نداشته باشند، مناسب است که شرح مختصری در معرفی هر یک از سه اثر ریاضی مذکور بیاوریم.

۳۰۲۰۳۰۱ § کتاب «اصول» - چنانکه اشاره کردیم، کتاب اصول هندسه‌ی اقلیدس اولین کتابی است که در آن ریاضیات یونانی تا ۳۰۰ ق م به صورت علمی تنظیم و عرضه شده است. این کتاب مشتمل بر ۱۳ مقاله می‌باشد.

مقاله‌ی اول شامل تعریفات و بدیهیات و اصل موضوع معروف اقلیدس و احکام راجع به تساوی مثلثات و خطوط متوازی و قضیه‌ی معروف به قضیه‌ی عروس است.

مقاله‌ی دوم مشتمل بر قسمت اعظم جبر هندسی یونانیان است، و در آن

(*) Apollonios . وی منسوبست به شهر پرفرا از بلاد قدیم ناحیه‌ی پامفولیا در آسیای صغیر. در مآخذ اسلامی وی را ابلونیوس و ابلونیوس نجار خوانده‌اند. برای صور مختلف این نام یونانی در مآخذ اسلامی رجوع شود به دایرةالمعارف اسلام (چاپ جدید انگلیسی)، ص ۹۹۴ - ۹۵، در ماده‌ی بلینیوس.

عده‌ای احکام ثابت شده که معادل بعضی اتحادهای جبری است. شکل یازدهم این مقاله در تقسیم خط است به نسبت ذات وسط و طرفین، که از نظر جبری معادل حل معادله‌ی $x^2 + ax = a^2$ است، و شکل چهاردهم مقاله (ساختن مربعی مساوی مستطیل مفروض) معادل حل معادله‌ی $x^2 = ab$ می باشد. مقاله‌ی سوّم در خواص دایره و مقاله‌ی چهارم در باب کثیر الاضلاعهای محیطی و محاطی و منتظم است.

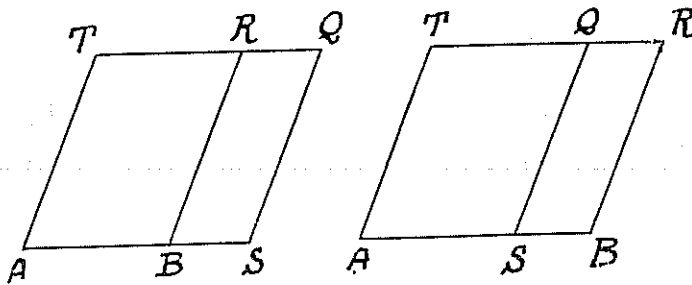
مقاله‌ی پنجم تخصیص به خواص نسب دارد، و ظاهراً مبتنی بر تحقیقات ائودوکسوس (§ ۳۰۲۰۱) می باشد، و در هر حال، در تنظیم و تدوین احکام مربوط به نسب در این کتاب چنان استادی بکار رفته که در آثار ریاضی یونانیان کم نظیر است. مقاله‌ی ششم در احکام راجع به سطوح و اشکال متشابه است. درین مقاله دو مسئله آمده است (مسائل ۲۸ و ۲۹) که از نظر جبری به حل معادلات درجه‌ی دوّم برمی گردد. این مسائل از جنبه‌ی تاریخی بسیار اهمیت دارد، چه روش حل آنها همواره مورد استفاده‌ی ریاضیون یونانی و اسلامی بوده است* . بنا بر این، جا دارد که اشاره ای باین مسائل بکنیم.

موضوع هر دو مسئله « قرار دادن متوازی الاضلاعی بر کنار خطی » است، که ریاضیون دوره‌ی اسلامی از آن به « اضافه کردن » متوازی الاضلاعی بر قطعه خط مفروض تعبیر کرده اند. باید دانست که صورت ساده‌ی مسئله‌ی قرار دادن متوازی الاضلاعی بر کنار خط مفروض، که یونانیان به لفظ پارابوله از آن تعبیر کرده اند، ساختن متوازی الاضلاعی است+ که این خط یکی از اضلاع آن باشد. صورت کلی تر مسئله اینست که متوازی الاضلاعی مانند ASQT بر قطعه‌ای (بمعنای اعم) مانند AS از قطعه مستقیم AB، که با آن يك انتهای مشترك دارد، ساخته شود. درین صورت، هر گاه متوازی الاضلاعی بر تمام AB بسازیم چنانکه اضلاع مقابل AB از

(*) مثلاً رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۳، § ۵۰۴۰۲۰۲، § ۵۰۴۰۳۰۱.

(+) البته تابع شرایطی.

دو متوازی الاضلاع دارای يك امتداد باشند ، و اضلاع ديگر آنها متوازی باشند ، بر حسب اینکه AS کوچکتر یا بزرگتر از AB باشد ، گویند متوازی الاضلاعی که بر AB اضافه شده (یعنی ASQT) نسبت به متوازی الاضلاع مضاف بر تمام AB (یعنی ABRT) ناقص (به یونانی اَلتَّیْسِیس) یا زاید (به یونانی هویپر بوله) و مقدار نقصان یا زیادتی متوازی الاضلاع BSQR میباشد .



بعد از شرح این اصطلاحات ، صورت مسائل ۲۸ و ۲۹ مقالدهی ششم را ، قریب به مضمونی که ریاضیون اسلامی آورده اند ، نقل می کنیم :

می خواهیم بر خط مفروض متوازی الاضلاع مساوی سطح مستقیم الاضلاع مفروض C اضافه کنیم که نقصان (مسئلهی ۲۸) یا زیادتی (مسئلهی ۲۹) آن نسبت به متوازی الاضلاع مضاف بر تمام خط AB با متوازی الاضلاع مفروض D متشابه باشد* .

هر دو مسئله از نظر جبری معادل معادلاتی از درجهی دوم است † ، چو اگر AB و QS را بترتیب به a و x و نسبت اضلاع D را به k نمایش دهیم خواهیم داشت $SB = kx$. حال اگر m جیب زاویه‌ای از یکی از متوازی الاضلاع ها باشد ، سطح

(*) تحریر اقلیدس ، ص ۹۵-۹۶؛ هیت ، سیزده مقاله ، جلد اول ، ص ۳۴۳-۳۴۴ ،

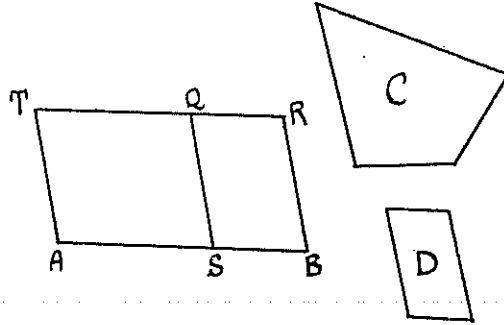
و جلد دوم ، ص ۲۵۸-۲۶۷ .

(†) هیت ، تاریخ ، جلد اول ، ص ۳۹۶

AQ مساوی $m(a-kx)x$ خواهد بود، و لهذا حل مسئله به حل معادله‌ی

$$\pm mkx^2 + max - mc = 0 \quad \text{یا} \quad m(a \pm kx)x = c$$

باز می‌گردد. در اضافی زاید مسئله همیشه ممکن است، اما در اضافی ناقص،



شرط اینکه مسئله جواب حقیقی داشته باشد اینست که $c \leq ma^2/k$. طرف دوم این نامساوی سطح متوازی الاضلاعی است که بر نصف AB و متشابه با D ساخته شود، و همین شرط را اقلیدس مقدمه^{۲۷} در قضیه^{۲۷} مقاله^{۲۷} ششم آورده است. †
مقالات هفتم - نهم در خواص اعداد و مقاله^{۱۰} دهم در مقادیر اصم است.
مقالات یازدهم - سیزدهم در هندسه^{۱۱}ی مجسمه یا فضائی است. ‡

(†) تحریر اقلیدس، ص ۹۵؛ هیث، سیزده مقاله، جلد دوم، ص ۳۵۷.

(‡) در پایان هندسه^{۱۱}ی اقلیدس معمولاً دو مقاله^{۱۱}ی الحاقی (مقالات چهاردهم و پانزدهم) می‌آید، که اولی از هُیسیکلِس (Hypsicles) است که گویا در نیمه^{۱۱}ی دوم قرن دوم قبل از میلاد می‌زیسته، و دومی ظاهراً در قرن ششم میلادی نوشته شده است.

بالاخره در آخر تحریر اقلیدس چاپ تهران چهار صفحه (ص ۲۵۶ - ۲۵۹) در تحت عنوان «القول فی اقامه البرهان علی الحكم المذکور فی الشكل الخامس عشر من المقالة الثانية عشر من هذا الكتاب»، آمده که ظاهراً از خواجه نصیرالدین طوسی و مشتعل بر دو مقدمه است که اولی در حل مسئله^{۱۱}ی درج دو واسطه^{۱۱}ی متناسب بین دو طول مفروض (۳۰۷۰۱ §) می باشد. اینکه بعضی عبارت مذکور را آغاز کتاب معطیات (۳۰۳۰۲ §) شعرده‌اند (یادبود هفتصدمین سال خواجه نصیرالدین طوسی، نشریه^{۱۱}ی شماره^{۱۱}ی ۲۵۹ دانشگاه تهران، خرداد ماه ۱۳۳۵، ص ۱۱۲) خطائی فاحش است.

کتاب اصول را اول بار حجّاج ابن یوسف ابن مَطَّر (§ ۳۰۴۰۳) بزبان عربی ترجمه کرد، و پس از او نیز دانشمندان و مترجمین معتبر مانند اسحاق ابن حنین (§ ۳۰۴۰۳) و قسطا ابن لوقا البعلبکی (§ ۳۰۴۰۳) و ثابت ابن قرّه (§ ۳۰۴۰۳۰۱) و دیگران دست به ترجمه‌ی آن و اصلاح ترجمه‌های دیگران زدند، و جمع کثیری از دانشمندان حواشی و شروحن بر آن نوشتند* . از تحریرهای معروف هندسدهی اقلیدس کتاب معروف به تحریر اقلیدس از خواجه نصیرالدین طوسی (۵۹۷-۶۷۲ هـ) است، که مبتنی بر ترجمه‌های حجّاج و ثابت میباشد، و در ۱۲۹۸ هـ در تهران بچاپ رسیده است. توجهی که خواجه نصیرالدین درین کتاب به جزئیات و حالات خاص مبذول داشته نشانه‌ی بارز انحطاط علوم ریاضی در نزد مسلمین است، و از جهاتی اثر او را مضمول گفته‌ی پاپوس† قرار میدهد:

«... چیزی به نوشته‌ی اصلی اقلیدس اضافه نکردند الا اینکه بعضی، پیش از زمان من، با الحاق براهین ثانوی به بعضی قضایا بیسلیقگی خود را به اثبات رسانیده‌اند...» .

§ ۳۰۲۰۳۰۲ مَعْطِیَات - دیگر از کتابهای معروف اقلیدس کتاب معطیات است که نسخه‌ای از آن، که بتوسط اسحاق ابن حنین (§ ۳۰۴۰۳) ترجمه شده و ثابت ابن قرّه (§ ۳۰۴۰۳۰۱) آنرا اصلاح کرده، در تحت عنوان کتاب المعطیات در جزء مجموعه‌ای در سال ۱۳۰۴ هـ در تهران چاپ شده است (ص ۱۲۳-۱۶۳ مجموعه).

این کتاب مربوط به چهارمقاله‌ی اول کتاب اصول و در هندسدهی مسطحه است، و با تعریف معانی مختلف «معلوم بودن» چیزی آغاز میگردد، از این قبیل:

(*) (برای تفصیل بیشتر رجوع شود به فصل هفتم مقدمه‌ی کتاب کراپهای سر تاس ل. هیت،

بنام سیزده مقاله‌ی اصول اقلیدس، جلد اول، ص ۷۵ - ۹۵ .

(†) Pappos . پاپوس اسکندرانی، ریاضیدان یونانی، احتمالا در سالهای ۲۸۴-۳۵۰ بم

رونق داشته .

سطوح و خطوط و زوایا و نسب وقتی از حیث مقدار معلومند که بتوان مساوی آنها را ساخت .

اشکال مستقیم الخط وقتی از حیث صورت معلومند که زوایای آنها معلوم و نسب اضلاع آنها نیز معلوم باشد .

دایره وقتی از حیث مقدار معلوم است که مقدار شعاعش معلوم باشد ، و وقتی از حیث مقدار و وضع معلوم است که مقدار شعاع و وضع مرکز آن معلوم باشد . منظور هر يك از احکام معطیات اثبات این مطلب است که اگر بعضی اجزای شکلی یا نسب آنها معلوم باشد ، اجزای دیگری یا نسب اجزای دیگری از شکل معلوم خواهد بود .

اهمیت مجموعه‌ی منظمی از این قبیل احکام در تسهیل و اختصار تحلیل هندسی مستغنی از توضیح است .

از احکام معطیات که با موضوع بحث ما مناسبت دارد احکام ۸۴ و ۸۵ است که میتوان آنها را چنین بیان کرد :

هر گاه سطح و زوایای متوازی الاضلاعی معلوم و تفاضل (حکم ۸۴) یا مجموع (حکم ۸۵) دو ضلع مجاور نیز معلوم باشد اضلاع متوازی الاضلاع معلوم است . بدیهی است که اگر x و y اضلاع متوازی الاضلاع باشد ، تعیین این دو ضلع بجل دستگاهسی به صورت

$$x \pm y = a, \quad xy = b^2$$

بر می گردد ، و احکام ۸۴ و ۸۵ معطیات را می توان معادل حل این دستگاهها شمرد .

§۳۰۳۰۳۰۳ مخروطات آپولونیوس - مخروطات مبحثی است از علم هندسه

که از خواص قُطوع مخروطی (قطعهای مخروطی) ، یعنی منحنیات حادث از تقاطع

سطوح مخروطی مستدیر با صفحات قاطع ، بحث میکند ، و این منحنیات همانهاست

که امروز در نزد ما به بیضی و هذلولی و سهمی معروفست .

چنانکه در § ۳۰۲۰۱ اشاره کردیم، کشف قطوع مخروطی به منایخموس منسوب است. پس از وی، بعضی دیگر از علمای ریاضی، از جمله آریستایوس* (قرن چهارم ق م) و اقلیدس (حدود ۳۵۵ ق م) و کونون † (حدود ۲۶۵ ق م) و ارشمیدس (۲۸۷-۲۱۲ ق م)، درین مبحث تحقیق کرده اند، ولی اولین اثر عمده و مستقلی که در این باب بما رسیده همان کتاب مخروطات آپولونیوس (§ ۳۰۲۰۳) می باشد.

کتاب آپولونیوس ظاهراً اصلاً در هشت مقاله بوده، و مقالهدی هشتم آن تا کنون بدست نیامده، ولی ترجمه های عربی هفت مقالهدی دیگر و اصل یونانی چهار مقالهدی اول در دست می باشد. از مترجمین و ریاضیون اوایل دوره اسلامی که کتاب مخروطات را بزبان عربی ترجمه کرده اند میتوان هلال ابن هلال حمصی (§ ۳۰۴۰۳)، ثابت ابن قره (§ ۳۰۴۰۳۰۱)، و ابوالفتح اصفهانی (§ ۳۰۴۰۳) را نام برد. در ادوار بعد نیز شروخی بر مخروطات نوشته شده، و تلخیص هائی از آن فراهم شده، که از جمله میتوان تلخیص ابوالحسین عبدالملک ابن محمد شیرازی †† را ذکر کرد.

احکام علم مخروطات در تحقیقات علمای دوره اسلامی در حل مسائلی که قابل تحویل به معادلات درجهی دوم نیست اهمیت خاصی داشته و شاید بی مبالغه بتوان گفت که یگانه وسیله بوده است، و باین جهت در کارهای مربوط به حل معادلات درجهی سوم (مانند رسائل جبری خیام) همواره اصطلاحات مخروطات پیش می آید، و این اصطلاحات را مترجمین دانشمند دوره اسلامی از روی اصطلاحات یونانی ساخته اند. بعنوان نمونه توضیح مختصری در وجد تسمیدی قطوع به قطع مکافی و قطع زاید و قطع ناقص می آوریم.

این اصطلاحات و نیز اسامی قطوع سه گانه در زبانهای اروپائی از نامهایی که آپولونیوس بر این منحنیات نهاده گرفته شده، و اصطلاحات یونانی آپولونیوس خود ناشی از اینست که وی خاصیت اصلی قطوع را بوسیلهی اضافه کردن خطی بر سطحی

Conon (†)

Aristaeos (*)

††) در حدود ۵۵۰ هـ ق زنده بوده و قبل از ۶۰۰ هـ ق وفات یافته است.

(§ ۳۰۲۰۳۰۱) بیان میکرده است . برای مزید توضیح فرض کنیم مبدا مختصات یکی از نقاط منحنی و قطر مارّ بر این نقطه محور طول و مماس مرسوم بر منحنی از این نقطه محور عرض باشد ، و در مورد بیضی و هذلولی طول قطر مذکور را به d نمایش میدهیم . خاصیت اساسی سه منحنی چنین نوشته میشود :

$$y^2 = px \quad (\text{سهمی})$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d} x^2 \quad (\text{هذلولی})$$

$$y^2 = px - \frac{p}{d} x^2 \quad (\text{بیضی})$$

در این معادلات p طول مشخصی است که به قطع مفروض بستگی دارد ، و میتوان آنرا بوسیلهی قطعه خطی مانند D که ابتدا از مبدا مختصات بر قطر مفروض عمود شود نمایش داد ، و ریاضیون قدیم آنرا ضلع قائم * منحنی میخواندهاند . اینک اگر ، برای احتراز از تکرار ، در مستطیلهای مضاف بر D ضلع واقع بر D را قاعده و ضلع عمود بر آنرا ارتفاع بنامیم ، دیده میشود که مربع عرض هر نقطه‌ی سهمی معادل مستطیلی است که بر تمام D اضافه شود و ارتفاع مساوی طول نقطه باشد - و چنانکه دانستیم ، یونانیان از این اضافه به لفظ پارابوله (مکافی) تعبیر میکردند . از طرف دیگر ، اگر S مستطیلی به قاعده p و ارتفاع d باشد ، در هذلولی یا بیضی ، مربع عرض هر نقطه معادل مستطیلی است مضاف بر D که ارتفاعش طول نقطه باشد ، و بقدر مستطیلی متشابه و متشابه‌الوضع با S نسبت به مستطیل مضاف بر تمام D ، بترتیب ، زاید (هوپروله) یا ناقص (ایپس) باشد .

البته آپولونیوس معادلات جبری بکار نمبرده ، بلکه خواص اساسی مندرج در معادلات سابق الذکر را قریب به مضمون اخیرولی با عباراتی بسیار پیچیده‌تر و طولانی‌تر

(*) به لاتینی لاتوس رکتوم (latus rectum) . بالاخص اگر محور کانونی را محور طول بگیریم ، ضلع قائم مساوی وتر کانونی عمود بر محور کانونی خواهد بود ، و ریاضیون انگلیسی زبان هنوز اصطلاح لاتوس رکتوم را باین معنی بکار می‌برند ، و آن مضاعف پارامتر منحنی در اصطلاح ریاضیون فرانسه زبان است .

بیان میکرده است، و برحسب نوع اضافدای که در مورد هر قطع درکار می‌آمده آن قطع را بایکی از الفاظ پارابوله، هویربوله، و الیسیس مشخص می‌نموده است، و چنانکه اشاره کردیم، نامهای قطع مکافی و قطع زاید و قطع ناقص که ریاضیون اسلامی برمنحنیات سه گانه نهاده‌اند، و نیز نام سه منحنی در زبانهای اروپائی ناشی از همین تسمیدی آپولونیوس میباشد.

§ ۳۰۳ جبر درهند

§ ۳۰۳۰۱ مقدمه - اگرچند نمیدانیم اطلاعات جبری هندیها در دانشمندان دوره‌ی اسلامی تا چه حد مؤثر بوده و حتی به قول وپکه*، در پایان قرن دهم میلادی ریاضیون اسلامی از طرق هندی حل معادلات سیال بی‌خبر بوده‌اند، از جهت اینکه بعضی آثار علمی هندی در قرون اولی اسلامی به مسلمانان رسیده اطلاع از آثار ریاضی هندی در تحقیق تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی ضروری است.

تاریخ اوایل ریاضیات در هند روشن نیست. قرآینی هست حاکی از اینکه هندیان نیز مانند سایر اقوام مترقی توجه خاص به نجوم و محاسبات داشته‌اند. قدیمترین آثار علمی هندیان در نجوم کتابهای موسوم به سدهانت است که بیشتر جنبه‌ی نظری داشته، و از کتابهای نجومی عملی و جداول و زیجات ممتاز بوده، و این لفظ سدهانت در جزء اسم تألیفات بعدی ریاضیون و منجمین هندی نیز می‌آید. از سدهانت‌های نسبتاً قدیمی پنج سدهانت - سورِ سدهانت، بیتامه سدهانت، واسیشته سدهانت، پاولیسا سدهانت، و رومک سدهانت - معروف است، که فقط اولی بصورت اصلی در دست میباشد، و محقق شهیر، جورج سارتن، به تخمین و احتمال آنها را از نیمه‌ی اول قرن یستم میلادی می‌شمارد†، و در حال کتاب پنجم سدهانتیکا از وراهمیهیر که

(*) وپکه، فخری، ص ۴۲.

(†) سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۳۸۷.

در حدود ۵۰۵ میلادی تألیف شده مشتمل بر خلاصه‌ای از سدهانت های پنجگانه می باشد .

حادثه‌ای که در تاریخ ریاضیات در هند اهمیت خاص دارد هجوم یونانیان به هند در جنگهای کشور گشائی اسکندر مقدونی است (۳۲۷ ق م) ، و اعزام سفرای یونانی در دربار پادشاهان هند ، و اگرچه تأثیر متقابل دانشمندان یونانی و هندی را نمی توان بدرستی دانست ، سدهانت های مذکور خالی از تأثیر افکار یونانی نیست + .

در هر حال ، دو خدمت بزرگ هندیان را به بسط ریاضیات نمی توان فراموش کرد . یکی وضع ارقام ، که اولین اثر آن در کتیبه های دوران پُر فروغ آشوکا ، پادشاه معروف هند در قرن سوم ق م ، دیده میشود ؛ و بنا بر معروف ، ارقام هندی در قرن دوم هجری به حوزه علمی بغداد رسید * ، و سپس به اروپا وارد شده است . و دیگر استعمال جیب است در مثلثات بجای وتر که در نزد یونانیان بکار می رفته است .**

§ ۳۰۳۰۲ جبر در هند - بر طبق آنچه از آثار هندی بر می آید ، ریاضیون

(+) پاولیسا سدهانت را به پاولوس اسکندرانی (قرن چهارم میلادی) ، عالم یونانی احکام

نجوم ، نسبت داده اند .

(*) درین باب باید توجه داشت که سوروس سبخت ، اسقف دانشمند مدرسه ی قنسرین (از شهرهای سوریه بر ساحل علیای فرات) در قرن هفتم میلادی ، در ۶۲۲ میلادی از ارقام هندی صحبت می کند . رجوع شود به : سارتن ، مدخل ، جلد اول ، ص ۴۹۳ ؛ سمیث ، تاریخ ، جلد اول ، ص ۱۶۶ - ۶۷ .

(**) ظاهراً اول کسی که نام مخصوصی برای تابعی که ما امروز جیب و فرنیکیها Sinus می خوانند وضع کرده آریبهط (رجوع شود به صفحه ۹۴) است ، که آنرا اردها جیا (بمعنی نصف وتر) و جیا اردها ، و بعد ، باختصار ، جیا یا جیو (بمعنی وتر) نامیده است ، و همین لفظ است که در نزد ریاضیون اسلامی بصورت جیب تعریف شده ، و گرااردوس کرموننسیس (Gerardus Cremonensis) (۱۱۱۴ - ۸۴) ، مترجم معروف ایتالیائی ، در ترجمه ی آثار عربی به لاتینی ، لفظ سینوس را ، که کمابیش هم معنی لفظ عربی جیب (بمعنی کربان وغیره) است ، بجای آن اصطلاح کرده است . رجوع شود به : سمیث ، تاریخ ، جلد ۲ ، ص ۶۱۵ - ۶۱۶ .

هندی در اوایل قرن هفتم میلادی در تحلیل جبری مسائل مهارتی بهم رسانیده بودند ،
و از حلّ معادلات درجه‌ی دوّم با خبر بودند .

از ریاضیون هندی در دوره‌ی مورد نظر ما که در جبر چیزی نوشته‌اند اسامی چهار
تن قابل ذکر است : آریبهط (۴۷۵ یا ۴۷۶ - حدود ۵۵۰ ب م) ، برهنگیت (متولد
۵۹۸ ب م) ، مهاویر (رونقش در حدود ۸۳۰ ب م) ، و بهاُسکر (۱۱۱۴ - حدود
۱۱۸۵ ب م) .

آریبهط همان کسی است که در آثار دوره‌ی اسلامی به ارجبهد و ارجبهر
معروف شده [†] . وی کتابی نوشته (۴۹۹ ب م) موسوم به آریبهطیه که اساساً مشتمل بر
همان مطالب سدهانت هاست منتهی به صورتی منظم تر ، و قسمتی از آن در ریاضیات
است . بالاخص ، حلّ معادلات سیّال درجه‌ی اوّل بطریقی شبیه طریقه‌ی کنونی حلّ این
معادلات بوسیله‌ی کسور مسلسل درین کتاب آمده است . و نیز مندرجات کتاب حاکی
از اینست که مؤلف از حلّ معادلات درجه‌ی دوّم و خواصّ تصاعد عددی باخبر بوده
است . *

برهنگیت در حدود سال ۶۲۸ ب م کتابی بنام [‡] برهنگیتیه - سدهانت نوشته که
عمدهٔ مبتنی بر مسوری سدهانت و آریبهطیه است ، ولی مطالب تازه‌ای نیز دارد . فصول
دوازدهم و هیجدهم کتاب در باب ریاضیات است ، و در این فصلها مؤلف به معادلات
درجات اوّل و دوّم معین و سیّال پرداخته است .

مهاویر در حدود ۸۳۰ میلادی کتابی بنام [§] سنیه سار سمجره نوشته که جامعتر ولی
مقدماتی‌تر از کتاب برهنگیت است ، و در آن سه نوع از معادلات درجه‌ی دوّم را (بدون
توجه به ریشه‌های موهومی) حل کرده و از تصاعدات هندسی نیز سخن گفته است .

(†) تقی زاده ، دروس ، ص ۲۱ ؛ نالینو ، علم الفلك ، ص ۱۵۳ .

(‡) این آریبهط را نباید با شخص دیگری به همین نام که ظاهراً در اواسط قرن دهم
میلادی می‌زیسته اشتباه کرد .

شاید ذکر این مطلب نیز خالی از فایده نباشد که کتاب مهاویر اولین اثر هندی است که در آن مؤلف به بیضی پرداخته است (بحث مهاویر در این باب دقیق نیست).
 بهاسکر بزرگترین ریاضیون هند در فاصله‌ی سالهای ۱۰۰۰ و ۱۵۰۰ میلادی است. وی معنی واقعی تقسیم بر صفر را دریافته و معادلات درجه‌ی دوم را به یک صورت تحویل کرده، و معادلات سیال درجات اول و دوم را حل نموده است.

§۳۰۴ علم جبر در دوره‌ی اسلامی

§۳۰۴.۰۱ مقدمه - اگرچه موضوع اصلی این فصل تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی (تازمان خیام) است، مناسب دانستیم که مقدمه‌ی از چند موضوع دیگر - به شرح ذیل

نهضت علمی اسلامی (§ ۳۰۴.۰۲)،

مترجمین (§ ۳۰۴.۰۳ و § ۳۰۴.۰۳.۰۱)،

خوارزمی (§ ۳۰۴.۰۴)،

سایر علمای معروف جبر در دوره‌ی اسلامی (§§ ۳۰۴.۰۵ - ۳۰۴.۰۵.۰۸) -

صحبت کنیم، چون اطلاع اجمالی از این موضوعها در فهم مبانی دانش ریاضی - بالاخص علم جبر - در دوره‌ی اسلامی و نیز در فهم مطالبی که بعداً در این کتاب می‌آید ضروری است. بنابراین، پس از اشاره به آغاز نهضت علمی اسلامی و بسط آن، از چند تن از مترجمین و دانشمندان معروف اسم می‌بریم. در باب علمای جبر، خوارزمی (محمد ابن موسی) را بعلمت اهمیت و شهرت وی در تحت عنوان مستقلی آورده‌ایم (§ ۳۰۴.۰۴)، و از کارهای جبری خیام در قسمت چهارم کتاب به تفصیل سخن خواهد رفت. از بعضی دیگر از علمای معروف جبر در اجزای § ۳۰۴.۰۵ سخن می‌گوئیم.

پس از تمهید مقدمات مذکور، تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی خواهد آمد (§ ۳۰۵).

پیش از ختم این مقدمه، به منظور احتراز از تکرار، باید گفته شود که ما در

این کتاب سراینکه تراجم احوال اشخاص مورد بحث را بنویسیم نداشته‌ایم، و در مواردی که خواننده مطالبی شیبه به تراجم احوال در کتاب میبیند، نباید برماخرده بگیرد که چرا حق اشخاص را ادا نکرده‌ایم، و مثلاً از متجاوز از ۲۷۰ اثر منسوب به کندی (۳۰۴۰۳۰۱ §) فقط کتاب او را در حساب هندی و از نود یا بیشتر کتاب منسوب به ابن هیثم (۳۰۴۰۵۰۶ §) فقط پنج اثر او را نام برده‌ایم، چو توجه ما در کتاب حاضر بیشتر معطوف بوده است به آثار جبری یا آنچه مبنای جبر قدیم تلقی تواند شد.

۳۰۴۰۲ § نهضت علمی اسلامی - اگرچه پس از ظهور دین اسلام در مدت کوتاهی عربها بر بسیاری از مراکز تمدن آن عصر استیلا یافتند، و در نتیجه روابطی که خواهی نخواهی بین این قوم و دولت‌های متمدن مغلوب برقرار شد عربها متوجه علوم و معارف گردیدند، قریب یک قرن و نیم طول کشید تا نهضت علمی اسلامی، در زمان خلافت (۱۳۶ - ۱۵۸ هـ ق) ابو جعفر منصور، دومین خلیفه‌ی عباسی، آغاز شد. و این نهضت در عهد خلافت (۱۷۵ - ۱۹۳ هـ ق) هارون الرشید ادامه یافت، و در خلافت (۱۹۸ - ۲۱۸ هـ ق) مأمون عباسی به کمال رسید.

منصور در ۱۴۵ هـ ق بغداد را بنا کرد، و آنجا را دارالخلافه‌ی خود قرار داد، و علماء و دانشمندان را از اطراف طلبیده به ترجمه‌ی کتب علمی از زبانهای یونانی و سریانی و هندی و فارسی به عربی واداشت.

از وقایعی که در تاریخ علوم در دوره‌ی اسلامی اهمیت دارد اینست که در عهد منصور هیئتی از هند به دربار وی آمد (۱۵۴ یا ۱۵۶ هـ ق)، و - به نقل از کتب اسلامی تاریخ علوم - در بین آنان دانشمندی بود به نام کَنَکَه یا مَنَکَه که کتابی در علم نجوم همراه داشت، و از روی آن نجوم هندی را به دو نفر از منجمین دربار منصور، یکی ابراهیم ابن حبیب فزاری^۵ و دیگری یعقوب ابن طاریق، آموخت، و این دو تن

(۵) در این باب رجوع شود به: تقی زاده، دروس، صص ۳۶، ۳۸ و ۳۹ و ۵۶ و ۵۵؛

سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۵۳۵؛ تاریخ‌الحکماء، ص ۱۷۷؛ نالینو، علم الفلك، ص ۱۵۶، بیعد.

هر دو از منجمین بزرگ دربار منصور بودند .

کتابی که کنکه همراه آورده بود در نزد مسلمین به سِنْدُ هِنْدُ معروف شده ، و اصل آن مورد اختلاف است ، و بعضی آنرا همان سوری سدهات و برخی آنرا براهمسهط سدهات تألیف برهمکیت (§ ۳۰۳۰۲) میدانند ، و در هر حال ، ظاهراً لفظ سندهند تحریفی از لفظ سدهات است .

فزاری کتاب سندهند را به امر منصور ترجمه کرد ، و احتمالاً همین ترجمه منشاء ورود ارقام هندی به حوزه‌ی علمی بغداد بوده است .

چنانکه قبلاً اشاره کردیم ، نهضت علمی اسلامی در عهد خلافت مأمون به اوج رسید . وی دارالعلم معروف به بیت الحکمه را ، که مجهز به کتابخانه و رصدخانه بود در بغداد تأسیس کرد ، و در تهبیه‌ی نسخ یونانی جدّ بلیغ مبذول داشت ، و حتی هیئتی برای این منظور به دربار لئوی ارمنی ، امپراطور بیزانس ، اعزام نمود ، و مترجمین زبردست را به ترجمه‌ی این نسخه‌ها گماشت .

خلاصه ، شرح ترجمه‌ها و تألیفات و ارساد و اندازه‌گیریها و سایر کارهای علمی که در این دوره‌ی درخشان به عمل آمده ، و ذکر نام دانشمندی که منشأ این آثار بوده‌اند در این مختصر نمیگنجد ، و از موضوع بحث ما نیز خارج است ، مگر در بعضی موارد که به آنها اشاره خواهد شد .



از جهت کارهای ریاضی ، حوزه‌ی بغداد تا اواخر قرن چهارم هجری رونق داشت ، و اگرچه از اواخر نیمه‌ی اول قرن سوم متدرجاً بعضی دانشمندان حوزه‌ی بغداد این شهر را ترک گفته به سایر بلاد اسلامی مهاجرت کردند ، قرون سوم و چهارم هجری را میتوان «عصر طلایی» ریاضیات در بغداد محسوب داشت .

تاریخ طلوع و غروب حوزه‌های علمی در مراکز مختلف تحت تسلط دولتهای اسلامی و انحطاط علوم عقلی در ممالک اسلامی از بحث ما خارج است ، و به همین اشاره

اكتفاميكنينم كه از اواخر قرن ششم هجرى تحقيقات علمى در اين ممالك روبه انحطاط گذاشت ، و مثلا در علوم رياضى ، اگر از جمعى انگشت شمار بگذريم ، كسى كه بتواند با دانشمندان پيشين برابرى كند درسزمينهاى تحت حكومتهاى اسلامى ظهور نكرد .

§ ۳۰۴۰۳ مترجمين - منابع عمدهى دانش رياضى دورهى اسلامى در درجدهى اول آثار يونانى و سپس آثار هندى است ، و نظرى اجمالى به فهرست مترجمين و مؤلفين حوزهى بغداد كوششى را كه دانشمندان اين حوزه در اخذ و بسط دانش خارجيان داشته‌اند بخوبى روشن مىسازد .

از يعقوب ابن طارق و ابراهيم ابن حبيب فزارى در § ۳۰۴۰۲ اسم برديم ، و گفتيم كه احتمالاً ترجمه‌ى سند هند كه بتوسط فزارى بعمل آمد وسيله‌ى ورود ارقام هندى به حوزهى علمى بغداد بوده است . و بى شك ، زيجهاى كه بر اساس سند هند تنظيم شده - مانند زيج خوارزمى (§ ۳۰۴۰۴) و زيجهاى اوليهى احمد ابن عبدالله مروزى ، معروف به حبش حاسب^{۲۵} - ممدّ اين امر بوده است . بعلاوه در آثار علمائى اسلامى از كتابهاى با عناوين حساب هندى و امثال آن اسم برده ميشود ، كه حاكى از ورود رياضيات هندى - لااقل تا حدّى - در نزد رياضيون دورهى اسلامى است .

اما در باب ترجمه‌هاى آثار يونانى به زبان غربى اطلاعات ما وسيعتر و قاطع تر است ، و اگر هم از آثار مترجمه‌ى بسيار زيادى كه در كتب تاريخ علوم ذكر شده ولى متأسفانه بر اثر تصريف زمان فقط اسمى از آنها مانده است بگذريم ، آثارى كه چاپ شده يا نسخ خطى آنها با نام و نشان در دست است گواه كافى بر شور و ولع دانشمندان حوزهى بغداد به كسب دانش يونانى است .

از مترجمين معروف آثار رياضى يكى حجاج ابن يوسف ابن مَطَر است كه در عهد هارون الرشيد (خلافتش ۱۷۰-۱۹۳ هـ ق) و مأمون (خلافتش ۱۹۸-۲۱۸ هـ ق) رونق داشته و كتاب اصول (§ ۳۰۲۰۳۰۱) را يك بار به امر هارون و ديگر بار به

(۲۵) منجم معروف حوزهى بغداد در عهد مأمون و معتصم . وى مخترع نلّ در مثلثات است .

امر مأمون به عربی ترجمه کرده ، و اولی نخستین ترجمه‌ی اصول است به عربی * .
دیگر اسحاق ابن حنین (متوفی در ربیع الاول ۲۹۸ یا ۲۹۹ هـ ق) ، پسر حنین
ابن اسحاق^{††} معروف ، است که طیب و ریاضیدان و بزرگترین دستیار پدر بود ، و
بعضی آثار اقلیدس و ارشمیدس و نیز مجسطی بطلمیوس را به عربی ترجمه کرد و بعضی
ازین ترجمه‌ها را ثابت ابن قره (§ ۳۰۴۰۳۰۱) اصلاح نمود .

دیگر قسطا ابن ثوقا البعلبکی (متوفی در ۳۰۰ هـ ق) ، ریاضیدان و طیب و
فیلسوف و منجم مسیحی یونانی الاصل ، است ، که آثار بسیاری از یونانیان را ترجمه و
و یا ترجمه‌های دیگران را اصلاح کرد ، که از آن جمله است اصول اقلیدس (§ ۳۰۲۰۳۰۱)
و کتاب حساب دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) . و بعضی آثار هرون اسکندرانی (§ ۳۰۲۰۱) .
و وی خود صاحب تألیفات عدیده بوده ، از قبیل کتاب مدخل هندسه ، کتاب شکوک اقلیدس ،
کتاب اعداد ، کتاب استخراج مسائل عددی ، و کتاب در حساب تلاقی در جبر و مقابله .

و دیگر هلال ابن هلال حمصی (متوفی در حدود ۲۷۰ هـ ق) است که چهار
مقاله‌ی اول کتاب مخروطات آپولونیوس (§ ۳۰۲۰۳۰۳) را برای بنوموسی ترجمه کرد .
و دیگر ابوالفتح اصفهانی [ابوالفتح محمود ابن محمد ابن قاسم ابن فضل
اصفهانی] است که احتمالاً در حدود ۳۷۰ هـ ق برآمده ، و وی تحریر نوی از همان کتاب
مخروطات پرداخته و پنج مقاله‌ی اول آنرا شرح کرده ، و کتاب تلخیص المخروطات را ، که
ملخصی از هفت مقاله‌ی اول مخروطات آپولونیوس است ، چنانکه در مقدمه‌ی آن کتاب
مذکور میباشد (†) ، بنام علاءالدوله ابوکالیجار کرشاسف ابن علی ابن فرامرز ، ملقب

(*) حجاج از اولین مترجمین مجسطی است به عربی .

(††) ابوزید حنین ابن اسحاق العبادی (۱۹۴ - ۲۶۵ هـ ق) ، طیب معروف و از بزرگترین
دانشمندان و رادمردان عصر خود ، که در خدمت بنوموسی (§ ۳۰۴۰۳۰۱) به جمع‌آوری و
ترجمه‌ی نسخ یونانی اشتغال داشت .

(†) نسخه‌ی شماره‌ی ۲۷۲۴ کتابخانه‌ی اباصوفی که عکس آن در کتابخانه‌ی مرکزی

دانشگاه تهران موجود است .

به حسام امیرالمؤمنین[☆]، تألیف کرده است.

§ ۳۰۴۰۳۰۱ - باید دانست که بعضی از مترجمین آثار یونانی و غیره خود دانشمندان عالی مقام و صاحب تألیفات و تحقیقات گرانبها بوده اند، و برخی از دانشمندان مترجمینی عالی قدر در استخدام داشته اند.

از آن جمله میتوان سه برادر دانشمند را - محمد (متوفی در ۲۵۷ یا ۲۵۹ هـ ق) و احمد و حسن - معروف به بنوموسی، فرزندان موسی ابن شاگرد که خود از منجمین دربار مأمون بود، نام برد. بنوموسی در ریاضیات و نجوم مقام شامخی داشتند، و بعلاوه قسمت اعظم ثروت خود را وقف تهیّه و ترجمه‌ی نسخ یونانی کرده بودند، و دانشمندان مترجم عالی مقامی چون حنین ابن اسحاق (ذیل صفحہ ۹۹) و ثابت ابن قره در استخدام آنان بودند. آثار زیادی در ریاضیات و نجوم و مکانیک باین سه برادر منسوب است. از آن جمله است کتابی در مخروطات و کتابی در مساحت کرات و تثلیث زوایا و درج دو واسطی متناسب بین دو طول (۳۰۷۰۱ §). کتاب معروف حیّل بنوموسی، در مکانیک، از این سه برادر است.

دیگر ابویوسف یعقوب ابن اسحاق کندی (متوفی در حدود ۲۶۵ هـ ق)، معروف به فیلسوف العرب، است که در فلسفه و زبان یونانی کمال تبخّر را داشت، و بسیاری از آثار یونانی بوسیله‌ی وی یا تحت سرپرستی او به عربی ترجمه شد، و نیز ترجمه‌های دیگران را اصلاح کرد. از آثار وی کتابی است در حساب هندی در چهار مقاله[†]. دیگر ثابت ابن قره [ابوالحسن ثابت ابن قره ابن مروان حرّانی] (۲۱۱-۲۸۸ هـ ق) است که از بزرگترین ریاضیون عرب و، بعلمت تسلّطی که بر زبانهای عربی و

(☆) مقایسه شود با: دکتر محمد معین، چهارمقاله‌ی عروضی سمرقندی، تهران ۱۳۳۳-

۳۵، ۴۴۴.

(†) عدّه‌ی آثار منسوب به کندی قریب ۲۷۵ است. بسیاری از آثار وی بتوسط کِراردوس کِرْمونِنسیس (Gerardus Cremonensis) (۱۱۱۴ - ۱۱۸۷)، مترجم معروف ایتالیائی، به زبان لاتینی ترجمه شده است.

سربانی و یونانی داشته ، از بهترین مترجمین آثار یونانیان بوده ، و در واقع مؤسس دارالترجمه‌ای بوده که بسیاری از بستگانش در آن کار میکردند . آثار مترجمدی وی یا ترجمه‌هایی که تصحیح و تنقیح کرده‌مشممل است بر کتاب سمره و استوانه (از ارشمیدس) اصول و معطیات (از اقلیدس) ، مقالات ۵ - ۷ مخروطات آپولونیوس ، و غیره . وی خود صاحب تألیفات نفیسی در ریاضیات بوده که از آن جمله میتوان رومقاله راجع به حساب نیکوماخوس^{۱۶} و مقاله در تصحیح مسائل جبریرهان هندسی را نام برد .

نوهی او ، ابواسحاق ابراهیم ابن سنان ابن ثابت ابن قره (متوفی در ۳۳۵ هـ ق) منجم و ریاضیدانی عالی‌مقام بوده و کتاب مخروطات آپولونیوس را شرح کرده و مقاله‌ای در رسم قطوع مخروطی بطریقهای نقاطیابی به وی منسوب است ، و بقول سارتن «طریقهای وی برای تعیین سطح سهمی از طریقهای ارشمیدس ساده تر و در واقع ساده ترین طرق حل این مسئله قبل از اختراع حساب انتگرال بوده است»^{۱۷} .

§ ۳۰۴۰۴ خوارزمی [محمد ابن موسی الخوارزمی] (متوفی در حدود ۲۳۲ هـ ق = ۸۴۶ م⁺) - خوارزمی یکی از بزرگترین ریاضیون و منجمین بیت‌الحکمه‌ی مأمونی (۳۰۴۰۲ §) است . وی دانش هندی و یونانی را تلفیق کرده⁺ ، ولی چون در زمان او هنوز ترجمه‌ی آثار یونانی به عربی در مراحل اولیه بود ، بیشتر تحت تأثیر

(۱۶) صورت عربی نام نیکوماخوس ، ریاضیدان یونانی که در اواخر قرن اول میلادی رونق داشته . اثر معروف وی کتابی است به نام مدخل علم حساب که قدیمترین اثر موجودی است که در آن حساب بعنوان علم مستقلی تلقی شده است . کسانی که خواستار اطلاع از مطالب این کتاب باشند می‌توانند به کتاب المدخل الی علم العدد (ترجمه‌ی ثابت ابن قره ، باهتمام و بلهم کوتس ، بیروت ۱۹۵۸) رجوع نمایند .

(۱۷) سارتن ، مدخل ، جلد اول ، ص ۶۳۲ .

(⁺) بروکلمان ، جلد اول ، ص ۲۴۰ ، چاپ ۱۹۴۳ . سارتن تاریخ وفات او را ۸۵۵ م ب م

ضبط کرده است (مدخل ، جلد اول ، ص ۵۶۳) .

(⁺⁺) سارتن ، مدخل ، جلد اول ، ص ۵۶۳ .

هندیان بوده است *.

شاید علت عمده شهرت خوارزمی این باشد که وی اول کسی است که کتابی به اسم جبر و مقابله نوشته، و از آن پس این اسم بر علمی که ما «جبر» میخوانیم مانده، و نام این علم در السنه‌ی اروپائی نیز از نام کتاب خوارزمی گرفته شده است. **

اما انتخاب این اسم ناشی از دو عملی است که در حل معادلات معمول بوده و خوارزمی برای اول بار آنها را تنقیح و تدوین نموده، و ازین راه کومکی به وارد کردن جبر در مرحله‌ی علمی نموده است. بیان این دو عمل بر طبق اصطلاحات دانشمندان اسلامی بدین شرح است † که هر گاه در یک طرف معادله «استثنائی» باشد (یعنی جمله‌ای که باصطلاح امروزمندی خوانده میشود)، آن طرف را کامل میکنند، بدین نحو که آن استثناء را اسقاط میکنند و معادل آنرا بر طرف دیگر می‌افزایند، و این «تکمیل» را جبر خوانند؛ و نیز هر گاه در دو طرف معادله دو جمله از یک جنس (باصطلاح امروز، دو جمله‌ی متشابه) موجود باشد، اگر این دو جنس در عدد (یعنی از حیث ضرب) مساوی باشند آنها را اسقاط کنند، و الا آنرا در طرف اقل بکلی اسقاط کرده در طرف دیگر بجای عدد اکثریادتی آنرا بر عدد اقل می‌گذارند، و این عمل را مقابله خوانند ††.

نظر به اهمیت اساسی اعمال «جبر» و «مقابله» در حل معادلات، خوارزمی کتاب خود را حساب الجبر و المقابله نامیده، و چنانکه میگوید ††† آنرا به اشاره‌ی مأمون تألیف

(*) دایرة المعارف اسلام، جلد دوم، در مقاله‌ی خوارزمی.

(**) برای تحولات این اسم در السنه‌ی اروپائی رجوع شود به سمیث، تاریخ، جلد دوم،

ص ۳۸۸ - ۳۹۲.

(†) مثلاً رجوع شود به کنز الحساب، چاپ تهران، ۱۲۷۹ هـ ق، ص ۲۵۶ - ۲۵۷.

(††) خلاصه، بوسیله‌ی عمل جبر مثلاً معادله‌ی $۸ = ۱۲ - ۵x$ را بصورت $۵x = ۲۰$ می‌نوشتند،

و بوسیله‌ی مقابله مثلاً معادله‌ی $۱۵x = ۱۲ + ۷x$ را بصورت $۱۲ = ۳x$ درمی‌آوردند. البته امروز هر دو نتیجه بوسیله‌ی عمل نقل جمله‌ای از یک طرف معادله به طرف دیگر بعمل می‌آید، ولی قدما از اعداد منفی و تسهیلات ناشی از آنها بی‌خبر بودند.

(†††) کتاب الجبر و المقابله، لمحمد بن موسی الخوارزمی، چاپ مصر، ۱۹۳۷، ص ۱۵.

کرده است. رؤوس مسائل این کتاب عبارتست از قواعد حلّ معادلات درجات اوّل و دوّم و اثبات هندسی دستورات حلّ معادلات درجه‌ی دوّم (۳۰۶۰۷ §)، دستوراتی در باب چهار عمل اصلی و جذر، مسائلی که حلّ آنها به معادلات درجات اوّل و دوّم راجع میشود، اربعدی متناسبه، سطوح واحجام، و مسائل مربوط به تقسیم ارث.

جبر و مقابله‌ی خوارزمی در قرون وسطی نزد اروپائیان کمال شهرت را داشته و تا زمان ویت^۴ مبنای مطالعات علمی ریاضیون اروپائی بوده، و چنانکه گفتیم، اسم علم جبر در السنه‌ی اروپایی از نام کتاب خوارزمی مأخوذ است^۵.

اثر عمده‌ی دیگر خوارزمی در ریاضیات کتابی است در «حساب هند» که اصل آن از بین رفته ولی ترجمه‌ی لاتینی آن مربوط به قرن چهاردهم میلادی در دست است، و آن ظاهرأ همان رساله‌ای است که درمآخذ اسلامی بنام کتاب الجمع والتفریق بحساب الهند آمده است، و بوسیله‌ی همین کتاب است که اروپائیان شمار هندی را آموختند.

§ ۳۰۴۰۵ سایر علمای معروف جبر در دوره‌ی اسلامی - عده‌ی کسانی از ریاضیون دوره‌ی اسلامی که آثاری در علم جبر یا تحقیقاتی مربوط به این علم به آنان منسوب است زیاد است. ما در این جزء اکتفا میکنیم به چند تن از علمای درجه‌ی اوّل و بعضی از آنانکه اطلاع اجمالی از کارهایشان برای مقصودی که در پیش داریم مفید است.

§ ۳۰۴۰۵۰۱ ماهانی [ابوعبدالله محمد ابن عیسی ماهانی] - ماهانی ریاضیدان

و منجم و اصلاً از ماهان کرمان ولی رونقش در بغداد بوده است (در حدود نیمه‌ی قرن سوّم هجری). از آثار ریاضی او شروحنی است بر هندسه‌ی اقلیدس و بعضی آثار ارشمیدس.

(*) François Viète (۱۵۴۰ - ۱۶۰۳)، ریاضیدان فرانسوی و به احتمال قوی بزرگترین

ریاضیون قرن شانزدهم میلادی. وی سهم بزرگی در بسط جبر و مثلثات دارد.

(†) لفظ آلتورسیم که بمعنی حساب یافن محاسبه وارد زبانهای اروپائی شده نیز از نام

خوارزمی مشتق است. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به: سمیت، تاریخ، جلد ۲، ص ۹ - ۱۱

و ۷۸ و ۸۸.

وی کوشش بسیار در حلّ مسئله‌ی ارشمیدس (§ ۳۰۷۰۱) کرده و آنرا به معادله‌ای که امروز به صورت $x^2 + a = cx^2$ نوشته میشود باز گردانیده، ولی از حل این معادله عاجز مانده است، و معادله‌ی مذکور در نزد ریاضیون اسلامی به معادله‌ی ماهانی معروف بوده است.^۵

معادله‌ی ماهانی را ابو جعفر خازن خراسانی (متوفی بین ۳۵۰ و ۳۶۰ هـ ق) بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد.

§ ۳۰۴۰۵۰۳ ابو کامل [ابو کامل شجاع ابن آسلم ابن محمد ابن شجاع الحاسب المصری] - ابو کامل از ریاضیون بزرگ دوره‌ی اسلامی و مصری الاصل است. رونق او را میتوان بین زمان محمد ابن موسی الخوارزمی (متوفی در ۲۳۲ هـ ق) و علی ابن احمد عمرانی (متوفی در ۳۴۴ هـ ق) دانست، چو ابو کامل جبر خوارزمی را تکمیل کرده و عمرانی جبر ابو کامل را شرح کرده است.

بقول سمیث (تاریخ، جلد اول، ص ۱۷۷)، هیچیک از معاصرین ابو کامل در حلّ معادلات و استعمال آنها در حلّ مسائل هندسی مهارت وی را نداشته، و بقول همین نویسنده، شهرت ابو کامل عمدتاً بواسطه‌ی تحقیقاتی است که در باب مخمس و معشر و در حساب وجبر کرده، و بقول سارتن (مدخل، جلد اول، ص ۶۳۰)، کرخی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) فایده‌ی فراوان از کارهای او برده است.

از آثار ابو کامل کتاب جبر و مقابله و کتاب خطاین را میتوان نام برد.

§ ۳۰۴۰۵۰۴ ابو الوفاء بوزجانی [ابو الوفاء محمد ابن محمد ابن یحیی ابن اسماعیل ابن عباس] (۳۲۸-۳۸۸ هـ ق) - ابو الوفاء از بزرگترین ریاضیون و منجمین ایرانی و متولد بوزجان قهستان بوده است. وی در ۳۴۸ هـ ق به عراق مهاجرت کرد و تاهنگام مرگ در آنجا بزیست. اهمیت کارهای ابو الوفاء در بسط علم مثلثات و در نجوم

(*) نیز رجوع شود به § ۳۰۷۰۲، § ۵۰۷۰۶، § ۶۰۴۰۴.

(†) بالاخص وی طریقی برای استخراج جیب زاویه‌ی سی دقیقه ابداع کرده که نتیجه‌ی آن

تا هشت رقم با مقدار واقعی $\sin 30'$ مطابقت دارد.

از موضوع بحث ما و از گنجایش این مختصر بیرون است. از آثار جبری منسوب به وی میتوان اینها را نام برد: تفسیر کتاب خوارزمی در جبر و مقابله؛ کتاب تفسیر کتاب ذیوفنطس^{۱۵} در جبر؛ تفسیر کتاب ابرخس^{۱۶} در جبر؛ کتاب براهین قضایای که ذیوفنطس در کتاب خود بکار برده بر حسب آنچه (ابوالوفاء) در کتاب تفسیر خود آورده است؛ کتاب در استخراج ضلع عمق و مال مال و آنچه از اینها ترکیب شود؛ و غیره.

متأسفانه هیچیک از تفسیرهای ابوالوفاء بر کتابهای خوارزمی و دیوفانتوس در دست نیست، و رسالدهی اخیر از فهرست فوق نیز بدست ما نرسیده است، ولی از روی عنوان آن میتوان احتمال داد که ابوالوفاء معادلهی $qx^2 + px^2 = q$ را (شاید بوسیلهی نقاط تقاطع دو قطع $y^2 + ax = b$ و $x^2 = y$) حل کرده است.

§ ۳۰۴۰۵۰۴ خجندی [ابومحمد حامد ابن خضر خجندی] (متوفی در ۳۹۰ هـ) - وی اهل ماوراءالنهر و از منجمین و ریاضیون معروف زمان فخرالدوله دیلمی بوده و بیشتر در نجوم و مثلثات کروی کار کرده است. خجندی برهان ناقصی بر امتناع معادلهی $x^2 + y^2 = z^2$ آورده است.

§ ۳۰۴۰۵۰۵ ابوسهل کوهی [ابوسهل و یحیی ابن رستم کوهی] - ابوسهل اصلاً از طبرستان بوده و در زمان عضدالدوله دیلمی و پسرش شرفالدوله میزیسته. کوهی نه فقط منجم دقیق و بزرگی بوده، بلکه در ریاضیات مقام شامخی داشته است.

(۵) رجوع شود به ذیل صفحهی ۸۲.

(۱) صورت نام هیپارخوس (Hipparchos) در مآخذ اسلامی. معروفترین شخصی که به این نام میشناسیم عالمی است از اهل نیقیه در ناحیهی بیتونیا از آسیای صغیر، که گویا در حدود ۱۸۵ ق م متولد شده و در حدود ۱۲۵ ق م وفات یافته است، و از منجمین معروف قدیم می باشد. از طرف دیگر این ندیم از شخصی به نام ابرخس رَفَنی اسم می برد (الفهرست، الفن الثانی من المقالة السابعة) که بگفتهی او صاحب کتابی در «صناعت جبر» بوده که ابوالوفای بوزجانی آنرا اصلاح کرده است. و این ابرخس ظاهراً منسوب است به رَفَنه از بلاد طرابلس شام. و بیکه عبارتی از پلوتارک نقل می کند (جبر عمر خیام، ص ۱۲۱) که بقول وی مؤید این است که ابرخس منجم تألیفات دیگری علاوه بر آثار نجومی داشته است. معذک معلوم نیست که «ابرخس رَفَنی» همان ابرخس منجم است یا نه.

تحقیقات او در حلّ معادلات بالاتراز درجه‌ی دوّم جزء بهترین آثار جبرهندسی دوره‌ی اسلامی است. در رساله‌ای، نامش زیادات بر کتاب ارشمیدس، علاوه بر مسائل مقاله‌ی دوّم کتاب کره و استوانه‌ی ارشمیدس، به حلّ مسئله‌ی تعیین عرفقینی کروی میپردازد که حجمش مساوی حجم عرفقین مفروض و سطحش مساوی سطح عرفقین مفروض باشد، و پس از ساختن معادله‌ی مسئله در آن بحث میکند. اثر دیگر او کتاب پر ۳۳ رتام است مشتمل بر طرح پرگاری برای رسم قطوع مخروطی.

§ ۴۰۴۰۵۰۶ ابن هیثم [ابوعلی حسن ابن حسن (یا حسین) ابن الهیثم البصری] (۳۵۴-۴۳۵ هـ ق) - ابن هیثم یکی از بزرگترین دانشمندان دوره‌ی اسلامی است. وی اوایل عمر را در بصره گذرانید و سپس به مصر رفت. محققین تاریخ علوم طرز فکر او را مانند دکارت می‌دانند. مؤلفات زیادی در علوم ریاضی و فیزیک و نجوم به ابن هیثم منسوب است^{۲۵} ولی متأسفانه اغلب آثار او از بین رفته است.

ابن هیثم مسئله‌ی ارشمیدس (§ ۳۰۷۰۱) را بوسیله‌ی تقاطع قطوع مخروطی حلّ کرده و تحقیقات خود را درین باب در رساله‌ی قول فی قسمة الخطّ الّذی استعمله ارشمیدس فی کتاب الكرة والاسطوانه گرد آورده است، و ویکه ترجمه‌ای از آنرا به جبر و مقابله‌ی خیّام خود ضمیمه کرده است.

§ ۴۰۴۰۵۰۷ - کرخی [ابوبکر محمد ابن حسن (یا حسین) حاسب کرخی] (متوفی در ۴۲۵ هـ ق) - کرخی از بزرگترین علمای جبر در قرن چهارم و اوایل قرن پنجم هجری است. اصل او از کرخ (در حومه‌ی بغداد) بوده^{۲۶}. آثار عمده‌ی وی

(۲۵) نام نود تألیف او در کتاب جبر و مقابله‌ی خیّام مصاحب آمده است (ص ۱۱۶-۱۲۲). از آن جمله است کتاب تحلیل میرهن مسائل عددی بطریق جبر و مقابله، تلخیص مقالات آو تو لویوس در قطوع مخروطات، مقاله در حساب هندی، کتاب در پر ۳۳ قطوع مخروطی، استخراج چهار خطّ (ظاهراً در حلّ معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = 2$). رجوع شود به § ۵۰۱۵۰۶۰۱، مثال چهارم.)
(۲۶) بعضی او را اهل کرج نزدیک تهران کنونی و نسبت او را کرخی دانسته‌اند. رجوع شود به صفحات ۷۳-۷۵ از مقاله‌ی عادل انبویا در مجله‌ی الدراسات الادبیه (شماره‌ی دوم و سوم، تابستان و پائیز ۱۳۳۸، نشریه‌ی دانشگاه لبنان، بیروت) و صفحات ۶۶-۶۹ از ملخص فارسی همان مقاله در همان شماره‌ی مجله‌ی مذکور.

یکی کتاب الکافی فی علم الحساب است که عمدهٔ مبتنی بر کارهای یونانیان می‌باشد، و دیگر کتاب معروف اوست در جبر و مقابله، بنام فخری، که آنرا باسم فخرالملک واسطی (ابو غالب محمد ابن علی ابن خلف)، وزیر بهاء الدوله و سلطان الدوله دیلمی و مقتول در ۴۵۷ هـ ق، تألیف کرده و از مهمترین تألیفات جبری دوره‌ی اسلامی است. فرانتس ویکه ترجمه‌ی فرانسوی ملخصی از این کتاب را به ضمیمه‌ی مقدمه‌ی جامعی درباب حلّ معادلات سیال در دوره‌ی اسلامی درپاریس چاپ کرده است (۱۸۵۳)، و بالاخص در مقدمه توضیح می‌دهد که کارهای ریاضیون اسلامی در این باب مبتنی بر کارهای دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) بوده، ولی ریاضیون مذکور راههای جدیدی برای حلّ مسائل سیال کشف کرده و معادلاتی از درجات بالاتر طرح و حلّ کرده‌اند، و کارهای فیوناتچی* که معمولاً بدیع شمرده میشود اکثر از کارهای ریاضیون دوره‌ی اسلامی و خاصه کتاب فخری گرفته شده است.

§ ۳۰۴۰۵۰۸ ابوالجود [ابوالجود محمد ابن احمد ابن لیث] - وی از ریاضیون بزرگ و معاصر ابوریحان بیرونی (۳۶۲-۴۴۵ هـ ق) بوده و در حلّ معادلات درجه‌ی سوم و مسئله‌ی تثلیث زاویه و تقسیم دایره به هفت و نه جزء متساوی مطالعاتی کرده و در رساله‌ای، در پاسخ ابوریحان در باب تقسیم دایره به نه جزء متساوی، حلّ مسئله را به معادله‌ی درجه‌ی سوم $x^3 + 1 = 3x$ باز گردانیده، و در رساله‌ی دیگری، که آن نیز در جواب سؤال ابوریحان است، مسئله‌ی مورد بحث (§ ۳۰۷۰۳) را به معادله‌ای از درجه‌ی چهارم باز گردانیده و معادله را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حلّ کرده است (§ ۳۰۷۰۳). بالاخره در جبر خیّام (§ ۵۰۱۱۰۱) اطلاعات جالبی از کارهای ابوالجود در حلّ معادلات درجه‌ی سوم آمده است.

§ ۳۰۵ تاریخچه‌ی علم جبر در دوره‌ی اسلامی - چنانکه سابقاً اشاره کردیم،

(*) لئوناردو فیوناتچی (Leonardo Fibonacci) یا لئوناردو داپیسا (L. da Pisa)،

ریاضیدان ایتالیائی و احتمالاً بزرگترین ریاضیون قرون وسطی در دنیای مسیحی بود. در حدود

۱۱۷۵ میلادی متولد شده و بعد از ۱۲۴۵ وفات یافته است.

علم ریاضی دوره‌ی اسلامی مبتنی بر ریاضیات هندی و یونانی است، و اگر چه تأثیر روشها و افکار دانشمندان این دو قوم در ریاضیون اسلامی مورد بحث است، شاید با اطمینان خاطر بتوان گفت که، لااقل پس از مراحل اولیه‌ی نهضت علمی اسلامی، دانش ریاضی مسلمین - و بطور کلی « اندیشه‌ی ریاضی » ریاضیون اسلامی - تحت نفوذ آثار و افکار دانشمندان یونانی بوده است، و نه فقط پیروی از افکار ریاضی یونانیان و تقلید از ریاضیون یونانی باعث محدودیتهائی در ریاضیات دوره‌ی اسلامی شده بود، بلکه تسلط افکار فلسفی یونانیان در باب مفاهیم ریاضی (از قبیل عدد و کمیت) بر دانشمندان دوره‌ی اسلامی بحدی بوده که تحقیقات ریاضی آنان را هم سخت تحت تأثیر گرفته و شدیداً محدود ساخته بود (مثلاً رجوع شود به § ۴۰۲۰۱)، و خاصه ریاضیدانهای فیلسوف و فلاسفی ریاضیدان حقایق ریاضی را بازیچه‌ی اصطلاحات فلسفی میکردند، و البته در پیچ و خم این بازی گمراه میشدند *.

پس از این مقدمه، می پردازیم به سیر عمومی دانش جبر در دست دانشمندان دوره‌ی اسلامی - در باب بعضی مسائل مخصوص بحث مفصل تری در §§ ۳۰۶۰۱ - ۳۰۶۰۹ - ۳۰۷۰۳ - ۳۰۷۰۱ خواهد آمد.

بطور خلاصه میتوان گفت که جبر در دست علمای دوره‌ی اسلامی از جهاتی پیشرفت کرده و از طرف دیگر انحطاط یافته است.

اول دفعه ریاضیون اسلامی جبر را وارد مرحله‌ی علمی کردند، و آنرا فی حد ذاته، و نه مثلاً بصورت مجموعه‌ای از مسائل متشکست، مورد تحقیق قرار دادند و معادلات سه درجه‌ی اول را طبقه بندی کردند (§ ۳۰۶۰۶، و نیز § ۴۰۲)، و در واقع میتوان گفت که اولین کتاب در علم جبر همان کتاب خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴) است، و در همین کتاب است که برای نخستین بار اعمال «جبر» و «مقابله» به صورت قواعد کلی منظمأ استعمال میشود.

(*) نمونه‌ی آن بحث بی بنیاد خیام است در تخطئه‌ی حل معادله‌ی دو معجزوری
 $(x^4 + ax^2 + b = 0)$ به طریقی که امروز معمول است (§ ۶۰۴۰۲۰۱).

پیشرفت دیگری که بدست ریاضیون اسلامی در جبر حاصل شده استعمال جبر در هندسه است و بالعکس، و این امر در بسط هندسه‌ی تحلیلی تأثیر بسزائی داشته است. *

بطور کلی، در مطالعه‌ی آثار ریاضیدانان دوره‌ی اسلامی در جبر، گاهی به مواردی برمیخوریم حاکی از اینکه افکار و روشهای مؤثر در بسط علم در ذهن آنان در شرف تکوین بوده، ولی متأسفانه از قوه‌ی بفعال درنیامده یا صورت منظم علمی نگرفته است، و شاید، چنانکه وپکه میگوید، «این امر بعلت نداشتن اندیشه‌ی نافذ و مخترع نبوده بلکه صرفاً بسبب نداشتن وقت کافی بوده است» (رجوع شود به آخر § ۳۰۶۰۸).

از طرف دیگر، با اینکه کتاب علم حساب دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) در قرون اولای اسلامی بدست دانشمندان حوزه‌ی علمی بغداد رسیده بود، ریاضیون دوره‌ی اسلامی روش علامتی دیوفانتوس را به یکسو نهاده بهمان مرحله‌ی لفظی (§ ۳۰۱۰۲) عقب رفتند، و این همان انحطاطی است که بآن اشاره کردیم.

تحلیل چگونگی این مسئله، و بطور کلی تحلیل تأثیر افکار یونانی در دانشمندان دوره‌ی اسلامی مسئله‌ایست غامض که شاید هیچگاه بدرستی روشن نشود. از یک طرف می‌بینیم که محقق نکته‌ی سنجی چون خیام چنان از روش دیوفانتوس غافل است که در سراسر رساله‌ی جبر وی کوچکترین اثری از استعمال علامات اختصاری دیده نمی‌شود، و از طرف دیگر در حل معادله‌ی $x^2 + bx = a$ (§ ۵۰۴۰۲) زوج بودن b و مجذور کامل بودن $a + (b/2)^2$ را شرط امکان مسئله می‌شمارد، و این قید را جز به تقلیدی بی مورد از دیوفانتوس حمل نتوان کرد، چو در مسائلی که مورد بحث دانشمند یونانی است نوع مسئله مقتضی منطق بودن جوابها است.

نمونه‌ی فاحش تر این روش متناقض کتاب معروف فخری است (§ ۳۰۴۰۵۰۷)

(*) رجوع شود به مطالب مقتبس از وپکه، در § ۳۰۷۰۲؛ و نیز: سمیت، تاریخ، جلد

که مبتنی بر کتاب دیوفانتوس ولی از آن جامعتر و متضمن طرق نوین و مسائل جدید و از درجات بالاتر از دوّم است، ولی از مرحله‌ی لفظی تجاوز نمی‌کند.

اگر از دیوفانتوس که مستقلاً به مسائل عددی راجع به معادلات پرداخته است بگذریم، باید گفت که در نزد یونانیان هندسه مرکز ریاضیات بود، و سایر مباحث این علم عملاً تحت الشعاع و تابع آن ملحوظ میشد. اما تسلط همین فکر بر ریاضیون اسلامی که خود جبر را به مرحله‌ی علمی وارد کردند - و خاصه در مورد ختّام که تجرید را بآن پایه رسانیده که معادلات را فی حدّ ذاته و قطع نظر از منشاء (مثلاً هندسی) آنها مورد بحث قرار میدهد - موجب شکفتی است.



منظور از سطور فوق، چنانکه اشاره کردیم، نظر اجمالی به سیر عمومی علم جبر در دوره‌ی اسلامی بود، و بهمین جهت از مسائل و مباحث خاص و کارها و زحمات ریاضیون دوره‌ی اسلامی در حلّ و بحث آنها صحبتی نکردیم. در این باب آنچه مربوط به کلیات جبر و معادلات درجات اوّل و دوّم و دستگامهای معادلات و معادلات سیّال است با کمال اختصار در ۳۰۶۰۹-۳۰۶۰۱ §§ گفته خواهد شد. تحقیقات ریاضیدانان اسلامی در معادلات درجه‌ی سوّم در ۳۰۷۰۲ § و ۴۰۲ § و در معادلات درجات بالاتر در ۳۰۷۰۳ § باجمال آمده است. اما در باب سایر مطالب مربوط به جبر و علم حساب - از قبیل دستورات جمع کردن سلسله‌ها، یا تحقیقاتی از قبیل آنچه ثابت ابن قرّه (۳۰۴۰۳۰۱ §) در اعداد متحابّه کرده است، و غیره - چیزی نمی‌گوئیم، و کسانی که خواستار اطلاعاتی در این مسائل هستند باید به کتابهای تاریخ علوم ریاضی مراجعه کنند.

§ ۳۰۶ معادلات جبری

§ ۳۰۶۰۱ مقدمه - موضوع اصلی جبر مقدماتی حلّ معادلات و مسائلی است که بآنها باز میگردد. بنا برین، درین مبحث تفصیل بیشتری در تاریخ حلّ معادلات و مطالب وابسته به آن می‌آوریم.

§ ۳۰۶۰۲ علامات جبری - قدیمترین علامات اعمال که از آنها خبر داریم از مصریان است (§ ۳۰۱۰۴)، ولی ظاهراً دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) اول کسی است که کوشش منظمی در وضع علاماتی برای اعمال کرده است، اما چون قدیمترین نسخه‌ای که از کتاب علم حساب او در دست است قریب هزار سال بعد از اصل کتاب نوشته شده نمیتوان اطلاع قاطعی از علاماتی که وی بکار برده عرضه کرد.

§ ۳۰۶۰۳ اعداد منفی - درین مقام ذکر مختصری از اعداد منفی خالی از فایده نیست، زیرا بی خبری ازین اعداد و تسهیلات و تعمیم‌های ناشی از آنها یکی از مشکلاتی بوده است که متقدمین در طبقه‌بندی و حل معادلات و مسائل جبری داشته‌اند، و مثلاً خوارزمی بجای اینکه از معادلات درجه‌ی دوّم بطور کلی بحث کند، و خیّام بجای بحث از معادله‌ی کلی درجه‌ی سوّم، در طرفین معادله، بوسیله‌ی اعمال «جبر» و «مقابلده» (§ ۳۰۴۰۴)، نقل و انتقالاتی بعمل می‌آورند که، باصطلاح ما، جمله‌ی منفی در معادله نباشد. و هم‌چنین، خیّام، باتسامحی که از وی عجیب است، و با احتمال قوی ناشی از تسلط افکار یونانیان بر اوست، در مواردی هم که شکل بالعیان میتواند ریشه‌های منفی را نشان دهد آنها را نادیده میگیرد.

مفهوم عدد منفی را فی‌حدّ ذاته نباید با عدد منفی بعنوان مفروق یا با احکامی از قبیل $(a-b)(c-d) = (ac+bd) - (ad+bc)$ که متضمّن اعمالی بر اعداد منفی است اشتباه کرد. بسیاری از اینگونه قواعد قرن‌ها پیش از پیدایش مفهوم اعداد منفی معلوم بوده است. چینیه‌ها در ایّام قدیم (لااقل از حدود ۲۰۰ سال قبل از میلاد) از اعداد منفی بعنوان مفروق صحبت کرده‌اند، و نیز، اگرچه دیوفانتوس معادله‌ی $4 = x + 20$ را بعلت اینکه منجر به $x = -4$ میشود «نامعقول» شمرده است، مسلماً از مفهوم انتزاعی عدد منفی بی‌خبر بوده، و حال آنکه یونانیان احکام هندسی معادل دستورات بسط $(a-b)^2$ و $(a+b)(a-b)$ را میدانسته و ثابت کرده بودند.

ریاضیون عربی نویس درین باب چیزی بر آثار یونانی نیفزوده‌اند و محمّد ابن موسی خوارزمی، و دیگران که بعد از او به جبر پرداخته‌اند، همان قواعد

علامات را بدون تصرّفی تکرار کرده‌اند ، و فقط از دوره‌ی رنسانس بپس است که اعداد منفی فی حدّ ذاته بتدریج مورد توجه قرار می‌گیرند . در نتیجه‌ی همین بی‌خبری ، طبقه‌بندی معادلات در نزد علمای اسلامی ناقص بوده ، زیرا مثلاً شامل معادله‌ی $ax + b = 0 (a > 0, b > 0)$ نمی‌شده است .

§ ۳۰۶۰۴ جمل معادله - پیش از رواج استعمال علامات ، الفاظی برای نامیدن جمل معادلات بکار میرفت . آحمس (§ ۳۰۱۰۴) مجهول را آه یا هانو ، بمعنی «جرم» یا «مقدار» یا «توده» و دیوفانتوس آنرا «عده‌ی نامعلومی از آحاد» مینامیده‌اند . در جبر هندسی یونانیان ، قوه‌ی دوّم مجهول (یعنی حاصل ضرب آن در خودش) «عدد چهار گوشه» یا «دوانامیس» (= قوه) خوانده می‌شده . دیافانتوس قوه‌ی سوّم را «کوبوس (= مکعب) و قوه‌ی چهارم را «دوانه‌دوانامیس» (= قوه - قوه) و قوه‌ی پنجم را «دوانه‌وکوبوس (= قوه - مکعب) و قوه‌ی ششم را «کوبوکوبوس (= مکعب - مکعب) خوانده است .

ریاضیون عربی نویس مجهول را شیء خوانده‌اند ، و لفظ لاتینی رس (res) ، بمعنی شیء ، که در قرون وسطی در مغرب زمین برای نامیدن مجهول بکار میرفته ناشی از همین جا است . ضمناً ریاضیون عربی نویس مجهول را (نسبت به مربع آن) ضلع یا جذر نیز میخواندند . لفظ اخیر در لغت بمعنی بیخ و ریشه است ، و لفظ لاتینی رادیکس (radix) ، بمعنی ریشه ، که در اروپا بکار میرفته ناشی از این تسمیه می‌باشد ، و بعضی معتقدند که علامت $\sqrt{\quad}$ ، که امروز برای نشان دادن ریشه بکار می‌رود و اوّل بار در آثار ربع اوّل قرن شانزدهم دیده می‌شود ، از شکل حرف r گرفته شده است .

ریاضیون عربی نویس قوه‌ی دوّم مجهول را مال میخواندند ، و لفظ لاتینی کنسوس (censos) ، بمعنی ثروت ، که سابقاً در اروپا به همان منظور بکار میرفته از این تسمیه ناشی است . قوه‌ی سوّم را «مکعب یا مکعب مینامیدند ، و نام سایر مراتب مجهولات ترکیبی از این الفاظ بوده است ، باین شرح :

شیء، جذر، ضلع	مجهول (x)
مال ^۵	قوهی دوم مجهول (x ^۲)
کعب	قوهی سوم مجهول (x ^۳)
مال مال	قوهی چهارم مجهول (x ^۴)
مال کعب	قوهی پنجم مجهول (x ^۵)
کعب کعب	قوهی ششم مجهول (x ^۶)
...	...

جمله‌ی معلوم معادله نیز اسامی مختلف داشته است. دیوفانتوس آنرا مولدیس، و ریاضیون عربی نویس «عدد»، «عدد مفروض»، «اعداد»، «آحاد»، و حتی «دراهم» (جمع «درهم») خوانده‌اند.[†]

دیوفانتوس ضرب را بیلطوس مینامیده که به معنی گروه‌است، و ریاضیون عربی-نویس گاهی لفظ عدّه را برای این منظور بکار میبردند، ولی اغلب ضرب را اسقاط میکردند. (رجوع شود به امثلی § ۳۰۶.۵).

§ ۳۰۶.۵ بیان معادلات - بیان معادلات تابع علامات اعمال و الفاظ یا علاماتی است که نماینده‌ی جمل معادله است.

(۵) باید دانست که لفظ مال به معنی مطلق مقدار نیز استعمال شده است. مثلاً یکی از مسائل فخری (§ ۳۰۴.۵.۷) و حل آن اینست:

«مال ضربته فی نفسه عاد اربعة امثال المال الاول فاجعل المال شیئا واضربه فی نفسه یکن مالا و ذلك یعدل اربعة اشیاء والشیء اربعة دراهم و هو المال».

که در آن فقط در موردی که لفظ مال با حروف درشت چاپ شده بمعنی مربع است:

«مقداری است که اگر در خودش ضرب شود چهار برابر مقدار اول حاصل گردد. مقدار اول را شیء [x] قرار دهید، و آنرا در خودش ضرب کنید. مال [x^۲] حاصل می‌شود، که معادل چهار شیء [۴x] است. پس شیء چهار درهم است، و آن همان مقدار [مطلوب] می‌باشد.

(†) لفظ «عدد» مترادف با آنچه ما امروز عبارت جبری می‌خوانیم نیز استعمال می‌شده است.

در دوره‌ی اسلامی بیان معادلات جنبه‌ی لفظی صرف داشته ^۵، و مثلاً معادله‌ی $x^2 + bx = a$ را چنین بیان میکردند:

اموال و جذور تعدل عددا (خوارزمی)

(مالهائی و جذرها معادل عددی است).

مال و جذر يعدل عددا (ختّام)

(مالی و جذر معادل عددی است).

والبتّه استعمال «ضلع» و «اضلاع» و «شیء» و «اشیاء» (§ ۳۰۶۰۴) بجای «جذر» و «جذور» هم معمول بوده است.

§ ۳۰۶۰۶ طبقه بندی معادلات - اولین طبقه بندی معادلات در آثار دانشمندان

اسلامی همان است که در جبر و مقابله‌ی خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴) آمده است. وی «اعدادی»^{۵۵} را که در «جبر و مقابله» محتاج الیه است منحصر به سه دسته - جذرها (مجهول) و مالها (قوه‌ی دوّم مجهول) و عدد (معلوم) - می‌شمارد،[†] و سپس از معادله‌ی بعضی از این اقسام با بعضی دیگر یا معادلات بین سه قسم مذکور صحبت میکند. در اصطلاح ریاضیون اسلامی معادلاتی که ما دوجمله‌ای می‌خوانیم مقترّات و معادلاتی که بیش از دوجمله داشته اند مقترّات و گاهی مرگبات خوانده می‌شدند. مفردات خوارزمی عبارتست ازین سه معادله:

مالهائی معادل جذرهایی است $(ax^2 = bx)$

مالهائی معادل عددی است $(ax^2 = c)$

جذرهایی معادل عددی است $(bx = c)$

دسته‌ی دوّم در طبقه بندی خوارزمی معادلات کامل درجه‌ی دوّم است:

معادله‌ی بین مالها و جذرها با عدد $(x^2 + bx = a)$

معادله‌ی بین مالها و عدد با جذرها $(x^2 + a = bx)$

(۵) به ذیل ^{۵۵} صفحه‌ی ۱۱۳ نیز رجوع کنید.

(۵۵) رجوع شود به ذیل [†] صفحه‌ی ۱۱۳.

(†) کتاب الجبر والمقابله لمحمد ابن موسی الخوارزمی، چاپ مصر، ۱۹۳۷، ص ۱۶.

معادله‌ی بین جذرها و عدد با مالها $(bx + a = x^2)$
 ختّام اول کسی است که ازین مرحله گذشته معادلات سه درجدهی اوّل و دوّم و سوّم را طبقه بندی کرده است (§ ۵۰۲ و § ۶۰۴۰۳).

طبقه بندی معادلات را بر حسب درجه از کارهای ریاضیون اروپائی میدانند، و در واقع چنین طبقه بندی با توجه به ضرایب حرفی که ممکن است مثبت یا منفی باشند از قرن هفدهم رواج یافته^۵، ولی مطلبی که در حدود اطلاعات محدود نگارنده تا زکی دارد اینست که طبقه بندی معادلات سه درجدهی اوّل در رساله‌ی تحلیل... ختّام (قسمت ششم کتاب حاضر)، برخلاف آنچه در رساله‌ی وی در علم جبر آمده (§ ۵۰۲)، بر اساس درجدهی معادله است، بدین معنی که در این رساله، پس از اشاره به معادلات درجات اوّل و دوّم ابتداءً از «معادله‌ی بین کعب و سایر مراتب»، یعنی معادله‌ی درجدهی سوّم، سخن می‌رود، و سپس این معادلات را به مفردات و مقترنات تقسیم میکند (§ ۶۰۴۰۳).

چنانکه قبلاً اشاره کردیم (§ ۳۰۶۰۳)، طبقه بندی معادلات قبل از کشف و رواج اعداد منفی ناقص بوده است.

§ ۳۰۶۰۷ حلّ معادلات درجات اوّل و دوّم - با احتمال قوی حلّ معادلات در اوایل بوسیله‌ی «امتحان» انجام میگرفته؛ ولی حتّی در زمان آحمس (حدود ۱۵۰۰ ق م یا پیشتر) طرق امتحان تا حدّی منظم و از صورت حدس صرف خارج شده بود^۶ و در واقع طریقه‌ی خطّابین در استخراج مجهولات صورت کامل شده و منقّحی از طریقه‌ی «امتحان» و «تصحیح» است، و این طریقه بوسیله‌ی ریاضیون دوره‌ی اسلامی به اروپائیان رسیده است.

در باب معادلات ساده‌ی درجدهی اوّل مطلب قابل ذکر نیست جز یادآوری

(۵) سمیت، تاریخ، جلد دوم، ص ۴۴۳.

(۶) رجوع شود به § ۳۰۱۰۴، و برای توضیحات نسبتاً جامع به سمیت، تاریخ، جلد

دوم، ص ۴۳۶.

تنقیح حلّ این معادلات بوسیله‌ی اعمال «جبر» و «مقابلہ» (§ ۳۰۴۰۴).
 قدیمترین اثر مشتمل بر حلّ مسائلی که صورت جبری آنها از درجہی دوّم
 است پایپروس برلن است (§ ۳۰۶۰۸) * .
 جبرهندسی یونانیان (§ ۳۰۲) مشتمل بر مسائلی است که از نظر جبری به
 معادلات درجہی دوّم باز میگردد ، و تفصیل این مطلب در فروع § ۳۰۲ گذشت .
 از اطلاعات هندیان در § ۳۰۳۰۲ یاد کردیم .
 حلّ معادلات کامل درجہی دوّم در کتاب خوارزمی (§ ۳۰۴۰۴) مبتنی بر طرُق
 یونانی است . وی این معادلات را ، عند اللزوم پس از تقسیم طرفین بر ضریب جمله‌ی
 درجہی دوّم ، به سه دسته تقسیم میکند (§ ۳۰۶۰۶) که باعلامات امروزی چنین نوشته
 می‌شود :

$$(۱) \quad x^2 + bx = a,$$

$$(۲) \quad x^2 + a = bx,$$

$$(۳) \quad bx + a = x^2,$$

و سپس به ذکر طریق حلّ هر يك و اثبات هندسی آن می پردازد . برای مزید
 توضیح روش خوارزمی را در معادله‌ی اوّل با تفصیل و در دو معادله‌ی دیگر به اجمال
 می‌آوریم. **

(I) - « مالی وده جذر آن معادل سی و نه درهم است » . †

« مفتاح آن اینست که جذرها را نصف کنیم و آن در این مسئله پنج است . پس
 آنرا در مثل خودش ضرب می‌کنیم می‌شود بیست و پنج و آنرا برسی و نه می‌افزائیم
 میشود شصت و چهار. پس جذر آنرا میگیریم و آن هشت است . پس نصف جذرها را که
 پنج است از آن می‌کاهیم سه باقی‌مماند و آن جذر مالی است که میخواستیم و آن مال
 نه است » .

(*) سمیت ، تاریخ ، جلد دوم ، ص ۴۴۳ .

(**) با استدلال خیام در اجزای § ۵۰۴ مقایسه کنید .

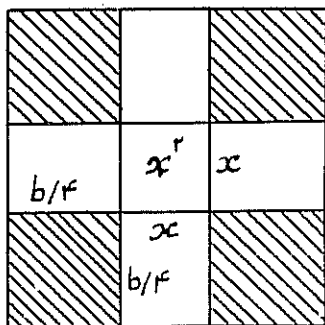
(†) $x^2 + 10x = 39$. صورت کلی : $x^2 + bx = a$.

خلاصه‌ی این بیان طولانی اینست که جواب معادله‌ی (۱) چنین می‌باشد:

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} - (b/2)$$

سپس خوارزمی دو دلیل در اثبات طریقه‌ی مذکور می‌آورد که هر دو بعلمت روش لفظی وی خیلی طولانی است و خلاصه‌ی آنها اینست.

دلیل اول - مال (یعنی x^2) را بوسیله‌ی مربعی به ضلع x نمایش می‌دهد. چون هر ضلع مربع را $b/4$ امتداد داده قسمت خالی از پردازشکل را تمام کنیم، سطح قسمت خالی از پردازش $x^2 + bx$ خواهد بود، که بنا بر معادله مساوی a است. حال قسمت خالی از پردازش را با افزودن چهار مربع، هر یک به مساحت $b^2/16$ ، به صورت مربعی در می‌آوریم. سطح این مربع $(b/2)^2 + a$ است، و لهذا ضلع آن که در شکل $x + b/2$



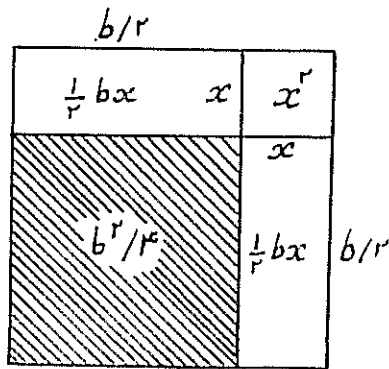
است، برابر $\sqrt{(b/2)^2 + a}$ می‌باشد، و بالنتیجه

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} - (b/2)$$

(البته خوارزمی از ریشه‌ی منفی بی‌خبر است).

دلیل دوم - در دو طرف مربعی که نمایش مال (x^2) است دو مستطیل که ضلع

دیگر هر یک $b/2$ است می‌سازیم.



قسمت خالی از پرداز در شکل $x^2 + bx$ و بموجب معادله مساوی a است، و چون قسمت پرداز دارا که $(b/2)^2$ است بر آن بیفزائیم، مربع بزرگ، بمساحت $(b/2)^2 + a$ حاصل میشود، که بالنتیجه ضلع آن $\sqrt{(b/2)^2 + a}$ است، و چون همین ضلع در شکل $x + b/2$ است، خواهیم داشت:

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} - (b/2)$$

(II) - «مالی ویست و یک درهم معادل ده جذر آنست».

جواب این معادله را خوارزمی چنین میدهد:

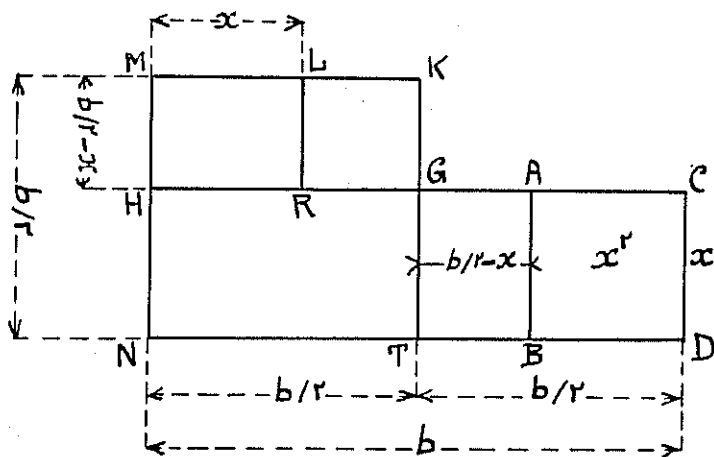
$$x = (b/2) \pm \sqrt{(b/2)^2 - a}$$

و گوید اگر $a < (b/2)^2$ مسئله ممتنع است و اگر $(b/2)^2 = a$ جواب معادله $x = b/2$ میباشد، و نیز گوید که فقط همین صنف از معادلات سه جمله‌ای درج‌دومی است که در آن می‌توان با افزودن a به $\sqrt{(b/2)^2 + a}$ یا کاستنش از آن عمل کرد، یعنی فقط همین صنف است که ممکن است دو جواب (مثبت) داشته باشد.

دلیل (+) - فرض کنیم $AD = x^2$ و $HB = a$. نقطه‌ی G وسط HC است. مربع GL را که ضلعش مساوی AG است ساخته شکل را تمام میکنیم.

$$(\ast) \quad x^2 + 21 = 10x \quad \text{. صورت کلی: } x^2 + a = bx$$

(+) خوارزمی در مورد معادله‌ی $x^2 + 21 = 10x$ استدلال می‌کند.



بموجب شکل $HN \cdot HC = b^2$ ، و لهذا بموجب معادله، $HD = x^2 + a = HN \cdot HC$ ؛
 و چون $HC = b$ ، $NH = x$ اینک میتوان مقادیر طولها را به شرحی که در شکل مندرج
 است تعیین کرد. سپس گوئیم $MR = TA$ ، و لهذا

$$HT + MR = HT + TA = HB = a$$

$$KR = MT - (HT + MR) = (b/2)^2 - a$$

$$x = AC = CG - GA = b/2 - GK = (b/2) - \sqrt{(b/2)^2 - a}$$

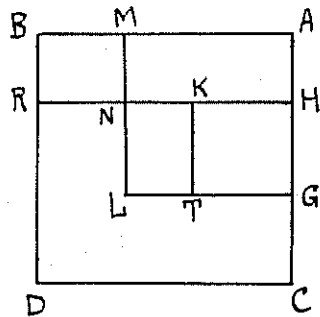
(خوارزمی برای جواب دیگر معادله دلیل نمی آورد).

(III) - «سه جذر و چهار عدد معادل مال است».

$$x = \sqrt{(b/2)^2 + a} + (b/2) \quad \text{جواب:}$$

دلیل - فرض کنیم $AD = x^2$ و $HC = b$. نقطه‌ی G وسط HC است. مربع HT
 را می‌سازیم و LT را مساوی AH جدا کرده شکل را تمام می‌کنیم. بموجب شکل

$$bx + a = x^2 \quad \text{صورت کلی: } 2x + 4 = x^2 \quad (\text{IV})$$



$HD = bx$ و $HB = x^2 - bx$ ، و لهذا بموجب معادله، $HB = a$ ، باسانی معلوم میشود که
و، $BN = TN$

$$a = HB = AN + NB = AN + TN$$

$$GM = HT + (AN + TN) = (b/2)^2 + a$$

$$x = AG + GC = \sqrt{(b/2)^2 + a} + (b/2)$$

فهو المطلوب .

طریق ختیم در حل معادلات درجہی دوّم سه جمله‌ای ساده تر و منقّح تر از طریق

خوارزمی ولی بر همان اساس است (§§ ۵۰۴۰۲-۵۰۴۰۴) .

§ ۳۰۶۰۸ دستگاہهای چند مجهولی - قدما بادستگاہهای چند مجهولی زیاد

سروکار نداشته‌اند . قدیمترین اثر از مسائل چند مجهولی در مصر بدست آمده است ، و

پاپیروسهای برلن (شماره‌ی ۶۶۱۹) و کاهون ، مربوط به دوره‌ی پادشاهی و سبطای مصر

(حدود ۲۱۶۵ - ۱۷۵۰ ق م) ، مشتمل بر مسائلی ازین قبیل میباشد .[☆]

ظاهراً دستگاہهای چند مجهولی در قرن چهارم قبل از میلاد در یونان سابقه داشته

است . در آثار دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) نیز آثاری از اینگونه دستگاہها دیده میشود ،

و وی مجهولات را « عدد اوّل » و « عدد دوّم » و غیره می خوانده است .

هندیان مجهولات را در دستگاہها با اسامی رنگها میخوانده‌اند .

(☆) سیث ، تاریخ ، جلد دوم ، ص ۴۳۱ - ۴۳۲ .

در دوره‌ی اسلامی مسائل چند مجهولی چندان مورد توجه نبوده است. دستگام‌هایی که در کتاب فخری (§ ۳۰۴۰۵۰۷) آمده دستگاه‌های سیال (§ ۳۰۶۰۹) است. در این مقام مقتضی است به نکته‌ی بسیار جالبی در کتاب فخری اشاره کنیم، و آن اینست که کرخی در دو مسئله‌ی دومجهولی، عیناً بطریقی که ما با x و y عمل میکنیم، مجهول دوم را با لفظ خاصی نامیده است، منتهی این لفظ در دو مسئله یکسان نیست^{۵۵} و چنانکه ویکه می‌گوید^{۵۶}، این نمونه‌ای از قدم نهادن در راه کشف بسیار مهمی است، و اینکه ریاضیون «عرب» این راه را به پایان نرسانیده‌اند بعلمت نداشتن اندیشه‌ی نافذ و مخترع نبوده بلکه صرفاً بسبب نداشتن وقت کافی بوده است.

§ ۳۰۶۰۹ معادلات و دستگاه‌های سیال - مسائلی که حل آنها به معادلات سیال⁺ باز میگردد بسیار قدیمی است، و مسئله‌ی تعیین مثلثات قائم‌الزاویه با اضلاع صحیح، یعنی تعیین جوابهای صحیح معادله‌ی $x^2 + y^2 = z^2$ ، مورد توجه دانشمندان یونان از جمله فیثاغورس و افلاطون و اقلیدس و ارشمیدس بوده است. اما اول کسی که جداً به معادلات سیال پرداخته دیوفانتوس (§ ۳۰۲۰۲) است.

اثر عمده‌ی دانشمندان دوره‌ی اسلامی درین باب کتاب فخری از کرخی (§ ۳۰۴۰۵۰۷) است.

§ ۳۰۷ درجه‌ی سوم و درجات بالاتر.

§ ۳۰۷۰۱ چند مسئله‌ی تاریخی - در بحث تاریخی از معادلات درجه‌ی سوم همواره اسم چند مسئله درکار می‌آید، ولهذا بی‌مناسب نیست که مقدمه‌ی این مسائل را بخوانندگان معرفی کنیم تا بهنگام مراجعه سرگردان نشوند. قدیمترین این مسائل یکی مسئله‌ی تضعیف مکعب و دیگری مسئله‌ی تثلیث

(۵) در يك مسئله « قسط » و در دیگری « قسم » .

(۵۵) فخری، ص ۱۱ .

(+) يك معادله با چند مجهول، یا بطور کلی دستگاهی که در آن عده‌ی مجهولات بیش

از عده‌ی معادلات باشد. درین کونه معادلات معمولاً جوابهای صحیح یا منطبق مطلوب است.

زاویه است ، و سه مسئله‌ی معروف به مسائل ثلاثه عبارتست از همین دو مسئله و مسئله‌ی تریب دایره ^۵ ، و این سه مسئله از قدیم‌الایام نزد یونانیان معروف بوده‌است. منظور از تضعیف مکعب تعیین مکعبی است که حجمش دو برابر حجم مکعب مفروض باشد . اگر a ضلع مکعب مفروض و x ضلع مکعب مطلوب باشد ، حل مسئله به حل معادله‌ی $x^3 = 2a^3$ و ، از جنبه‌ی هندسی ، به رسم خطی مانند x که درین معادله صدق کند باز می‌گردد .^۶

مسئله‌ی تثلیث زاویه تقسیم زاویه‌ی مفروض است به سه جزء مساوی ، و اگر a جیب زاویه‌ی مفروض و x جیب ثلث آن باشد ، از نظر جبری حل مسئله به حل معادله‌ی $4x^3 = 3x - a$ باز می‌گردد .

حل مسئله‌ی تضعیف مکعب و بطور کلی معادله‌ی درجه‌ی سوم دو جمله‌ای را میتوان به مسئله‌ی دیگری بازگردانید که آن نیز شهرتی بسزا دارد ، و ما آنرا درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض خوانیم .

(۵) یعنی رسم مربعی همسطح دایره‌ی مفروض .

(۶) در باب مسئله‌ی تضعیف مکعب افسانه‌ای باین مضمون از یونانیان روایت شده که در زمان افلاطون مردم آتن دوچار وبائی سخت شدند که اطباء از علاجش عاجز ماندند . ناچار به عابدی که در معبد دلموس مقام داشت مراجعه کردند ، و وی سرورش داد که راه علاج وبا تضعیف میز آپولون است . اجرای این امر بنظر مردم خیلی آسان آمد . پس میزی ساختند که ابعادش مضاعف ابعاد آن میز بود ، ولی بلا سخت‌تر گردید ، و خداوند مردم را آگاهی داد که منظورش میزی است که حجم آن دو برابر حجم میز آپولون باشد . مردم وقتی خود را عاجز ازین کاردیدند از افلاطون استمداد جستند . . .

چنانکه در متن گفته می‌شود ، حل مسئله‌ی تضعیف مکعب را می‌توان به مسئله‌ی درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط مفروض تحویل کرد ، و شاید صورت افسانه‌ی مذکور در کتب اسلامی (مثلاً رجوع شوبه: مصاحب ، جبر و مقابله‌ی خیام ، ص ۲۷ ؛ یا شیخ بهاء‌الدین عاملی ، کشکول ، چاپ تهران ، ۱۳۱۸ هـ ق ، ص ۱۷۳ - ۱۷۴) - که بموجب آن ، چون مردم از افلاطون استمداد جستند ، وی گفت چون « شما را نفرت از هندسه بوده حق تعالی شما را باین صورت تنبیه فرمود ، و گفت « هرگاه که استخراج خطین بر نسبت واحده توانید کرد مقصود حاصل گردد» - تلفیقی از افسانه‌ی یونانی و تحویل مذکور و اهمیت معروف هندسه در نزد افلاطون باشد .

منظور ازین مسئله اینست که هر گاه دو طول a و b مفروض باشد، دو طول مانند x و y تعیین کنیم که*

$$(۱) \quad a : x = x : y = y : b .$$

ازین معادلات حاصل می شود :

$$(۲) \quad y^2 = bx, \quad (۳) \quad xy = ab,$$

و بالنتیجه ،

$$(۴) \quad x^2 = a^2 b, \quad (۵) \quad y^2 = ab^2 .$$

تعیین هندسی وسایط مطلوب از همین معادلات استنباط می شود : (۱) و (۲) بترتیب معادلات یک سهمی و یک هذلولی متساوی القطرین است ، و بوسیله ی نقاط تقاطع این دو منحنی وسایط مطلوب بدست می آید . در حالت خاصی که $b = 2a$ ، نتیجه می شود $x^2 = 2a^2$ ، که همان معادله ی مسئله ی تضعیف مکعب است .

آخرین مسئله ای که ذکر آن لازم است مسئله ی ارشمیدس است ، که مبنای تحقیقات جالبی در حل معادله ی درجه ی سوم ، خاصه در دوره ی اسلامی ، بوده است . ارشمیدس در شکل چهارم مقاله ی دوم کتاب کره و استوانه باین مسئله می پردازد :

(مسئله ی ارشمیدس) کره ی مفروضی را بوسیله ی صفحه ای چنان قطع کنید که نسبت احجام دو قطعه کره ی حاصل مساوی مقدار مفروضی باشد . دانشمند یونانی این مسئله را به مسئله ی ذیل[†] بر میگردداند :

(*) (بمبارت مصطلح امروز، مقصود مسئله تعیین هندسی دو واسطه ی هندسی است بین a و b .

(†) حل این مسئله در کتاب کره و استوانه نیامده ، ولی بقول ائوتوکیوس (Eutocius)

ارشمیدس آنها بوسیله ی فصل مشترک سهمی $x^2 = \frac{b^2}{c}y$ و هذلولی $(c-x)y = ac$ حل کرده است . برای اطلاع بیشتر رجوع شود به چاپ جدید کتاب آثار ارشمیدس (از ت. ل. هیت ، نیویورک) ، فصل ششم مقدمه (صد cxxiii-cxli و صفحات ۶۲ - ۷۹ از مقاله ی دوم رساله ی کره و استوانه در همان کتاب .

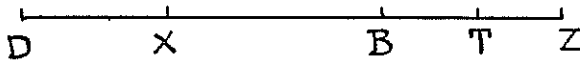
ائوتوکیوس سابق الذکر ، که در مآخذ اسلامی اوطوقیوس و اطوقیس (عسقلانی) خوانده

شد ، از شارحین بعضی آثار ارشمیدس و آپولونیوس است ، و در حدود ۴۸۵ میلادی در عسقلان (بر سواحل فلسطین) متولد شده است .

قطعه خط DZ و نقاط B و T برین خط مفروض است ، و B بین D و T جا دارد .
نقطه‌ای مانند X بر DZ چنان تعیین کنید که

$$XZ : ZT = \overline{BD}^2 : \overline{DX}^2 .$$

فرض کنیم $BD = a$, $ZT = b$, $ZD = c$, $DX = x$. حل مسئله بحل معادله‌ی



$$x^2 + a^2 b = cx^2 \text{ یا } (c-x) : b = a^2 : x^2$$

مسئله‌ی ارشمیدس مورد توجه خاص دانشمندان دوره‌ی اسلامی واقع شده ، و ظاهراً اول بار ماهانی (§ ۳۰۴۰۰۱) آنرا به معادله‌ی درجه‌ی سوم سابق الذکر (معادله‌ی ماهانی) باز گردانید ، و ابو جعفر خازن این معادله را بکومک قطوع مخروطی حل کرده است (§ ۶۰۴۰۴) .

§ ۳۰۷۰۲ تاریخچه‌ی معادلات درجه‌ی سوم - مسائلی که حل آنها به

معادلات درجه‌ی سوم باز میگردد اول بار در آثار یونانیان دیده می‌شود .

گویند بقراط خیوسی (§ ۳۰۲۰۱) مسئله‌ی تضعیف مکعب را به درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط باز گردانید ، و احتمالاً منایخموس (§ ۳۰۲۰۱) مسئله‌ی اخیر را بوسیله‌ی فصل مشترك قطوع (۲) و (۳) (§ ۳۰۷۰۱) حل کرد . بعضی دیگر از ریاضیون یونانی نیز بوسایل مختلف به حل مسائل تضعیف مکعب و تثلیث زاویه پیرداخته بودند .^۵ نظر باین مسائل متفرق که در آثار یونانی آمده ، بعضی چنین پنداشته اند که یونانیان معادلات درجه‌ی سوم را حل کرده‌اند . درین باب ویکه سخنی مختصر و مفید دارد که نقش دانشمندان دوره‌ی اسلامی را در بسط جبر و نیز تا حدی ماهیت جبر هندسی یونانیان (§ ۳۰۲۰۱) را روشن می‌سازد .

(۵) مصاحب ، جبر خیام ، صص ۱۸۵-۱۹۰ ، که مطالب آن عمده‌آ از تاریخ ریاضیات

سمیت (جلد ۲ ، صص ۲۹۷-۳۱۵) گرفته شده است . نیز رجوع شود به : هیث ، تاریخ ،

جلد اول ، صص ۲۱۸-۲۷۰ .

خلاصه‌ی بیان ویکه اینست که † اگرچه یونانیان بعضی مسائل هندسی حل کرده‌اند که اگر آنها را بصورت جبری درآوریم به معادلات درجه‌ی سوم می‌رسیم، ولی قول و گمان کسانی که می‌پندارند یونانیان معادلاتی از درجه‌ی سوم حل کرده‌اند دور از صواب است، چه حل هندسی مسئله‌ای ازین قبیل با تشخیص اینکه حل آن به معادله‌ی درجه‌ی سوم باز می‌گردد تفاوت بسیار دارد؛ و برشمردن منظم جملگی معادلات درجه‌ی سوم و ساختن جواب يك يك آنها و بحث در حالات خاص هر يك، که در آثار دانشمندان اسلامی و خاصه در جبرخیام آمده است، در آثار یونانیان بی‌سابقه می‌باشد. و سپس می‌گوید که چون در آثار یونانیان هیچ اثری از جبر نیست، نمیتوان گفت که آنان معادلات درجه‌ی سوم حل کرده‌اند، و نتیجه می‌گیرد که دانشمندان اسلامی اول دفعه علم جبر را در هندسه بکار برده‌اند و بالعکس، و بدین ترتیب، بنیان رابطه‌ی جبر و هندسه را نهاده‌اند که بعدها از منابع مهم بسط ریاضیات بوده است. در دوره‌ی اسلامی مسائلی که به معادله‌ی درجه‌ی سوم باز میگردد - از جمله مسئله‌ی درج دو واسطه بین دو خط، مسئله‌ی ارشمیدس، مسئله‌ی تثلیث زاویه (§ ۳۰۷۰۱)، و مسئله‌ی تقسیم دایره به اجزای متساوی - و تحقیق در حل و بحث آنها بوسیله‌ی قطوع مخروطی مورد توجه ریاضیون بوده است، و این تحقیقات در رساله‌ی جبرخیام به کمال می‌رسد، و چون درین باب بعداً با تفصیل کافی سخن خواهیم گفت، درین مقام به همین اندازه اکتفا میکنیم.

تبصره - ریاضیون دوره‌ی اسلامی به حل عددی معادلات درجه‌ی سوم موفق نشدند، ولی در مواردی مقدار تقریبی ریشه‌ی مورد نظر را می‌توانستند حساب کنند (مثلاً رجوع کنید به § ۶۰۷). حل معادلات عددی درجه‌ی سوم در قرن شانزدهم بوسیله‌ی ریاضیون ایتالیائی انجام گرفت. †

(†) ویکه، جبر عمر خیام، ص xiz. ویکه همجا - حتی وقتی از خیام سخن می‌گویند -

از «ریاضیون عرب» صحبت می‌کند، و البته مقصود وی از «عرب» «عربی‌نویس» است.

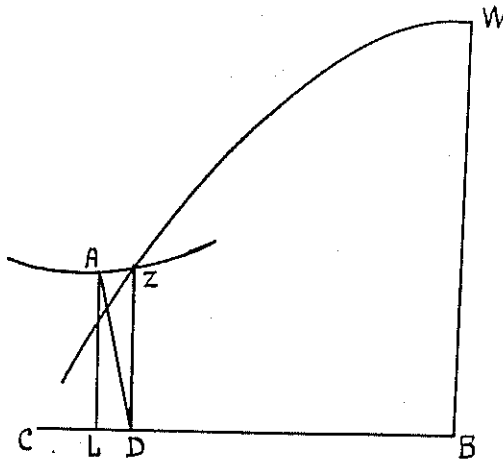
(‡) برای نمونه‌ای از تحقیقات ملا علی محمد اصفهانی، ریاضیدان ایرانی قرن سیزدهم

ق، در این باب رجوع شود به: مصاحب، جبر و مقابله‌ی خیام، ص ۱۶۲ - ۱۶۳.

§ ۳۰۷۰۴ معادلات درجات بالاتر - بعضی از ریاضیون دوره‌ی اسلامی به برخی صور معادلات درجه‌ی چهارم برخورد کرده و آنها را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرده‌اند. متأسفانه از کارهای منسوب به ابوالوفای بوزجانی (۳۰۴۰۵۰۳ §) در این باب اطلاعی نداریم. اما دو نمونه از کارهای ریاضیون مذکور را ویکه درضمیمه‌ی چهارم کتاب جبر عمر خیّام خود آورده است. یکی از آنها رساله‌ی است ^۵ که ابوالجود (۳۰۴۰۵۰۸ §) در جواب سؤال ابوریحان پرداخته، و موضوع آن حل این مسئله است: خط BC و نقطه‌ی A در دست است. از این نقطه خطی چنان مرور دهید، که اگر D محل تلاقی آن با BC باشد، رابطه‌ی $AD \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$ برقرار شود. اگر فرض کنیم L تصویر A بر BC باشد، و $AL = a$ و $CB = b$ و $CL = c$ و $CD = x$ ، معادله‌ی مسئله چنین خواهد بود:

$$x^2 - 2cx + 3c^2 + 2c^2bx - c^2(b+c) = 0$$

ابوالجود، پس از تشکیل دادن معادله، آنرا بدین طریق حل میکند: BW را مساوی BC بر عمود کرده سهمی به رأس W و محور WB و ضلع قائم BC و هندلولی متساوی



(۵) عنوان نسخه‌ای که ویکه در اختیار داشته چنین بوده: «جواب‌الشیخ الفاضل ابی‌الجود محمدبن اللیث ایدةالله تعالی عما ساله عنه الاخ الفاضل ابوالریحان محمد ابن احمد البیرونی». ویکه فقط ترجمه‌ی فرانسوی صورت مسئله و حل و بحث آنرا در کتاب خود آورده است.

القطرینی به رأس A وضلع قائم AL ومحور AL رسم میکند. اگر Z محل تلاقی دو منحنی و D تصویر Z بر BC باشد، جواب معادله است. و سپس ابوالجود در شرایط امکان مسئله بحث میکند.

در دنبال رساله‌ی ابن لیث مسئله‌ی ذیل حل شده ولی مصنف آن معلوم نیست:
ذونقده‌ای مانند ABCD چنان رسم کنید که سطحش ۹۰ باشد و

$$AD = AB = BC = 10.$$

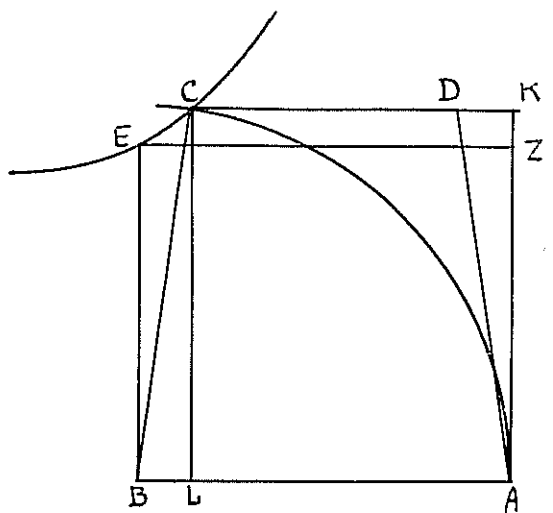
بطور کلی اگر $AD = AB = BC = a$ و سطح شکل b^2 فرض شود معادله‌ی مسئله چنین خواهد بود:

$$x^4 - 2ax^2 + 2a^2x - a^4 + b^4 = 0$$

حل کننده‌ی مسئله AB را قاعده‌ی اطول و AD و BC را دوساق ذونقده و فاصله‌ی D را از تصویر A بر قاعده‌ی اقصر (مثلاً نقطه‌ی K) مجهول مسئله میگیرد. اگر این فاصله مساوی x فرض شود معادله‌ی مسئله چنین میشود:

$$x^4 + 200x = 20x^2 + 1900$$

سپس مسئله را به این طریق حل میکند: طول AB را مساوی ۱۰ اختیار



کرده عمود EB را مساوی AB بر $\frac{1}{10}$ اخراج کرده مستطیل ABEZ را میسازد، و بر E هذلولی با میجانبهای BA و AZ مرور می‌دهد، و بمرکز B و شعاع BA دایره‌ای رسم میکند، و میگوید، چون $AB > BE$ ، دایره هذلولی را قطع میکند. سپس BC را وصل کرده زاویه BAD را برابر زاویه ABC میسازد، و AD را مساوی AB جدا کرده CD را وصل میکند. شکل ABCD ذوزنقه‌ی مطلوب است، زیرا اگر L تصویر C بر AB باشد، ذوزنقه‌ی مذکور معادل مستطیل ALCK است، و چون C بر هذلولی قرار دارد، سطح مستطیل مساوی سطح ABEZ است که مساوی ۹۰ میباشد.

بالاخره، ظاهراً ابن هیثم (§ ۳۰۴۰۵۰۶) معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$ را بوسیله‌ی تحویل آن به دستگاه

$$1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a$$

حل کرده است (رجوع شود به § ۵۰۱۰۶۰۱ ، مثال چهارم) .

قسمت چهارم

ملاحظات کلی در باب

کارهای جبری خیام

قسمت چهارم

ملاحظات کلی درباره کارهای جبری خیام

۴۰۱ § خیام و آثار ریاضی او

۴۰۱۰۱ § خیام یا عمر خیام [غیاث‌الدین ابوالفتح (با ابو حفص) عمر ابن ابراهیم خیام (یا خیامی)]^۵ - خیام از بزرگترین ریاضیون قرون وسطی و از شعراء و حکماء و منجمین معروف ایران در نیمه‌ی دوم قرن پنجم و اوایل قرن ششم ه ق است. وی در نیشابور متولد شد، و هم در آنجا وفات یافت. تاریخ ولادت او معلوم نیست⁺، و وفاتش را به احتمال در ۵۱۷ یا ۵۲۶ ه ق شمرده‌اند. روایت ملاقات او با ابوعلی سینا (متوفی در ۴۲۸ ه ق) و یا درس خواندن او در نزد وی بسیار مستبعد است.

گفته‌اند به سمرقند و بلخ و هرات و ری و اصفهان و حجاز سفر کرد، و نام وی جزء منجمینی ذکر شده است که به امر سلطان ملک‌شاه سلجوقی، برای اصلاح سال و ماه ایرانی، در ۴۶۷ ه ق در ری یا اصفهان یا نیشابور گرد آمدند.

(۵) مقصود ما ازین مقدمه معرفی خیام است بعنوان عالم جبر، و ترجمه‌ی احوال او و گفتگو از وی بعنوان شاعر و حکیم یا منجم و عالم فیزیک و شریک در اصلاح سال شمسی ایرانی از موضوع بحث ما خارج است. برای این مطالب می‌توان به کتب و مقالات ذیل رجوع کرد:

چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، بکوشش دکتر محمد معین، تهران ۱۳۳۳ - ۳۵، ص ۲۹۲ - ۳۶۴ و ۶۱۸ - ۶۲۴؛

مقاله‌ی مینورسکی در جلد سوم دایرة‌المعارف اسلام؛
مقاله‌ی عباس اقبال آشتیانی، بعنوان راجع باحوال حکیم عمر خیام نیشابوری، مجله‌ی شرق، دوره‌ی اول، شماره‌ی ۸، مرداد ۱۳۱۵ ه ش، ص ۴۶۶ - ۴۸۵.
تقی زاده، دروس، ص ۸۵-۹۲ (مخصوصاً در موضوع اصلاح سال و ماه منسوب به خیام).

(+) سوامی گوریندا تیرتهه، از روی اوضاع کواکب بهنگام ولادت خیام و با استفاده از بعضی اطلاعات تاریخی و تواریخ احتمالی، ولادت او را بهنگام طلوع آفتاب روز ۱۸ ماه مدسال ۱۵۴۸ (دوشنبه‌ی ۱۸ ذیقعدی ۴۳۹ ه ق) یافته است. رجوع شود بکتاب او بنام The Nectar of Grace در شرح حال و آثار خیام، چاپ الله آباد ۱۹۴۱، ص XXXII - XXXIV.

قبل از کشف رسالدهی او در جبر (۴۰۳۰۱ §) ، و پیش از اینکه تحقیقات جبری او چنانکه شاید مورد توجه قرار گیرد ، در مشرق زمین بواسطه‌ی سهم عمده‌ای که در اصلاح سال و ماه برای او قائل بودند[❖] و در اروپا بسبب ترجمه‌ی انگلیسی رباعیات وی بتوسط فیتزجرالد^{❖❖} شهرت یافته بود ، و متأسفانه دانشمندان و مورخین دانشمند اسلامی از تحقیقات جبری او بکلی بی‌خبر بودند (۴۰۲ §) ، و از اواخر قرن نوزدهم میلادی ببعد است که وی جای خود را در تاریخ ریاضیات باز میکند ، تا آنجا که رسالدهی او در جبر یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطائی درین علم شناخته میشود (۴۰۲ §) .

آثار ختّام[†] ، علاوه بر تألیفات ریاضی (۴۰۱۰۲ §) و رباعیات معرف او ، مشتمل است بر چند رسالدهی فلسفی و رسالدهای بنام رساله فی الاحتمال لمعرفة مقداری الذهب والفضة فی جسم مرکب منهما در وزن مخصوص ، و غیره .

۴۰۱۰۴ § آثار ریاضی ختّام . (الف) رساله‌ی جبر ختّام . عمده‌ترین اثر ریاضی ختّام رسالدهی اوست در علم جبر که متن آن در قسمت اول و ترجمه‌ی فارسی آن در قسمت پنجم کتاب حاضر چاپ شده است ، و بعداً به تفصیل از آن سخن خواهد رفت . این رساله را ختّام بنام «قاضی القضاة ابوطاهر» تدوین کرده است ، و این ابوطاهر را همان ابوطاهر عبدالرحمان ابن علی (۴۳۵ - ۴۸۴ هـ) ، فقیه شافعی توانگر و متنفذ سمرقند شمرده‌اند^{††} که شرح شکایت بردن او به سلطان ملک‌شاه سلجوقی در ضمن وقایع سنه‌ی

(❖) مورد تأمل است . رجوع شود به : تقی زاده ، دروس ، صفحه‌ی ۸۵ ب بعد .

(❖❖) Edward Fitzgerald (۱۸۵۹ - ۱۸۸۳) . اولین ترجمه‌ی فیتزجرالد در

۱۸۵۹ بعمل آمد .

(†) در جبر و مقابله‌ی ختّام (مصاحب ، تهران ، ۱۳۱۷) اسامی ۲۱ کتاب منسوب باو

جمع آوری شده ، ولی صحت اسناد بعضی خالی از شبهه نیست ، (تقی زاده ، دروس ، ص ۸۵) .

و نیز رجوع شود به چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی ، باهتمام دکتر محمد معین ، ص ۳۲۶-۳۳۱ .

(††) رجوع شود به صفحات XLIV - XLV کتاب سوامی گوویندا تیرتهه مذکور در ذیل

صفحه‌ی ۱۳۵ کتاب حاضر .

۴۸۲ هـ ق درکامل ابن اثیرمذکور است. *

(ب) رساله در تحلیل يك مسئله. این نامی است که ما، برای تسهیل اشاره، به رساله‌ای از خیام داده‌ایم که متن آن در قسمت دوم و ترجمه‌ی فارسی آن در قسمت ششم کتاب حاضر بطبع رسیده، و پیش از رساله‌ی جبر تألیف شده (§ ۴۰۴.۱)، و موضوع آن تحلیل يك مسأله‌ی هندسی به معادله‌ی درجده‌ی سوم و حل آن بوسیله‌ی قطوع مخروطی است.

ظاهراً اول بار است که این رساله (در جزء کتاب حاضر) بطبع میرسد، و در باب آن بعداً با تفصیل بیشتر بحث خواهیم کرد (§ ۴۰۴).

(ج) رساله فی شرح ما اشکل من مصادرات کتاب اقلیدس. این رساله در باب اصل موضوع معروف اقلیدس و مباحث مربوط به نسبت و تناسب در کتاب اوست، و ظاهراً تنها نسخه‌ی کامل موجود آن همان نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن از بلاد هلنداست، و این نسخه، ظاهراً بر طبق عبارتی که در پایان آن آمده، در ۶۱۵ هـ ق از روی نسخه‌ای که خیام خود در سنه‌ی ۴۷۰ نوشته استنساخ شده است.

این کتاب در اسفند ۱۳۱۴ هـ ش به اهتمام دکتر تقی‌ارانی در تهران چاپ شده است.

(د) مشکلات الحساب. نسخه‌ای از این رساله در مونیخ موجود است. **

علاوه بر اینها، رساله‌ای در صحّت طرق هندی برای استخراج جذر و کعب در فهرست نسخ فارسی و عربی کتابخانه‌ی ملی شرقی بنکپور (کلکته ۱۹۰۸) بنام خیام مذکور است † که تا کنون نسخه‌ای از آن بدست نیامده، و ممکن است همان رساله‌ای باشد که خیام در کتاب جبر خود بآن اشاره کرده است (§ ۵۰۳.۲). ††

(*) الکامل فی التاریخ (قاهره)، جلد ۸، ص ۱۴۸-۱۴۹ و ۱۵۹.

(**) مقاله‌ی مینورسکی در دائرة المعارف اسلام، جلد ۳.

(†) ترجمه‌ی انگلیسی جبر خیام، ص ۵.

(††) در باب اطلاعات و تحقیقات ریاضیون اسلامی در استخراج ریشه و دو جمله‌ای نیوتن،

می‌توان به مقاله‌ی پاول لوکی (Paul Luckey) در مجله‌ی Mathematische Annalen

(برلن، کوئینکن، هایدلبرگ، ۱۹۴۸)، جلد ۱۲۵، جزوه‌ی دوم، ص ۲۱۷-۲۷۴،

رجوع کرد.

§ ۴۰۲ خیام بعنوان عالم جبر - مآخذی که ما برای بررسی کارهای

خیام در علم جبر در دست داریم عبارتست از :

- (۱) رساله‌ی او در جبر ،
 - (۲) رساله‌ی وی در حلّ يك مسئله‌ی هندسی بوسیله‌ی قطوع مخروطی که ظاهراً آنرا پیش از رساله‌ی اوّل نوشته است (§ ۴۰۴۰۱) ،
 - (۳) نتایج بررسیهای محققین غربی، چون وپکه و سو تر و سارتن و دیگران ، که ، با استفاده از وسایل فراوان، مطالعات کمابیش جامع در تاریخ علوم - یا بالاخص تاریخ ریاضیات - کرده و پیشرفتهایی را که در ادوار مختلف در علوم حاصل شده باهم مقایسه نموده و به نتایجی رسیده‌اند ، و ما باید با کمال فروتنی از آنان سپاسگزار باشیم که با کوششهای خالصانه‌ی خود نام دانشمندان ما و آثار ایشانرا زنده گردانیده‌اند. (۵)
- اینک وارد اصل مطلب می‌شویم .

ظاهراً کارهای خیام در علم جبر در بسط این علم تأثیری نداشته است ؛ زیرا در اروپا در اواسط قرن هیجدهم و بلکه در نیمه‌ی دوّم قرن نوزدهم از آن با خبر می‌شوند و در آن زمان علوم ریاضی در اروپا به چنان مرحله‌ای رسیده بود که جبر خیام و امثال آن جز از جنبه‌ی تاریخی اهمیتی نمی‌توانست داشت . اما در نزد خودمان ، نه فقط دلیلی نداریم که کسی تحقیقات خیام را ادامه داده یا از آنها در بسط علم جبر استفاده‌ای برده باشد ، بلکه - برخلاف - شواهدی هست حاکی از اینکه بعضی ریاضیون

(۵) این مطلب مخصوصاً در مورد خیام صدق می‌کند . چنانکه در متن آمده است ، در مشرق زمین ، کسانی‌هم که اسمی از تحقیقات متقدمین در حل معادلات درجه‌ی سوم شنیده بودند از کارهای اساسی خیام درین موضوع و بلکه اصلاً از اینکه وی تحقیقاتی درین مبحث کرده است بی‌خبر بودند . با این وصف ، گمانی خیام ازین جهت ، در دنیای اسلامی مغرب ، شکفت آور نخواهد بود ، و نمی‌توان بر مورخ دانشمند معروف عرب ، ابن خلدون (۷۳۲ - ۸۰۸ هـ) ، خرده گرفت که سخن خود را در « جبر و مقابله » با این عبارات ختم می‌کند : « و قد بلغنا ان بعض ائمة العالم من اهل المشرق انہی المعادلات الی اکثر من هذه السنة اجناس و بلغنا الی فوق المشرقین و استخراج لها کلاً اعمالاً وثیقة ببراہین هندسیة واللہ . . . » (مقدمه‌ی ابن خلدون ، طبع م . کاترمر ، پاریس ۱۸۵۸ ، جلد اول ، قسمت سوم ، ص ۹۹) .

عالی مقام هم که گاه گاه در ممالک اسلامی پیدا می‌شدند حتی اسمی از کارهای جبری خیام بنام وی نشنیده بودند، و اگر هم شنیده بودند از اصل موضوع بی‌خبر بودند. نمونه‌ی آن اینکه غیاث‌الدین جمشید کاشانی^{۵۱}، ریاضیدان و منجم و محاسب عالی مقام، در فصل هفتم از باب اول از مقاله‌ی پنجم کتاب معروف خود، مفتاح الحساب، پس از بیان شش صنف «مشهور» معادلات (معادلات درجات اول و دوم و یا قابل تحویل بآنها)، گوید^{۵۲}: «اما اگر تعادل بین چهار جنس متوالی، مانند عدد و شیء و مال و کعب، باشد - یعنی بعضی ازین چهار معادل بعضی دیگر از آنها باشد - ... اقسام آن منحصر در بیست و پنج مسئله است⁺، و شش از آنها همانست که گذشت، و نوزده مسئله می‌ماند». سپس از قول شارح بهائیه⁺⁺ آورده است که

(۵) متوفی در صبح چهارشنبه‌ی ۱۹ رمضان ۸۳۵ هـ (محمد تقی دانش پژوه، فهرست کتابخانه‌ی اهدایی سید محمد مشکوة به کتابخانه‌ی دانشگاه تهران، جلد سوم، بخش دوم، تهران ۱۳۳۲، ص ۸۶۶).

(۵۵) مفتاح الحساب، تهران، ۱۳۵۶ هـ ق، ص ۱۶۷؛ مفتاح الحساب و رساله‌ی محیطیه، مسکو، ۱۹۵۶، متن و ترجمه و حواشی بزبان روسی از ب. آ. روزنفلد و آ. پ. یوشکویچ، ص ۱۹۲ و ۳۵۶ - ۳۵۷ و ۴۷۶.

(+) برای صورت این بیست و پنج مسئله (یعنی معادله) رجوع کنید به ۴.۳.۴.۲ §. ++ (ظاهرأ مقصود کتاب الفوائد البهائیه فی القواعد الحسابیه است در علم حساب از عمادالدین عبدالله ابن محمد الخدام العراقی البغدادی (سارتن، مدخل، جلد ۳، قسمت اول، ص ۷۵۷. نیز رجوع شود به کشف الظنون، چاپ اسلامبول، ۱۹۴۳، جلد ۲، ستون ۱۲۹۶؛ و ص ۴۷۶ از کتاب سابق‌الذکر روزنفلد و یوشکویچ)، که از شاگردان خواجه نصیرالدین طوسی بوده. این کتاب را کمال‌الدین فارسی (۶۶۵ - ۷۱۸ هـ ق) از اجله‌ی ریاضیون و فیزیکدانان ایرانی، بنام اساس القواعد فی اصول القواعد شرح کرده و ظاهرأ مقصود از «شارح بهائیه» که در مفتاح الحساب مذکور است همین کمال‌الدین فارسی است.

امام شرف‌الدین مسعودی مذکور در مفتاح‌الحساب، بنا بر تصریح قاضی زاده‌ی رومی در رساله فی استخراج جیب‌الدرجة الواحده (چاپ تهران، ۱۲۹۹ هـ ق، ص ۴۲. ضمیمه‌ی مفتاح - الحساب)، همان شرف‌الدین محمد ابن مسعود [ابن محمد] مسعودی است. گویند وی شاگرد خیام بوده (دو رساله دربارمی آثار علوی، بکوشش محمد تقی دانش پژوه، پنجمین نشریه‌ی فرهنگ ایران زمین، تهران، تابستان ۱۳۳۷)، و درین صورت بسیار محتمل است که تحقیقات خیام به مسعودی نسبت داده شده باشد.

« امام شرف‌الدین مسعودی نوزده مسئله غیر از شش مسئله‌ی مشهور حل کرده و طریق استخراج مجهول را در آنها آشکار ساخته ، و ممکن است این نوزده مسئله همان نوزده مسئله باشد . » با احتمال قوی ، این نوزده مسئله همانهاست که خیّام آنها را حل کرده و در هر حال ، هر کس آنها را حل کرده ، شخصی چون غیاث‌الدین جمشید از راه حل آنها بی‌خبر بوده است .^{۵۴}

خلاصه آنکه کارهای خیّام در علم جبر در نزد ما گمنام بوده ، و در اروپا هم وقتی جلب توجه کرده که از لحاظ بسط علوم ریاضی فاقد هر گونه ارزشی بوده است .

بعلاوه ، چنانکه در § ۳۰۷۰۲ دیدیم ، حل معادلات درجه‌ی سوّم و بلکه درجات بالاتر (§ ۳۰۷۰۳) بوسیله‌ی قطوع مخروطی بی‌سابقه نبوده است .
معدّلك ، بر طبق تحقیقات و نظر محققین غربی ، خیّام - خاصه در علم جبر - یکی از بزرگترین ریاضیون قرون وسطی است .^{۵۵}

این رأی ناشی از اینست که در تاریخ ریاضیات خیّام اول کسی است که به تحقیق منظم علمی در معادلات درجات اول و دوّم و سوّم پرداخته ، و طبقه‌بندی تحسین - آوری ازین معادلات آورده است ،⁺ و در حل تمام صور معادلات درجه‌ی سوّم منظمآ تحقیق کرده ، و بحل (در اغلب موارد ناقص) هندسی آنها توفیق یافته ، و رساله‌ی وی در علم جبر ، که مشتمل بر این تحقیقات است ، معرف یک فکر منظم علمی است ؛ و این رساله یکی از برجسته‌ترین آثار قرون وسطائی و احتمالاً برجسته‌ترین آنها درین علم است .⁺⁺

در رسائل جبری خیّام دو نکته‌ی اساسی جلب توجه میکند . اول اینکه وی

(۵) ملا محمد باقر ابن زین‌العابدین یزدی ، ریاضیدان قرن یازدهم هجری ، در کتاب عیون الحساب خود (تا کنون چاپ نشده) در پایان « مطلب چهارم » از قسمت جبر آن کتاب همین گفته‌ی غیاث‌الدین جمشید را نقل می‌کند .

(۵۵) سارتن ، مدخل ، جلد ۱ ، ص ۷۵۹ - ۶۵ .

(+) در این باب مخصوصاً به طبقه‌بندی بر حسب درجه ، که در § ۳۰۶۰۶ ذکر شد ، رجوع کنید .

(++) سارتن ، مدخل ، جلد ۲ ، قسمت اول ، ص ۸ .

مشعربه اهمیت تعمیم و احتیاج ریاضیات بآن میباشد. در آثار خود مکرر، تصریحاً یا تلویحاً، مسائل جزئی را بانظر تحقیر مینگرد، و احکام کلی میجوید. درعین حال، از آنچه در ریاضیات «بحث درمسئله» (یا درمعادله) خواننده میشود غافل نیست.

دوم مواردی است که خیام را درتردید و تزلزلی که همراه سیراز مرحله‌ای از علم بمرحله‌ای بالاتر است می‌بینیم. اندیشه‌ای درشرف تکوین است؛ گاهی پیش‌میرود؛ گاهی به عقب باز میگردد؛ ولی سیرعمومی تکاملی است.

مثلاً، برخلاف آنچه درجبرخیام - که بعداز رساله‌ی تحلیل يك مسئله (قسمت ششم) تصنیف شده (§ ۴۰۴۰۱) - می‌بینیم، در رساله‌ی تحلیل اساس طبقه‌بندی معادلات بر حسب درجه دیده میشود: معادلات اولاً به مفردات و مقترنات تقسیم نمیشوند؛ بلکه ابتداء از معادله‌ی «بین کعب و سایر مراتب»، یعنی معادله‌ی درجه‌ی سوم، سخن میرود (§ ۶۰۴۰۳)، و سپس این معادلات را به مفردات و مقترنات تقسیم میکند. آیا نمی‌توان این سیر فقیرانه‌ی را نمونه‌ای از تزلزل در انتخاب دوطریق طبقه‌بندی شمرد؟ از طرف دیگر، در رساله‌ی تحلیل يك مسئله، علم جبر «اموری هندسی که بوسیله‌ی اشکال پنجم و ششم مقاله‌ی دوم اصول مبین میشود» شمرده شده (§ ۶۰۴۰۲)، ولی در رساله‌ی جبر این علم را حتی با آنچه از الفاظ «جبر» و «مقابله» (§ ۳۰۴۰۴) استنباط می‌شود محدود نمی‌کند، بلکه آنرا فن استخراج مجهولات عددی و هندسی می‌شمارد (§ ۵۰۱۰۱).

نمونه‌ی دیگر این است که خیام، در رساله‌ی تحلیل، حل عددی معادلات درجه‌ی سوم غیرقابل تحویل به درجات پایین‌تر را غیرممکن می‌شمارد (§ ۶۰۷)، و حال آنکه در رساله‌ی جبر در این باب گوید: «اما اثبات [حل] این اصناف وقتی موضوع مسئله عدد مطلق باشد بر ما و بر دیگر علمای جبر ممکن نشده است، و شاید دیگران که بعد از ما آیند بر آن وقوف یابند» (§ ۵۰۱۰۶).

بالاخره این مطلب نیز باید گفته شود که خیام متوجه تسهیلات ناشی از استعمال

« الفاظ اهل جبر » (§ ۲۰۳۰۴) یا اصطلاحات آنان (§ ۶۰۳۰۴) بوده است، ولی متأسفانه شخصاً قدمی در راه بسط این اصطلاحات و دامندی استعمال آنها برنداشته است. § ۴۰۲۰۱ - اما نباید از نظر دور داشت که خیام يك ریاضیدان قرون وسطائی است، و سخت تحت تأثیر افکار یونانیان بوده است، و محدودیتهای ناشی از بندهائی که این افکار بردست ویای او بسته بخوبی از آثارش هورید است. در این باب، آنچه مربوط به مسائل و موارد خاص مندرج در آثار اوست در ضمن تحلیل این آثار گفته خواهد شد. در این مقام، بعنوان نمونه، فقط به بعضی مطالب کلی اشاره میکنیم.

کارهای جبری خیام، چنانکه خود میگوید (§ ۵۰۱۰۴)، مبتنی بر کتابهای اصول و معطیات اقلیدس و (دومقالدی اول) مخروطات آپولونیوس است، ولی تبعیت او از این آثار محدود به آنچه از دانشمند نکته سنجی چون خیام انتظار میرود نیست، و مثلاً وقتی حکم میکند که «براهین عددی جای براهین هندسی را نتوانند گرفت»، در تأیید این نظر، میگوید مگر نمی بینی که اقلیدس هم همین راه رفته است (§ ۵۰۱۰۵)، و حال اینکه مکرر کردن اقلیدس احکام عمومی مقالهی پنجم اصول را در مقالهی هفتم در مورد اعداد طبیعی عمل لغوی بوده است، و توجیه معقولی برای آن بنظر نمیرسد. خداوند همه را از گزند تعصب و بت پرستی محفوظ بدارد.

خیام، به پیروی از فلاسفهی یونان، تفاوت فاحشی بین «عدد» یا «عدد مطلق» و «مقدار» یا «کم متصل» (خط، سطح، جسم، زمان) قائل است، و کارهای جبری او - و عبارات اصح، روش او در جبر - سخت تحت تأثیر و نفوذ این اندیشه است. متأسفانه در هیچیک از دو رسالهی خیام تعریفی از جواب یا ریشدی معادله و از حل معادله دیده نمیشود. آنچه مسلم است اینست که وی نه فقط از جوابهای منفی (و بالتیجه از جوابهای موهومی) بی خبر بوده، بلکه جواب صفر را هم ملحوظ نمی داشته. اما مطلب به همین جا ختم نمیشود. وی، در تحت تأثیر فکر مذکور، معادلات را بر حسب اینکه موضوع (= مجهول) آنها «عدد مطلق» یا «مقدار» باشد با دو نظر بسیار متفاوت مینگرد، و برای

هر معادله از دو جهت برهان حلّ لازم می‌شمارد، یکی وقتی مجهول عدد باشد، و دیگری در صورتی که مجهول مقدار باشد. در معادلات دسته‌ی دوّم، وقتی باصطلاح ما معادله جواب مثبت دارد آنرا ممکن و الا ممتنع می‌شمارد^{۴۵}. اما در معادلات عددی درجه‌ی دوّم، بدون اینکه شرایطی برای ضرایب معادله قائل شود، صحیح بودن جوابها را جزء شرایط امکان معادله می‌شمارد، و این امر، چنانکه در § ۳۰۵ نیز اشاره کردیم، تقلیدی بی‌مورد از مسائل دیوفانتوسی بیش نیست، زیرا در مسائل مورد بحث دیوفانتوس، نوع مسائل این قید را ایجاب میکند، و حال آنکه در مسائل مورد بحث خیّام چنین قیدی خالی از وجه است.

خیّام، چنانکه در قدیم معمول بوده، x^2 و x^3 را در «مقادیر» بمعنی مربع و مکعبی با ضلع x می‌شمارد، و بنابراین، در نظر او، مال (x^4) در مقادیر امری موهوم است و وجود خارجی ندارد (§ ۶۰۴۰۲)، و استعمالش در جبر برسبیل مجاز است (§ ۵۰۱۰۵)^{۴۶}. این طرز فکر نه فقط نظر خیّام را در معادلات محدود میکند، بلکه منجر به احتجاجات بی‌بنیادی می‌شود که نمونه‌ی آن در § ۶۰۴۰۲ آمده است.

§ ۴۰۳ جبر خیّام

§ ۴۰۳۰۱ کشف جبر خیّام - رساله‌ی خیّام در علم جبر، مانند بسیاری از دیگر آثار دانشمندان دوره‌ی اسلامی، بتوسط اروپائیان کشف شد، و^{۴۷} این امر در سال ۱۷۴۲ در شهر لیدن از بلاد هلند پیش آمد، و بر حسب عنوان رساله، آنرا مشتمل بر حلّ معادلات درجه‌ی سوّم پنداشتند.

بعدها ژان ایتین مونتوکل^{۴۸}، مورخ معروف ریاضیات، در جلد اوّل تاریخ ریاضیات

(۴۵) در باب عده‌ی جوابها رجوع شود به § ۴۰۳۰۴۰۵.

(۴۶) این طرز فکر تا زمان دکارت نافذ بود، و او بود که آنرا بکلی درهم شکست (مثلاً

رجوع شود به جهان ریاضیات، نیویورک، ۱۹۵۶، جلد اول، ص ۲۴۱-۴۳).

(۴۷) مطالب § ۴۰۳۰۱ از این قسمت به بعد تقریباً تماماً از مقدمه‌ی کتاب ویکه

(§ ۴۰۳۰۳) اقتباس شده است.

(۴۸) Jean Étienne Montucla (X) (۱۷۲۵ - ۹۹).

مشهور خود، بهمین موضوع اشاره میکند[☆].
 معذک، رساله مورد توجهی از طرف ریاضیون و مستشرقین واقع نشد تا آنکه
 سدیو^{☆☆} پاره‌ای از یک نسخه خطی در علم جبر در کتابخانه‌ی سلطنتی (کتابخانه‌ی
 ملی پاریس) کشف کرد که موضوعش شباهت تامی با موضوع نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن
 داشت، و در ضمن مقاله‌ای که در صفحات ۱۳۵ - ۱۳۶ جلد سیزدهم یادداشتها و مطالب
 مستخرج از نسخ خطی کتابخانه‌ی سلطنتی مندرج است، تفصیلات زیادتری درباره‌ی این نسخه
 آورد، و سپس گاسپار مونژ[†] در کتاب مهم خود، بنام نظر تاریخی در باب بسط و تکامل هندسه
 (بروکسل، ۱۸۳۷)، باستناد مقاله‌ی سدیو، مطالعه‌ی کتاب خیم را از لحاظ تاریخ
 علوم ریاضی حائز اهمیت اساسی شمرد.

در همین ایام گولیلمو لیبری^{††} نسخه‌ی کاملی ازین کتاب نفیس در کتابخانه‌ی
 سلطنتی یافت، و اعلام کرد که قصد نشر کردن آنرا دارد، ولی باین کار توفیق نیافت، و
 سرانجام فرانتس ویکه[×] متن رساله‌ی جبر خیم را با ترجمه‌ی فرانسوی آن و حواشی
 گرانها و ضمایمی، بنام جبر عمر الخیامی (L'Algèbre d'Omar Alkhayyami)، در سال
 ۱۸۵۱ میلادی در پاریس بچاپ رسانید (§ ۴۰۳۰۲).

§ ۴۰۴۰۴ کتاب ویکه - ویکه با نشر جبر خیم خدمت بزرگی به تاریخ
 ریاضیات کرد، و نام خیم را در بین ریاضیون بلند نمود. بعلاوه کتابهایی که تا کنون

- (☆) تاریخ ریاضیات، جلد اول، پاریس، ۱۷۵۸، ص ۳۶۸ - ۶۹.
 (☆☆) Louis Pierre Eugène Amélie Sedillot (۱۸۵۸-۱۸۷۵). مستشرق فرانسوی.
 (†) Gaspard Monge (۱۷۴۶ - ۱۸۱۸).
 (††) Gulielmo Libri (۱۸۵۳ - ۶۹)، ریاضیدان ایتالیائی الاصل. وی در فلورانس
 متولد شد. در ۱۸۳۵ به فرانسه پناهنده شد، و در آنجا به عضویت آکادمی فرانسه و استاد
 دانشگاه سوربون رسید. بعداً بعنوان سرقت نسخ خطی گرانها تحت تعقیب قرار گرفت و ناچار
 به انگلستان گریخت. وی صاحب تألیفات و مقالات علمی مهمی است، و از آثار معروفش
 تاریخ علوم ریاضی در ایتالیا (چهار جلد، پاریس، ۱۸۳۷ - ۴۱) می‌باشد.
 (×) Franz Woepcke (۱۸۲۶-۶۴). مستشرق آلمانی - فرانسوی که مخصوصاً در روشن
 کردن تاریخ ریاضیات در دوره‌ی اسلامی سهم بزرگی دارد.

درباب جبر خیام نوشته شده مبتنی بر کتاب ویکه بوده و مؤلفین آنها فواید بی حساب از این کتاب برده‌اند. بنابراین، بی‌مناسبت نیست که اثر گرانبهای ویکه را با تفصیل بیشتری به خوانندگان معرفی کنیم.

کتاب ویکه مرگب است از:

(۱) متن عربی جبر خیام (صفحات ۱-۵۱ از راست به چپ)، که در پایان آن ترجمه‌ی احوال خیام از کتاب تاریخ الحکمای ابن قفطی نقل شده است (صفحه‌ی ۵۲)؛

(۲) مقدمه‌ی کتاب (صفحات i-xix)، مشتمل بر چگونگی کشف جبر خیام، معرفی خیام، تحلیل انتقادی جبر خیام، ملاحظات تاریخی^۵، و غیره؛

(۳) ترجمه‌ی فرانسوی جبر خیام (صفحات ۱-۸۸)، با توضیحات و حواشی فراوان و سودمند، و نقل براهین خیام با استعمال علامات، که در فهم استدلال‌های بسیار طولانی و ملال‌انگیز لفظی خیام کومک مؤثری است؛

(۴) پنج ضمیمه، بزبان فرانسوی، که ویکه برای روشن ساختن بعضی نکات تاریخی ریاضیات در دوره‌ی اسلامی به کتاب خود ملحق کرده است (صفحات ۹۰-۱۲۸)، بشرح ذیل:

ضمیمه‌ی A - مفاد رساله‌ی ابن هیثم (§ ۳۰۴۰۵۰۶) در درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو خط (§ ۳۰۷۰۱)، و طریق دیگری برای حل همان مسئله بوسیله‌ی حرکت که مصنفش معلوم نیست.

ضمیمه‌ی B - مفاد رساله‌ی در حل این مسئله: دو خط AB و C در دست است. بر اوّلی نقطه‌ای مانند D چنان بیاید که

$$AD/C = C^2 / BD^2$$

ویکجه احتمال می‌دهد که این رساله از کوهی (§ ۳۰۴۰۵۰۵) است.

ضمیمه‌ی C - مفاد رساله‌ی کوهی راجع به طرح قطعه کره‌ای که حجمش برابر حجم

(۵) از قبیل نکاتی که از ویکجه در § ۳۰۷۰۲ نقل کردیم.

قطعه کروی مفروض و سطح مساوی سطح قطعی کروی مفروض باشد. ضمیمه D - مفاد رسالدهی ابوالجود در حلّ این مسئله: خط BC و نقطه‌ی A در دست است. از این نقطه خطی چنان بکشید که اگر D محل تلاقی آن با BC باشد،

$$AD \cdot BC + \overline{BD}^2 = \overline{BC}^2$$

(رجوع کنید به § ۳۰۷۰۳). و نیز حلّ مسئله‌ی ذیل (§ ۳۰۷۰۳) که مصتف آن معلوم نیست:

ذونقدهای مانند ABCD چنان طرح کنید که $AB = AD = BC = 10$ و سطح

شکل ۹۰ باشد.

ضمیمه E - مفاد رسالدهی ابوسعید سجزی^۵ در تثابث زاویه. § ۴۰۳۰۲۰۱ متن رساله‌ی خیّام در کتاب ویکه - چون متن رساله‌ی جبر خیّام در کتاب حاضر عیناً از کتاب ویکه گرفته شده، نکات مهمّ توضیحاتی را که وی در مقدمه‌ی کتاب خود در این باب آورده است نقل می‌کنیم. «من برای تنظیم متن عربی کتاب سه نسخه در اختیار داشتم. اول نسخه‌ی عربی شماره‌ی ۱۱۳۶ کتابخانه‌ی ملی که مورد توجه لیبری واقع شده بود[†]. خطّ این نسخه بسیار زیباست، ولی قسمت اعظم کلمات در آن بی نقطه است. این نسخه از دو نسخه‌ی دیگر صحیح‌تر است، و در موارد ابهام این نسخه را مأخذ قرار داده‌ام، و در ضبط نسخه‌ی بدلها این نسخه را با حرف A مشخص کرده‌ام.

نسخه‌ی دوّم، که آنرا با حرف B مشخص کرده‌ام، همانست که مورد توجه سدیو[†] واقع شده و جزء نسخه‌ی خطّی شماره‌ی ۱۱۰۴ کتابخانه‌ی ملی است. خطّ

(۵) احمد ابن عبدالجلیل سجزی، ریاضیدان و منجم معروف قرن چهارم هجری. برای

اطلاع بیشتر رجوع شود به دکتر محمد معین، چهار مقاله‌ی عروض سمرقندی، ص ۲۵۹ - ۲۶۱.


(†) § ۴۰۳۰۱، ص ۱۳۹.

این نسخه بخوبی نسخه‌ی اول نیست، ولی معجم و در مواردی مشکل است. اما متأسفانه در ابتدای موضوع عمده و بدیع کتاب، یعنی حل معادلات درجه‌ی سوم، مطلب قطع می‌شود. *

نسخه‌ی سوم همان نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن است^{۵۵} است که اول بار کشف شد و موتو کلا از آن نام برده است. این نسخه، که آنرا با حرف C مشخص کرده‌ام، با خط درشت و خوانا نوشته شده است ولی بدرستی نسخه‌ی A نیست.

تصاویر در نسخه‌ی A تاحدی واضح است، ولی قطوع مخروطی همه جا با قوسهای دایره نمایش داده شده. تصاویر نسخه‌ی C در بعضی موارد با متن نامطابق است.

بطوری که ویکه می‌نویسد[†]، نسخه‌ی کتابخانه‌ی لیدن را احتمالاً یک عرب مسیحی که در آمستردام می‌زیسته، و برای استنساخ نسخ خطی که صاحبانشان حاضر به فروش آنها نبوده‌اند در استخدام «گولیوس شهر»^{††} بوده، از روی یک نسخه‌ی شرقی استنساخ کرده است.

تاریخ اتمام تحریر اصل نسخه‌ای که ویکه چاپ کرده ظهر روز یکشنبه‌ی بیست و سوم ماه ربیع الاول بوده، و در محل سنه صورت  رسم شده که خواندن آن مقذور نشده است.

§ ۴۰۳۰۴ سایر ترجمه‌های جبر خیام.

(الف) ترجمه‌ی انگلیسی. ترجمه‌ی انگلیسی جبر خیام در ۱۹۳۱ در نیویورک چاپ شده^X، و آن تقریباً مشتمل بر تمام تعلیقات ویکه بر رساله‌ی خیام است، ولی ملحقات

(۵) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۷ در کتاب حاضر.

(۵۵) § ۴۰۳۰۱، ص ۱۳۸.

(†) جبر عمر خیام، صص ii - iz.

(††) ظاهراً مقصود با کوبوس گولیوس (Jacobus Golius) (۱۵۹۶ - ۱۶۶۷)، مستشرق

هلندی، است، که ولع عجیبی به تهیه‌ی نسخ عربی داشته است.

The Algebra of Omar Khayyam, by Daoud S. Kasir, New York, 1931 (X)

کتاب ویکه در آن نیامده است .

مترجم کتاب می نویسد که آنرا از روی نسخه‌ی خطی کامل و واضحی از رساله‌ی خیّام متعلق به دیوید یوجین سمیت^۵ ، استاد دانشگاه کلمبیا ، ترجمه کرده است ، و بقول مترجم ، نسخه‌ی مذکور را سمیت در لاهور از یک نفر تاجر ایرانی تحصیل کرده و آن عبارتست از ۹۹ صفحه که با خط نسخ خوانا نوشته شده ، وباستثنای بعضی موارد ، بی نقطه است ، و اغلاطی نیز در آن مشاهده می شود .

بقول مترجم ، نسخه‌ی مذکور با متن نسخه‌ی لیدن (§ ۴۰۳۰۲۰۱ و § ۴۰۳۰۱) مطابقت ، آلا اینکه عنوان ندارد ، و پایان دو رساله نیز متفاوت می باشد ، و تحریر آن در روز یکشنبه‌ی سیزدهم ربیع الاول سنه ... (لایقره) پایان رسیده ، و سپس اسم محرّر به خط اردو ضبط شده است .

(ب) ترجمه‌های فارسی . تا حدی که نگارنده‌ی این سطور اطلاع دارد ، در ایران ، جبر خیّام اول بار در سال ۱۳۱۷ هـ ش در جزء کتابی ، تحت عنوان جبر و مرقه‌ی بله‌ی خیّام با انضمام تاریخ علوم ریاضی از سه هزار سال قبل از میلاد تا زمان خیّام ، بتوسط مؤلف کتاب حاضر و به همت آقای نصرالله سبّوحی ، صاحب کتابفروشی مرکزی ، در تهران به چاپ رسید . و کتاب مذکور ، علاوه بر ترجمه‌ی ملخص رساله‌ی خیّام بزبان امروز ریاضیات و تعلیقات و حواشی مربوط بان ، مشتمل بر متن آن رساله ، تاریخ ریاضیات ، تاریخ ارقام و وضع علامات و استعمال حروف ، و مسائل ثلاثه میباشد ، و در تهیه‌ی آن استفاده‌ی کامل از کتاب ویکه شده و به ترجمه‌ی انگلیسی نیز مراجعه شده است . و دوّمین ترجمه‌ی کامل[†] فارسی همین ترجمه‌ی حاضر است که به همت وتشویق انجمن آثار ملی فراهم شده و شرح مجمل آن در دیباچه‌ی کتاب آمده است .

تبصره ۵ - ترجمه‌ی روسی جبر خیّام با حواشی ، بتوسط ب. آ. روزنفلد و آ. پ.

(۵) David Eugene Smith (۱۸۶۵ - ۱۹۴۴) .

(†) مقصود اینست که تمام کتاب بدون تلخیص به فارسی نقل شده ، نه اینکه ترجمه خالی

از عیب و نقص است .

پوشکو بیچ سابق الذکر، در جزء جلد ششم مجموعه‌ی تحقیقات تاریخ ریاضیات بچاپ رسیده است (مسکو ۱۹۵۳).

§ ۴۰۴۰۴ تحلیل رساله‌ی جبر خیام - در این جزء ملاحظاتی چند راجع به رساله‌ی جبر خیام می‌آوریم. این ملاحظات را می‌توان متمم کلیات مذکور در § ۴۰۲ و راهنمای مطالعه کنندگان جبر خیام تلقی کرد.

رساله‌ی جبر خیام یا یک مقدمه آغاز می‌شود که تاریخچه‌ی بسیار مختصری از تحقیقاتی که پیش از خیام در حل معادلات درجه‌ی سوم شده دربر دارد. تاریخچه‌ای که در رساله‌ی دیگر خیام آمده (§ ۶۰۴۰۴) از آنچه در مقدمه‌ی رساله‌ی جبر گفته شده جامعتر است.

بقیه‌ی مواد اصلی کتاب را می‌توان به پنج مبحث عمده - تعریفات و اصطلاحات؛ طبقه‌بندی معادلات؛ معادلات درجه‌ی دوم و قابل تحویل به آنها؛ معادلات درجه‌ی سوم؛ معادلات کسری - تقسیم کرد. در پایان انتقاد کارهای ابوالجود در حل معادله‌ی درجه‌ی سوم می‌آید.

ما برای تسهیل ارجاع و مراجعه، مواد کتاب را بر حسب موضوع به شرح و با عناوین ذیل فصل بندی کرده‌ایم:

شماره در متن	شماره در ترجمه‌ی فارسی	عنوان فصل
§ ۱۰۱	§ ۵۰۱	تعریفات و اصطلاحات
§ ۱۰۲	§ ۵۰۲	طبقه بندی معادلات
§ ۱۰۳	§ ۵۰۳	حل مفردات
§ ۱۰۴	§ ۵۰۴	معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم
		مقترنات سه تایی درجه‌ی سوم قابل
§ ۱۰۵	§ ۵۰۵	تحویل به درجه‌ی دوم
§ ۱۰۶	§ ۵۰۶	مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم
§ ۱۰۷	§ ۵۰۷	مقترنات سه تایی درجه‌ی سوم

عنوان فصل	شماره در متن	شماره در ترجمه فارسی
مقترنات چهارتائی سه بایک	§ ۱۰۸	§ ۵۰۸
مقترنات چهارتائی دو با دو	§ ۱۰۹	§ ۵۰۹
معادلات کسری	§ ۱۰۱۰	§ ۵۰۱۰
نقدکارهای ابوالوجود	§ ۱۰۱۱	§ ۵۰۱۱

و اینک می‌پردازیم به تحلیل مواد رسالدهی جبر ختّام؛ و مقدّمهٔ توجّه خواننده را به مندرجات ۴۰۲-۴۰۲۰۱ §§ در معرفی ختّام بعنوان عالم جبر جلب می‌کنیم. § ۴۰۳۰۴۰۱ فصل اول- فصل اوّل کتاب مشتمل است بر تعریف جبر، تعریف مقدار، اصطلاحات جبری، و ملاحظات کلی راجع به معادلات.

رؤوس مطالب گفتنی در این مباحث را سابقاً بخصوص در ۴۰۲-۴۰۲۰۱ §§ گفتیم. در باب اصطلاحات جبری می‌توان به ۳۰۶۰۴ § مراجعه کرد. نظر ختّام در باره‌ی مال مال و تمیز « حلّ عددی » معادله (یعنی حلّ آن وقتی مجهول عدد باشد) از « حلّ هندسی » آن (یعنی حلّ معادله وقتی مجهول مقدار هندسی باشد) در ۴۰۲۰۱ § بررسی شد.

۴۰۳۰۴۰۲ § فصل دوم، طبقه‌بندی معادلات - در این فصل ختّام معادلات سه درجه‌ی اوّل را بر حسب اینکه مفرد (دوجمله‌ای) یا مقترن (دارای بیش از دوجمله) باشند به ۲۵ صنف تقسیم می‌کند، باین شرح:

(الف) شش صنف مفرد (دوجمله‌ای)

$$(۱) a = x \quad [§ ۵۰۳۰۱]$$

$$(۲) a = x^2 \quad [§ ۵۰۳۰۲]$$

$$(۳) a = x^3 \quad [§ ۵۰۳۰۴]$$

$$(۴) bx = x^2 \quad [§ ۵۰۳۰۶]$$

$$(۵) bx = x^3 \quad [§ ۵۰۳۰۷]$$

$$(۶) cx^2 = x^3 \quad [§ ۵۰۳۰۸]$$

(ب) نوزده صنف معادله‌ی مقرر (سه یا چهار جمله‌ای)

سه تائی

(I) سه صنف درجه‌ی دوم :

$$(۷) x^2 + bx = a \quad [§ ۵۰۴۰۲]$$

$$(۸) x^2 + a = bx \quad [§ ۵۰۴۰۳]$$

$$(۹) bx + a = x^2 \quad [§ ۵۰۴۰۴]$$

(II) سه صنف قابل تبدیل بدرجه‌ی دوم :

$$(۱۰) x^2 + cx^2 = bx \quad [§ ۵۰۵۰۲]$$

$$(۱۱) x^2 + bx = cx^2 \quad [§ ۵۰۵۰۳]$$

$$(۱۲) cx^2 + bx = x^2 \quad [§ ۵۰۵۰۴]$$

(III) شش صنف درجه‌ی سوم غیر قابل تحویل بدرجه‌ی پایین‌تر :

$$(۱۳) x^3 + bx = a \quad [§ ۵۰۷۰۲]$$

$$(۱۴) x^3 + a = bx \quad [§ ۵۰۷۰۳]$$

$$(۱۵) a + bx = x^3 \quad [§ ۵۰۷۰۴]$$

$$(۱۶) x^3 + cx^2 = a \quad [§ ۵۰۷۰۵]$$

$$(۱۷) x^3 + a = cx^2 \quad [§ ۵۰۷۰۶]$$

$$(۱۸) a + cx^2 = x^3 \quad [§ ۵۰۷۰۷]$$

چهار تائی

(IV) چهار صنف سه با يك

$$(۱۹) x^2 + cx^2 + bx = a \quad [§ ۵۰۸۰۲]$$

$$(۲۰) x^2 + cx^2 + a = bx \quad [§ ۵۰۸۰۳]$$

$$(۲۱) x^2 + bx + a = cx^2 \quad [§ ۵۰۸۰۴]$$

$$(۲۲) x^2 = bx + cx^2 + a \quad [§ ۵۰۸۰۵]$$

(V) سه صنف دو با دو

$$(۲۳) x^2 + cx^2 = bx + a \quad [§ ۵۰۹۰۲]$$

$$(۲۴) x^2 + bx = cx^2 + a \quad [§ ۵۰۹۰۳]$$

$$(۲۵) x^2 + a = bx + cx^2 \quad [§ ۵۰۹۰۴]$$

خیام گوید از این معادلات، (۶) - (۴) قابل تحویل به (۱) یا (۲) و دسته‌ی

(II) قابل تحویل به دسته‌ی (I) است، ولی دلایل جبریه‌ای پیشین را بر این امر،

که مبتنی بر تناسبهای

$$1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3$$

است ، کافی نمی‌داند ، بلکه وقتی مجهول معادله « مقدار » باشد ، برطبق روش عمومی خود (§ ۴۰۲.۰۱) ، برای اثبات قابل تحویل بودن ، برهان هندسی لازم می‌شمارد (این براهین را در § ۵۰۳ و § ۵۰۵ می‌آورد) .

در باب طبقه بندی معادلات و اهمیت کار ختیم به § ۳۰۶.۰۶ و § ۶۰۴.۰۳ و § ۴۰۲ مراجعه شود .

§ ۴۰۳.۰۴.۰۴ فصول سوم - پنجم - این فصول چیزی زاید بر کارهای پیشینیان ندارد الا اینکه ختیم تحویل بعضی معادلات را به درجه‌ی پایین‌تر به طریق هندسی ثابت کرده است .

در باب معادلات درجه‌ی دوم (§ ۵۰۴) ، ختیم چیزی بر آنچه خوارزمی آورده (§ ۳۰۶.۰۷) نیفزوده و حتی بعضی مثالهایی که می‌آورد همان امثله‌ی خوارزمی است ، منتهی براهین ختیم منفتح‌تر و جامع‌تر است .

در باب شرایط ختیم برای امکان معادلات عددی درجه‌ی دوم سابقاً سخن گفتیم . شرایط وی ، آنچه زاید بر منفی نبودن مبین معادله است ، علاوه بر اینکه اصلاً بی‌مورد است (§ ۴۰۲.۰۱) نادرست هم هست * .

ضمناً دو مسئله در § ۵۰۳ آمده است که ختیم در سراسر کتاب برای متجانس کردن معادلات آنها را بکار می‌برد ، و آنها عبارتند از نمایش دادن يك عدد بوسیله‌ی يك « سطح » (یعنی مربع مستطیل) یا يك « مجسم » (یعنی مکعب مستطیل) . عدد a را در حالت اول با مستطیلی با اضلاع a و واحد نمایش می‌دهد ، و در صورت دوم با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش « مربع واحد » (یعنی مربعی بضلع واحد طول) و ارتفاعش a است (§ ۵۰۳.۰۳ و § ۵۰۳.۰۵) .

§ ۴۰۳.۰۴.۰۴ فصل ششم ، مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم - مسائلی که در این فصل حل شده عبارتست از :

(*) رجوع شود به ذیل مربوط به شرایط در § ۵۰۴.۰۲ و نیز ذیل § ۵۰۴.۰۳.۰۲

(الف) درج دو واسطه‌ی متناسب بین دو طول مفروض ($\S ۳۰۷۰۱$)، بوسیله‌ی تقاطع دو سهمی.

(ب) تعیین هندسی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع مفروض a^2 باشد و با مکعب مستطیل مفروضی به قاعده‌ی s^2 و ارتفاع h معادل باشد.

(ج) تعیین مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع و ارتفاعش h و حجمش مساوی حجم مکعب مستطیلی بقاعده‌ی s^2 و ارتفاع h' باشد.

چنانکه خواهیم دید، خیام در سراسر کتاب خود از مسائل (ب) و (ج) برای متجانس کردن معادلات استفاده می‌کند؛ بدین طریق، فرض کنیم a و c و β مقادیر مفروضی باشند. a را، چنانکه در $\S ۴۰۳۰۴۰۳$ گفته شد، بوسیله‌ی مکعب مستطیل S بقاعده‌ی 1×1 و ارتفاع a نمایش می‌دهیم. بر طبق مسائل (ب) و (ج) می‌توان مکعب مستطیلی مانند S' ، هم حجم S ، ساخت که: (۱) قاعده‌اش مربعی به ضلع β باشد، یا (۲) قاعده‌اش مربع و ارتفاعش c باشد. اگر λ ارتفاع اولی یا ضلع قاعده‌ی دومی باشد، در حالت اول $a = \lambda \beta^2$ و در صورت ثانی $a = c \lambda^2$. پس از این مقدمات حل هندسی معادله‌ی $x^2 = a$ بوسیله‌ی تقاطع سهمی و دایره می‌آید.

$\S ۴۰۳۰۴۰۵$ فصول هفتم - نهم - این فصول مهمترین قسمت رسالدهی خیام و مشتمل بر حل و بحث اصناف سیزده گانه‌ی معادلات درجه‌ی سوم است (معادلات دسته‌های III - ۷، $\S ۴۰۳۰۴۰۲$).

تفصیل طریق خیام برای حل هر صنف از معادلات درجه‌ی سوم در ترجمه‌ی رسالدهی وی و توضیحات کافی در ذیل مسائل آمده است ($\S\S ۵۰۷۰۱ - ۵۰۹۰۵$). در این مقام اصول کلی طریق وی را بیان می‌کنیم.

خیام در تمام معادلات مورد بحث ضرب جمله‌ی درجه‌ی سوم را واحد می‌گیرد، و قبل از شروع به حل معادله آنرا متجانس می‌کند، بدین طریق:

(۱) ضرب جمله‌ی درجه‌ی دوم (c) را بوسیله‌ی طولی نمایش می‌دهد.
 (۲) ضرب جمله‌ی درجه‌ی اول (b) را بصورت β^2 ، یعنی بوسیله‌ی مربعی
 به مساحت b ، نمایش می‌دهد ($b = \beta^2$).

برای این منظور، b را بوسیله‌ی «سطحی» نمایش می‌دهد (§ ۴۰۳.۴۰۳)،
 و سپس مربعی معادل این سطح می‌سازد.

(۳) جمله‌ی معلوم (a) را در معادلات $x^2 + a = cx^2$ و $x^2 + cx^2 = a$
 بصورت λ^2 ، و در معادله‌ی $x^2 = cx^2 + a$ بصورت $\lambda^2 = c$ ، و بالاخره در سایر معادلات
 بصورت $\lambda\beta^2$ نمایش می‌دهد.

این مقصودها بوسیله‌ی مسائلی که قبلاً حل شده بعمل می‌آید. توضیح آنکه
 نمایش a بصورت λ^2 بحل معادله‌ی $\lambda^2 = a$ بر می‌گردد، و دو نمایش دیگر بطرقی
 که در § ۴۰۳.۴۰۴ توضیح دادیم.

پس از اینکه معادله متجانس شد، قطع لازم برای حل هر معادله را بر حسب
 ضرایب معادله تعریف می‌کند، و از تقاطع آنها جواب مثبت معادله را (در صورت
 وجود آن) بدست می‌آورد، و بوسیله‌ی مقایسه‌ی احجام و افزودن و اسقاط حجم‌ها،
 صدق کردن جواب را در معادله ثابت می‌کند.

اینک می‌رسیم به عده‌ی جوابها. خیام، پس از حل هر مسئله، در عده‌ی نقاط
 تقاطع قطع مربوط به آن، یعنی در عده‌ی جوابهای (مثبت) معادله بحث می‌کند، و
 در همه‌ی حالات عده‌ی ریشه‌های مثبت را بدرستی تعیین می‌کند، مگر در
 دو مورد، که اگر در آنها به خطا زرفته بود، به احتمال قوی به اکتشافات
 بسیار مهم و اساسی نائل می‌شد.

یکی از این موارد معادله‌ی $x^2 + bx = cx^2 + a$ است (§ ۵۰۹.۰۳)، که
 با $c < a/b$ ممکن است سه ریشه‌ی حقیقی و مثبت داشته باشد. اما بحث
 خیام در عده‌ی نقاط تقاطع قطع مسئله خالی از دقت است، و بهمین جهت فقط یکی
 از جوابهای معادله را بدست می‌آورد. خطای خیام در این مورد باعث تأسف است،

زیرا وی با خبر بود که معادله‌ی درجده‌ی دوّم ممکن است دو جواب (مثبت) داشته باشد، و اگر به معادله‌ی درجده‌ی سوّمی با سه ریشه می‌رسید شاید به کشف رابطده‌ی بین عدّه‌ی جوابهای معادله با درجده‌ی آن نایل می‌شد.

در تشخیص عدّه‌ی جوابهای معادله‌ی $cx^2 + bx + a = x^2$ نیز در بعضی حالات خیّام بخطا رفتند و متوجّه دوّمین ریشه‌ی مثبت معادله نشده است (§ ۵۰۹۰۴). منشاء این خطا اینست که خیّام فقط به رسم کردن قسمتی از قطوع (نصف دایره، نصف سهمی، یا یک شاخه‌ی هذلولی) مورد نیاز اکتفا می‌کند، و این بسیار جای تأسف است، زیرا بعّلت همین رسم قطوع ناتمام، وی از دریافتن یکی از مهمترین مفاهیم ریاضی - یعنی اعداد منفی - باز مانده است، و اگر عادت زبان آور رسم قطعهای ناتمام نبود، به احتمال قوی متوجّه ریشه‌های منفی می‌شد، و به یکی از بزرگترین اکتشافات ریاضی می‌رسید.

باید دانست که خیّام، در بحث از عدّه‌ی جوابها، شرایط تقاطع یا تماس یا عدم تقاطع قطوع را بر حسب ضرایب معادله تعیین نمی‌کند، مگر در بعضی موارد که اجمالاً در این مطلب وارد می‌شود^۵. از جمله می‌توان بحث معادلات $x^2 + a = cx^2$ (§ ۵۰۷۰۶) و $x^2 + bx + a = cx^2$ (§ ۵۰۸۰۴) را نام برد. بالاخره، خیّام حلّ معادله‌ی درجده‌ی چهارم را به طریقی که در رساله‌ی جبر آورده ممتنع می‌شمارد، و حال آنکه بعضی از پیشینیان وی صور خاصی از معادله‌ی درجده‌ی چهارم را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حلّ کرده‌اند (§ ۳۰۷۰۳).

فصل ۴۰۴۰۶ § ۴۰۴۰۶، معادلات کسری - معادلات کسری خیّام معادلاتی است بین قوای مجهول و قوای عکس آن، و طریق وی برای حلّ این معادلات تغییر مجهول ($1/x = z$) و یا ضرب کردن طرفین معادله در قوه‌ی مناسبی از مجهول است، و وی معادلات مورد بحث را به بیست و پنج صنف اصلی تقسیم می‌کند.

(۵) بعضی ریاضیون پیش از خیّام نتایج بسیار دقیقتری در این باب بدست آورده‌اند که نمونه‌های آنها را ویکه در ضمایم B و C از کتاب نفیس خود (§ ۴۰۳۰۲) آورده است.

§ ۴۰۴ رساله در تحلیل يك مسئله

§ ۴۰۴۰۱ مقدمه - نگارنده اول بار بوسیله‌ی مقاله‌ی سابق الذکر[⊕] عباس اقبال آشتیانی راجع به عمرخیام از این رساله، که در ۱۰۲۰۴۰ § در ضمن آثار ریاضی خیام از آن اسم برده شد، اطلاع یافت. در ضمن این مقاله، محقق مذکور چنین می‌نویسد:

« غیر از تألیفاتی که از خیام در دست است و یا مورخین از او نقل کرده‌اند »

« نگارنده رساله‌ی از او دارم به عربی در پنج ورق بخط نسخ ریز در حل يك مسأله‌ی »

« جبری بوسیله‌ی قطوع مخروطی در جواب کسی که آنرا از حکیم سؤال کرده، »

« و عنوان آن اینست: »

« هذه رسالة لابي الفتح عمر بن ابراهيم الخيامي . »

« رساله‌ی مزبور با اینکه موضوع آن ریاضی است باز از پاره‌ای مسائل تاریخی »

« و حکمتی خالی نیست و ما ترجمه‌ی يك فقره از آنرا که به تاریخ علوم ریاضی در »

« میان مسلمین مربوط است در اینجا نقل می‌کنیم... »^{⊕⊕}

بعداً فاضل نامبرده نسخه‌ی خطی خود را، که جزء مجموعه‌ی⁺ کوچکی از رسائل ریاضی بود، در اختیار نگارنده گذاشت، و او رساله‌ی خیام و بعضی دیگر از

(⊕) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۳۵.

(⊕⊕) سپس قسمتی از مطالب تاریخی § ۶۰۴۰۴ نقل شده است.

(⁺) محقق محترم، آقای محمد تقی دانش پژوه، شرحی در معرفی این مجموعه، که فعال در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران محفوظ است، در مجلد هشتم فهرست کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه (تحت طبع)، تحت شماری ۱۷۵۱ نگاشته‌اند که خلاصه‌ی از آن با اندک تصرفی ذیلاً برای مزید فایده نقل می‌شود:

این مجموعه را عباس اقبال در ذیحجه‌ی ۱۳۳۵ در بازار حلبی ساها به بهای سدقران خریداری کرده است، و آن مشتمل بر یازده رساله است در ۸۱ ورق بخط نسخ محمد ابن ابانراب ابن احمد، و در پشت اوراق ۵۶ و ۸۵ تاریخ کتابت ۱۲۸۳ مذکور است. بعضی صفحات ۱۷ و برخی ۲۳ سطر دارد، و اندازه‌ی متن صفحات ۱۷ سطری ۱۵×۷٫۵ سانتیمتر و اندازه‌ی سایرین ۱۵×۹ سانتیمتر، و بالاخره اندازه‌ی خارجی مجموعه ۱۴×۲۰٫۵ سانتیمتر می‌باشد. کاغذ آن فرنگی و جلدش تیماج حنائی است.

رسالات جزء مجموعه بشرح ذیل است:

(بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد)

مطالب آن مجموعه را بدقت استنساخ کرد، و کوشید که تصرفی در آن ننماید مگر در مواردی که حروف مربوط به تصاویر یا قضایا و مقالات هندسی اقلیدس نادرست بود، یا کلمه‌ای اشتبهاً مکرر شده بود، و امثال اینها.

وقتی طبع کتاب حاضر آغاز گردید، چون نگارنده را خبری از اصل رساله‌ی مذکور نبود، همان نسخه‌ی را که استنساخ کرده بود برای چاپ آماده ساخت، و آن همانست که در قسمت دوم این کتاب بنظر خوانندگان میرسد. بعداً بتوسط محقق محترم، آقای دانش پثرو، اطلاع حاصل شد که اصل مجموعه در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران محفوظ است، و بشرح مذکور در مقدمه‌ی این کتاب، عکس نسخه‌ی رساله‌ی خیام فراهم شد، و برای مزید فایده به آخر کتاب حاضر ملحق گردید. از جنبه‌ی تاریخی و در بررسی رشد فکر ریاضی خیام (۴۰۲ §) شاید توجه باین مطلب خالی از فایده نباشد که خیام این رساله را قبل از رساله‌ی جبر تصنیف کرده است، زیرا در این رساله وعده می‌دهد (آخر ۶۰۴ §) که «اگر فرصتی دست دهد و توفیق رفیق شود، همدی این اصناف چهارده گانه [از معادلات درجده‌ی سوم] را، با جملگی شاخدها و حالات آنها و تمیز آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است» گرد آورد، «تا رساله‌ی شامل عده‌ای از مقدمات که در اصول این فن [یعنی فن جبر] فواید عظیم دارد پرداخته آید».

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

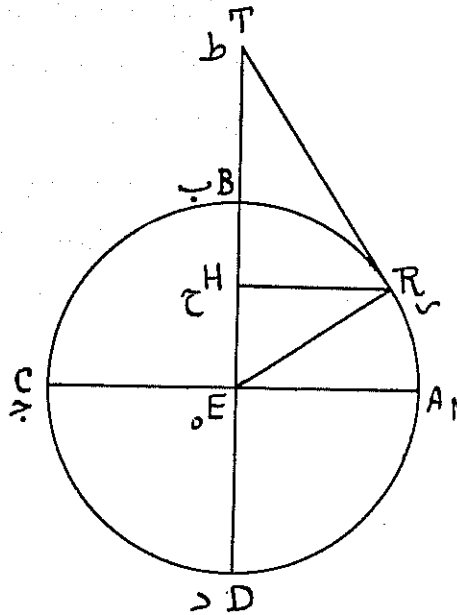
- (۱) شرح المقالة العاشرة من اصول اقلیدس، از ابوتراب ابن احمد، موزخ ۲۲ رجب ۱۲۶۱؛
 (۲) [رساله‌ی مورد بحث در کتاب حاضر]؛ (۳) مقالة فی الوزن والمیزان، از اقلیدس؛ (۴) رساله فی استخراج تناسب الاعداد الستة؛ (۵) مسئله من کتاب ارشمیدس؛ (۶) برهان آخر للمعجزی [برهان دیگری از همان مسئله است]؛ (۷) رساله فی استخراج ضلع المسبع فی الدائرة، از ابو سهل کوهی؛ (۸) رساله عمل الممخمس المتساوی الاضلاع من مربع معلوم، از ابوسهل کوهی؛ (۹) فائدة فی النسبة؛ (۱۰) مقالة فی ان النبص طبیعة موسیقاریه؛ (۱۱) رساله در معرفت وترثلث قوس، از میرزا ابوتراب. پایان مطالب مستخرج از یادداشتهای آقای دانش پثرو
 میرزا ابوتراب مذکور (مؤلف رسالات شماره‌ی ۱ و ۱۱)، بقول عباس اقبال آشتیانی در مقاله‌ی سابق‌الذکر (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۳۵)، از ریاضیون عهد محمدشاه قاجار بوده است.

§ ۴۰۴۰۲ مندرجات رساله - مندرجات رساله را می‌توان به دو بخش عمده تقسیم کرد، اول طرح مسئلهی موضوع رساله و تحلیل آن به يك معادلهی درجهی سوم و حلّ این معادله بوسیلهی قطوع مخروطی؛ دوم کلیاتی راجع به معادلات که بالاخص مشتمل بر طبقه‌بندی معادلات درجهی اول تا سوم و تاریخچه‌ای از کارهای ریاضیون اسلامی در حلّ معادلات درجهی سوم است.

مسئلهی موضوع رساله یافتن نقطه‌ای مانند R است بر ربع دایرهی AB بطوری

که $AE:RH = EH:HB$.

خیام در حلّ مسئله بطریق تحلیل و ترکیب^{۵۲} عمل می‌کند، یعنی، باصطلاح امروز، ابتداء فرض می‌کند مسئله حل‌شده و تقسیم مطلوب بعمل آمده است (§۶۰۲)، و از آنجا نتیجه می‌گیرد که در مثلث قائم الزاویهی ERT ، $ET = ER + RH$.



(۵۲) در باب طریق تحلیل و ترکیب یونانیان در اثبات احکام و حل مسائل رجوع شود به: هیت، سیزده مقاله، جلد ۱، ص ۱۳۷ - ۱۴۲، و مخصوصاً ص ۱۴۵ - ۱۴۱ که در آنها نکات لازم الزامیه در حل مسائل بوسیلهی تحلیل و ترکیب به بهترین وجهی تشریح شده است.

بدین وسیله، حلّ مسئله را برمی گرداند به تعیین مثلث قائم‌الزاویه‌ای که وترش مساوی مجموع یکی از دو ضلع دیگر و ارتفاع وارد بر وتر باشد، و ما برای اختصار چنین مثلثی را مثلث مُعین می‌خوانیم. سپس مثلثی واجد خاصیت مذکور می‌سازد، و برای این منظور تصویر ضلع مذکور را بر وتر ده می‌گیرد، و ثابت می‌کند که اگر x ارتفاع مثلث باشد، x در معادله $20x^2 + 200x = x^2 + 200$ صدق می‌کند (§ ۶۰۳۰۴)، و پس از حلّ این معادله بوسیله‌ی قطوع مخروطی (§ ۶۰۵)، مثلث معین را می‌سازد، و بالاخره در § ۶۰۶ مسئله‌ی موضوع رساله را بوسیله‌ی این مثلث حل می‌کند. تفصیل مطلب با شرح و توضیحات اضافی ما در قسمت ششم کتاب آمده است.

باید گفته شود که این قسمت از رساله اهمیت خاصی ندارد، و اگر چه قریب یازده صفحه از رساله‌ی پانزده صفحه‌ای خیام در حلّ مسئله‌ی مذکور است، در پایان رساله طریق دیگری در ده سطر از مصنف نامعلومی آمده است که ما آنرا در پایان متن رساله (صفحه‌ی ۷۴) و ترجمه‌ی فارسی آنرا در آخر قسمت ششم نقل کرده‌ایم. اما چند مطلب دیگر در این رساله جالب توجه است.

(الف) طبقه‌بندی معادلات در این رساله (§ ۶۰۴۰۳) اساساً بر حسب درجه است. در باب اهمیت این موضوع رجوع کنید به § ۳۰۶۰۶ و § ۴۰۲.

(ب) قسمت تاریخی رساله (§ ۶۰۴۰۴) در روشن کردن مساعی دانشمندان دوره‌ی اسلامی در حلّ معادله‌ی درجه‌ی سوم بسیار سودمند و از آنچه در مقدمه‌ی جبر خیام آمده جامعتر است.

(ج) توجه به حلّ عددی مسئله (§ ۶۰۷). در رساله‌ی جبر خیام از این مقوله سخنی نیست.

بالاخره نکته‌ی دیگری که در این رساله بنظر ما حائز اهمیت است اشاره‌ی

(*) حالت خاصی از معادله‌ی «کعب و شيء» با «مال و اعداد». رجوع شود به

خیّام است^۵ به آلاتی برای ساختن مکعبی معادل مکعب مستطیل مفروض برای اشخاصی که مخروطات ندانند. به یقین می‌دانیم که ریاضیون اسلامی آلاتی، بنام پرگار تام^۶، برای رسم قطوع مخروطی طرح و رسائلی در باب آنها تألیف کرده بودند^۷ اما «آلتی» برای حل معادله‌ی $x^3 = a$ ، یعنی برای استخراج کعب، برای کسی که مخروطات نداند، حائز اهمیت است، و امیدواریم روزی معلوم شود که مقصود از آلتی که خیّام بآن اشاره می‌کند چیست.

در پایان این مختصر توجه خواننده را به ۴۰۲-۴۰۲۰۱ §§، در معرفی خیّام بعنوان عالم جبر، که در ضمن آن رسالدهی مورد بحث با رسالدهی جبر خیّام از جهاتی مقایسه شده است، جلب می‌کنیم.

§ ۴۰۵ اصطلاحات ریاضی خیّام

۴۰۵۰۱ - اصطلاحات ریاضی خیّام همان اصطلاحات رایج در نزد ریاضیون اسلامی است.

از اصطلاحات جبری قدیم در § ۳۰۴۰۴ و § ۳۰۶۰۶ - ۳۰۶۰۴ §§ با تفصیل، کافی سخن گفتیم. بعلاوه، خیّام بعضی از اصطلاحات جبر را در رسائل خود تعریف می‌کند (رجوع شود به § - های ۱۰۱۰۳، ۵۰۱۰۳، ۱۰۱۰۵، ۵۰۱۰۵، ۱۰۲۰۶، ۵۰۲۰۱، ۲۰۴۰۲، و ۶۰۴۰۲).

اکثر اصطلاحات هندسی خیّام همانهاست که امروز نزد ما - یا لا اقل نزد کسانی از ما که از عقل سلیم برخوردارند - رایج است، مانند خط، منحنی، قوس،

(۵) § ۶۰۴۰۳ در حل «مکعبی که معادل اعداد باشد»، یعنی معادله‌ی $x^3 = a$.

(۶) از آن جمله است رسالدهی فی البرکار التام والعمل به از ابوسهل کوهی (۳۰۴۰۵۰۵ §)، رسالدهی فی البرکار التام از محمد ابن الحسین ابن محمد ابن الحسین، که در اواسط نیمه‌ی دوم قرن ششم ه. ق برآمده، و رسالدهی مذکور را بنام سلطان معروف ابوی المک المک ناصر صلاح الدین یوسف I ابن ایوب (۵۳۲ - ۵۸۹ ه. ق)، نوشته است. رجوع شود به: وپکه، جبر خیّام، حواشی ص ۵۶ - ۵۷. (ونیز سارتن، مدخل، جلد اول، ص ۶۶۵ و ۷۱۸؛ بروکلیمان، جلد اول، ص ۲۵۴ و ۶۲۱).

دایره، مرکز، قطر، قاعده، ارتفاع، و غیره. از اصطلاحاتی که امروز منسوخ است میتوان اضافه کردن سطحی برخطی و متکافی (یا مکافی) بودن را ذکر کرد، که اولی را در § ۳۰۲.۳۰۱ (صص ۸۵-۸۶) توضیح دادیم، و دیگری را خیام بمعنی «به نسبت عکس یکدیگر بودن» مصطلح امروز بکار می برد. مثلاً گوید هر گاه مساحات دو مستطیل مساوی باشد، «قواعد آنها با ارتفاعاتشان متکافی اند»، یعنی قواعد آنها به نسبت عکس ارتفاعاتشان است؛ و كذلك در مورد دو مکعب مستطیل^{۵۴}.

بعلاوه، خیام الفاظ سطح و مجسم را بترتیب برای مستطیل و مکعب مستطیل اصلاح می کند (§ ۱۰۶.۳۰۱ و § ۵۰۶.۳۰۱)، و لفظ مربع را، علاوه بر معنی اصطلاحی، احياناً بمعنی شکل (مستوی) چهار ضلعی بکار می برد (مثلاً § ۲۰۴.۰۲ و § ۶۰۴.۰۲). در ترجمه فارسی رسائل خیام، در این موارد ما اصطلاحات کنونی را بکار برده ایم.

در باب اصطلاحات مخروطات توجه به توضیحات آتیه برای فهم مطالب خیام مفید است^{۵۵}.

خیام محور کانونی قطع را سهم آن و نقطه‌ی تقاطع آن را با منحنی (در مورد قطع مکافی) یا شاخه‌ای از آن که مورد نظر است (در مورد قطع زاید) رأس منحنی می خواند. ضلع قائم[†] در اصطلاح او طولی مساوی وتر کانونی عمود بر محور کانونی و ضلع مایل^{††} طول قطر کانونی است.

(۵) تعریف «اشکال متکافی الاضلاع» که در تحریر اقلیدس آمده (ابتدای مقالهی ششم، ص ۸۲) بی معنی است، و همچنین است تعریف اقلیدس در متن یونانی موجود کتاب اصول (رجوع شود به: هیت، سیزده مقاله، جلد ۲، ص ۱۸۹).

(۵۵) برای تسمیه‌ی قطوع رجوع شود به § ۳۰۲.۳۰۳.

(†) رجوع شود به ذیل صفحهی ۹۱.

(††) به لاتینی لاتوس ترانسورسوم (Latus transversum).

قطوعی که خیم بکار می‌برد منحصر به دایره، قطع مکافی (سهمی)، و قطع زاید (هذلولی) متساوی‌القطرین است، و در استعمال خواص^۳ دو قطع اخیر- جز در مواردی که قطع زاید را به مجانب‌هایش[†] نسبت می‌دهد- رأس و سهم و مماس مرسوم از رأس را بر منحنی بترتیب، باصطلاح امروز، مبداء مختصات و محور طول و محور عرض می‌گیرد. عرض نقطه‌ای از منحنی را نسبت باین دستگاه خط^۴ ترتیب و زاویه‌ی دو محور را زاویه‌ی ترتیب می‌خوانند.

۳- خواص

۴- خط ترتیب

۵- زاویه ترتیب

(†) خیم اصطلاح خاصی برای مجانب منحنی ندارد، و هر جا می‌خواهد از «هذلولی با مجانبهای D و D'» صحبت کند می‌گوید «قطع زایدی که خطوط D و D' آن را قطع نکنند.»

مقدمه
فصل اول
فصل دوم
فصل سوم
فصل چهارم
فصل پنجم
فصل ششم
فصل هفتم
فصل هشتم
فصل نهم
فصل دهم
فصل یازدهم
فصل دوازدهم
فصل سیزدهم
فصل چهاردهم
فصل پانزدهم
فصل شانزدهم
فصل هجدهم
فصل نوزدهم
فصل بیستم

قسمت پنجم

رساله‌ی جبر خیام

(ترجمه‌ی فارسی)

مؤلف: جابر بن خیام
مترجم: دکتر...

قسمت پنجم رساله‌ی حکیم فاضل

غیاث‌الدین ابوالفتح عمر ابن ابراهیم خیامی نیشابوری
در اثبات مسائل جبر و مقابله
[مقدمه]

حمد خدا راست - خدائی که پروردگار جهانیان است - و انجام نیک پرهیزکاران را؛ و دشواری و تنگی جز بر ستمکاران نیست؛ و درود بر پیغمبران، خصوصاً بر محمد و جمیع خاندان پاک او.

یکی از مباحث ریاضی که در قسمتی از حکمت که معروف به علوم ریاضی است محتاج الیه می‌باشد فن جبر و مقابله است که برای استخراج مجهولات عددی و هندسی وضع شده است. و در این فن اصنافی [از معادلات] هست که در حل آنها یک رشته مقدمات بسیار دشوار محتاج الیه می‌باشد، و باین جهت، اغلب کسانی که باین اصناف پرداخته‌اند در حل آنها وامانده‌اند. [توضیح آنکه] از پیشینیان سخنی درین باب به ما نرسیده است - شاید در حل این اصناف جستجو و مطالعه کرده‌اند، ولی چیزی دریافته‌اند، یا در تحقیقات خود نیازمند به امعان نظر در آنها نشده‌اند، و یا بالاخره، شاید آثارشان درین باب به زبان ما ترجمه نشده است. و اما از متأخرین، یکی از ایشان، بنام ماهانی^۵، در صدد تحلیل جبری مقدماتی برآمد که ارشمیدس در شکل چهارم از مقالدهی هشتم کتاب خود موسوم به کره و استوانه بکار برده است، و این امر منجر شد به معادله‌ای بین کعبها و مالها و اعداد، و وی، بعد از تفکر زیاد، از حل آن عاجز ماند، و لهذا حکم به امتناع آن کرد. بعد، ابو جعفر خازن پیدا شد، و آن را به وسیله‌ی قطوع مخروطی حل نمود. سپس، بعد از وی، جماعتی از علمای

هندسه به [حل] عده‌ای از اصناف [معادلات] جبر محتاج شدند ، و بعضی از آنان برخی از آنها را حل کردند ، ولی هیچیک را در برشمردن اصناف معادلات و معین کردن انواع هر صنف و برهان حل آنها مطلب معتبری نیست مگر در مورد دو صنف که بزودی ذکر خواهم کرد ^{۴۵} .

و من همواره سخت اشتیاق به تحقیق استدلالی این اصناف و جدا کردن حالات ممکن و ممتنع هر صنف داشتم ، چو می‌دانستم که این امر در حل مسائل دشوارشدیداً مورد احتیاج است . لکن تصاریف زمان همواره با پیشامدهائی همراه بود که پرداختن باین امر را بعهده‌ی تعویق می‌انداخت ، و برای من فراغتی نمی‌گذاشت که صرف تدوین این مطلب کنم و فکر خود را بر آن متمرکز سازم . زیرا ما گرفتار روزگاری هستیم که از اهل علم فقط عده‌ی کمی ، مبتلی به هزاران رنج و محنت ، باقی مانده ، که پیوسته در اندیشه‌ی آنند که غفلت‌های زمان را فرصت جسته به تحقیق در علم و استوار کردن آن پردازند . و بیشتر عالم نمایان زمان ما حق را جامه‌ی باطل می‌پوشند ، و گامی از حد خود نمائی و تظاهر به دانائی فراتر نمی‌نهند . و آنچه راهم می‌دانند جز در راه اغراض مادی پست بکار نمی‌برند ، و اگر بینند که کسی جستن حقیقت و برگزیدن راستی را و جهدی همت خود ساخته ، و در ترك دروغ و خودنمائی و مکر و حيله جهد و سعی دارد ، او را خوار می‌شمرند و تمسخر می‌کنند . و در هر حال خدا یاری دهنده و پناه همه است .

و چون خدای تعالی نعمت پیوستگی به آستان سرور بزرگ بیهمتا ، قاضی القضاات ، امام سیدابوطاهر^{۴۶} را ، که خداوند بزرگیش را همواره برقرار دارد و حسودان و دشمنانش را مقهور فرماید ، به من ارزانی داشت - و این پس از آن بود که از دیدن کسی چون او ، که در همدی فضایل عملی و نظری و در جمع بین موشکافی در علوم و پایداری در اعمال و خیرخواهی برای هر فردی از همنوعان خود کامل باشد ، مأیوس

(۴۵) در این باب مخصوصاً به ۶۰۴ و ۴۰۴ § مراجعه شود .

(۴۶) § ۴۰۱ و ۲ (الف) .

شده بودم - قلبم به دیدار او باز و نامم به مصاحبت او بزرگ شد ، و در پرتو انوار وی کارم بالا گرفت ، و به انعام و الطاف او پشتگرمی یافتم . پس ، برای نزدیکی جستن به مجلس بلندپایه‌ی او چاره جز آن ندیدم که ، با تلخیص زبده‌های حقایق فلسفی که راستی و درستی آنها را معلوم کرده بودم ، فرصتی را که سختیهای روزگار از من گرفته بود تلافی کنم ، و این کار را با تنظیم این اصناف از مقدمات جبری آغاز کردم - چو ریاضیات به تقدیم سزاوارتر است - و در این امر به ریسمان توفیق الاهی چنگ زدم ، و از او چشم امید دارم که مرا به ادامه‌ی این کار موفق بدارد تا نتیجه‌ی بحث خود و بحث پیشینیانم را در علومی که اهمّ از دیگر علوم است بدرستی تعیین کنم ، و در این امر به دستاویز محکم پروردگار که حافظ ما از خطاها است چنگ می‌زنم ، که البته اجابت دعا در دست او و در همه حال توکل بر اوست .

[۵۰۱ § تعریفات و اصطلاحات]

[۵۰۱۰۱ § جبر و مقابله -] یاری خدا و توفیق نیک وی ، گویم که فن جبر و مقابله فنی است علمی که موضوع آن عدد مطلق و مقادیر قابل سنجش است از آن جهت که مجهول اند ولی مرتبط با چیز معلومی هستند که بوسیله‌ی آن می‌توان آنها را استخراج کرد . و این چیز یا کمیتی است ، و یا رابطه‌ای که بستگی معلوم و مجهول منحصر بآن است ، و از بررسی و تحلیل مجهولات موضوع مسئله استنباط می‌شود .^۵

مطلوب علم جبر عوارضی است که به موضوع آن ، از آن جهت که - بشرح مذکور - موضوع آنست ، ملحق می‌شود . و کمال علم جبر آگاهی از طرق ریاضی است که بوسیله‌ی آنها نوع مذکور از استخراج مجهولات عددی یا هندسی فهمیده می‌شود .

[۵۰۱۰۲ § مقادیر -] و [مقصود از] مقادیر کمیتهای متصل است ، و آن -

(۵) عبارت متن (۱۰۱۰۱ §) مشتمل بر ضمائر چندی است که مراجع آنها آشکار نیست . ترجمه‌ی فوق ، تا حدی که ما می‌توانیم تشخیص دهیم ، با متن و با اصل مطلب ظاهراً نا مطابق نیست .

بنابر آنچه بالاجمال در قاطیغوریاس و بتفصیل در حکمت اولی مذکور است - چهار است: خط، سطح، جسم، و زمان. و جماعتی مکان را نوعی قسیم سطح در تحت جنس متصل می‌شمارند^{۵۰}، ولی بررسی دقیق بطلان این رأی را آشکار می‌سازد، و درست اینست که مکان سطحی است در حال خاصی، ولی تحقیق در این امر خارج از موضوع بحث ماست.

و عادهً زمان را در موضوعات مسائل جبر نمی‌آورند، ولی ذکر آن در این باب جایز است.

[§ ۵۰۱۰۳ به‌منظری اصطلاحات جبریهها^{۵۱}] - وعادت جبریهها اینست که در فن خود مجهولی را که می‌خواهند استخراج کنند شیء نامند، و حاصل ضرب آنرا در مثل خودش مال، و حاصل ضرب مال آنرا در آن [، یعنی در آن شیء]، کعب، و حاصل ضرب کعب آنرا در مثل آن [شیء] مال مال، و حاصل ضرب کعب آنرا در مال آن مال کعب، و حاصل ضرب کعب آنرا در مثل آن [کعب] کعب کعب، و بهمین قیاس تا هر مرتبه که پیش رویم.

و از کتاب اقلیدس در اصول[†] معلوم است که این مراتب جملگی متناسب‌اند، یعنی نسبت واحد به جذر مثل نسبت جذر به مال و مثل نسبت مال به کعب است. پس نسبت عدد به جذرها مثل نسبت جذرها است به مالها و مثل نسبت مالها است به کعب‌ها و مثل نسبت کعب‌ها است به مال مالها، و هکذا تا هر مرتبه که پیش رویم^{††}.

[§ ۵۰۱۰۴ مرتبه‌ی تعلیمی این رساله -] و باید دانست که این رساله را جز کسی که بر کتاب اقلیدس در اصول و کتاب وی در معطیات و دو مقاله‌ی [اول]

(۵۰) یعنی مکان را نوعی از جنس کم و در مرتبه‌ی سطح می‌شمارند.

(۵۱) رجوع شود به § ۳۰۶۰۴.

(†) تحریر اقلیدس، مقاله‌ی نهم.

(††) مقصود اینست که نسبت هر عدد به همان عده از جذرها مساوی نسبت عده‌ای از جذرها

است بهمان عده از مالها، و غیره. بعبارت امروزی

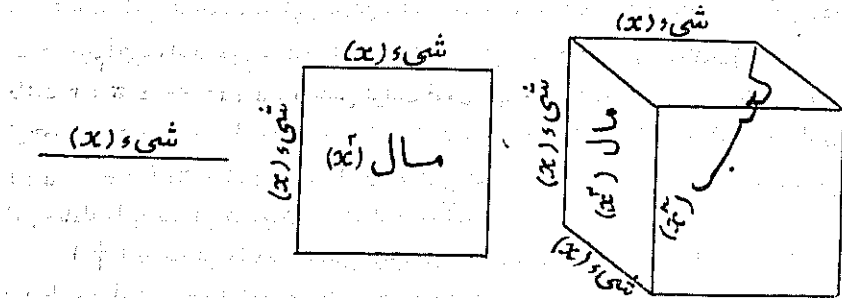
$a : ax = bx : bx^2 = cx^2 : cx^3 = \dots$

کتاب آپولوونیوس در مخروطات مسلط باشد نمی‌فهمد، و همانا کسی که از دانستن یکی ازین سه [کتاب] بازمانده راهی برای دانستن این رساله ندارد، و من این زحمت را بر خود هموار کرده‌ام که درین رساله جز بآن کتابهای سه‌گانه توسل نجویم. [۵۰۱۰۵ معادله -] و استخراج‌های [مجهولات به علم] جبر بوسیله‌ی معادله انجام پذیرد، و آن، بنا بر مشهور، معادله‌ی برخی ازین مراتب^{۴۶} است با بعضی از آنها. و هرگاه جبری مال مال را در مسائل مربوط به مقادیر هندسی بکار برد، البته این استعمال بر سبیل مجاز است، نه از راه حقیقت، زیرا وجود مال مال در مقادیر ممکن نیست، و آنچه در مقادیر پیش می‌آید، یا يك بعد است، و آن جذر یا - هرگاه نسبت به مربعش [، یعنی مربعی که این بعد ضلع آن باشد]، ملحوظ شود - ضلع است؛ و پس از آن دو بعد می‌آید، و آن سطح است، و مال در مقادیر سطح مربع است؛ و پس از آن سه بعد می‌آید، و آن جسم است، و مکعب در مقادیر همانا جسمی است که شش مربع بآن محیط باشند^{۴۷}؛ و چون بعد دیگری نیست،

(۴۶) مقصود عدد، شیء، مال، کعب، و غیره است.

معادلاتی که درین کتاب مورد بحث است، با اصطلاح امروز، يك مجهولی است، و هرگاه از معادله‌ای بین چند مرتبه صحبت شود، مقصود مراتب مربوط به يك مجهول (یعنی يك شیء) است که همان مجهول مسئله می‌باشد. بعلاوه خیام همواره ضریب جمله‌ی بالاترین درجه را واحد می‌گیرد، و در بیان صورت معادلات اغلب بذکر مراتب اکتفا می‌کند و متعرض ضرایب نمی‌شود، و مثلاً معادله‌ی $x^3 + ax^2 + bx = c$ را عبارت «کعبی و مالی و جذری معادل عددی است» بیان می‌کند. ما در ترجمه‌ی رسائل خیام از همین روش مسامحه‌آمیزی پیروی می‌کنیم، ولی برای رفع شبهه و احتراز از تکرار، توجه خواننده را بنکات مذکور درین حاشیه و در §§ ۳۰۶-۳۰۷ جلب می‌نمائیم.

(۴۷)



مال مال در مقادیر وارد نمی‌شود، چه رسد بمراتب بالاتر از آن، [و هر گاه مال مال در مقادیر گفته شود، این گفته در باب عدد اجزای مقدار است در صورت اندازه گیری، نه در باب خود آن مقدار که اندازه گیری شده است] ^۵، و این دو اطلاق متفاوتند. پس مال مال، نه بالذات و نه بالعرض، در مقادیر وارد نمی‌شود، و مانند زوج بودن و فرد بودن نیست، زیرا زوجیت و فردیت باعتبار عددی که اتصال مقادیر را منفصل می‌کند [احیاناً] عارض مقدار می‌شوند ^۶.

[۵۰۱۰۶ § خلاصه‌ی مندرجات و روش مؤلف درین رساله -] و آنچه

(۵) عبارت داخل [] را بعنوان ترجمه‌ی عبارت ذیل از متن خیام آورده‌ایم:

و اذا قيل مال المال في المقادير فانما يقال ذلك لعدد اجزائها عند المساحة لا لذواتها مسموحة .
ظاهراً مقصود خیام اینست که اگر از « مال مال » يك قطعه خط، یعنی قوه‌ی چهارم آن، صحبت شود، مقصود قوه‌ی چهارم عددی است که نماینده‌ی طول آن قطعه است نه قوه‌ی چهارم آن قطعه. مؤید این تفسیر سخن خیام است در رساله‌ی تحلیل (۶۰۴۰۲ §): « اطلاق الفاظ مال مال . . . بر مقادیر متصل از جهت اطلاق عدد بر این مقادیر است . . . بعلاوه، بر طبق اصطلاحات فلسفه‌ی قدیم، « کم متصل و منفصل یکدیگر را عارض شوند. اما عروض اتصال کم منفصل را سبب تجزیه‌ی واحد بود به اجزاء نامتناهی . . . ! و اما عروض انفصال کم متصل را سبب شمردن آن شود به احاد » . (رجوع شود به اساس الاقتباس، تهران ۱۳۲۶، ص ۴۲) .

ویکه (ظاهراً باستناد ۵۰۱۵۰۲ §)، در عبارت مورد بحث، جزء را بمعنی عکس مصطلح امروز گرفته، و در معنی عبارت مذکور چنین آورده است که « هر گاه گفته شود که مال مال جزء مقادیر قابل اندازه گیری است، این مطلب باعتبار مقدار عکس آنست که در مسائل اندازه گیری (= هندسی) بکار میرود. » (عین عبارت او در صفحه‌ی ۸ کتاب جبر عمر خیام: Et si l'on dit que le caré - carré fait partie des grandeurs mesurables, cela se dit par rapport à sa valeur réciproque employée dans les problèmes de mesure), و در توجیه این ترجمه، در ذیل همان صفحه گوید که اگر مثلاً مطلوب کره‌ای باشد که نسبت حجم آن به واحد حجم مساوی نسبت طول مفروض a به شعاع کره‌ی مطلوب (r) باشد، خواهیم داشت $3 : \pi :: 4 : a^3$ ، و بدین ترتیب قوه‌ی چهارم $r : 1$ در کار می‌آید. بنابراین آنچه گفتیم، ترجمه و توجیه ویکه بنظر ما بسیار مستبعد است، بخصوص که در مثال مذکور، معادله‌ی مسئله $r : a :: 3 : \pi r^3$ است، و بعد است که کسی که « مال مال » را در مقادیر غیر ممکن می‌شمارد این معادله را به صورتی که ویکه ساخته است در آورد.

(†) در نمایش مقادیر هندسی بوسیله‌ی اعداد، اگر احياناً عدد حاصل صحیح باشد، ناچار

فرد یا زوج است. رجوع شود به ذیل ^۵ همین صفحه.

ازین معادلات چهار گانه‌ی هندسی - یعنی اعداد مطلق و اضلاع و مربع‌ها و مکعب‌ها - در کتب جبرها آمده است سه معادله است بین عدد و اضلاع و مالها ^{۵۶} ، و اما ما بزودی راهپائی خواهیم آورد که بوسیله‌ی آنها می‌توان مجهول را از معادلات بین چهار مرتبه‌ای که گفتیم زاید بر آنها در مقادیر واقع نمی‌شود - یعنی عدد و شیء و مال و کعب - استخراج کرد.

و آنچه [ازین معادلات] که اثبات [طریق حل] آن بوسیله‌ی خواص دایره - یعنی بوسیله‌ی کتاب اقلیدس در اصول و در معطیات - ممکن است مبرهن خواهد کردید ، و منتهای کوشش در آسان کردن براهین خواهد شد . و آنچه اثباتش جز به خواص قطوع مخروطی ممکن نیست بوسیله‌ی دو مقالهی کتاب مخروطات مبرهن خواهد گشت ، و اما اثبات [حل] این اصناف وقتی موضوع مسئله عدد مطلق باشد ^{۵۷} - جز در سه مرتبه‌ی اول ، و آن [معادله‌ی بین] عدد و شیء و مال است [†] - بر ما و بر دیگر علمای جبر ممکن نشده است ، و شاید دیگران که بعد از ما آیند بر آن وقوف یابند . و من گاهی در مسائلی که می‌توان از کتاب اقلیدس برهان برای [حل] آنها آورد اشاره به براهین عددی می‌کنم . و باید دانست که وقتی موضوع مسئله عدد باشد ، نه مقادیر هندسی ، برهان هندسی راهها [ی حل معادلات] جای براهین عددی را نمی‌گیرد ، و شاهد برین مطلب اینست ^{††} که اقلیدس در مقالهی پنجم کتاب [اصول] خود برای احکامی در باب نسبتهای بین مقادیر برهان آورده ، و سپس عین همین احکام را در نسبتهای بین اعداد در مقالهی هفتم از نو ثابت کرده است .

(۵۶) مقصود سه معادله‌ی

$$x^2 + bx = a, \quad x^2 + a = bx, \quad x^2 = a + bx$$

است . خیام معادلات $x^2 = a + bx$ ، $x^2 + a = bx$ ، $x^2 + bx = a$ را که در آثار پیشین آمده از قلم انداخته ولی بعداً در طبقه بندی آورده است (§ ۵۰۲۰۲) .

(۵۷) یعنی حل عددی معادلات . در این باب به § ۴۰۲۰۱ نیز رجوع شود .

(†) یعنی معادلات درجه‌ی دوم .

(††) رجوع شود به § ۴۰۲۰۱ ، ص ۱۳۷

[۵۰۴ § طبقه بندی معادلات]

[۵۰۴۰۱ -] و معادلات بین این چهار [مرتبه \star] به مفردات و مقترنات تقسیم می شود $\star\star$.

[۵۰۴۰۲ § مفردات -] و مفردات شش صنف است $\star\star\star$:

(الف) عددی معادل جذری است ،

(ب) عددی معادل مالی است ،

(ج) عددی معادل کعبی است ،

(د) جذرهائی معادل مال است ،

(ه) مالیهائی معادل کعب است ،

(و) جذرهائی معادل کعب است .

و سه صنف ازین اصناف ششگانه در کتابهای جبرها مذکور است ، و آنان چنین گفته اند که نسبت شیء به مال مثل نسبت مال به کعب است \dagger . پس لازم می آید که معادله ی مال با کعب مثل معادله ی شیء با مال باشد . و نیز [گفته اند که] نسبت عدد به مال مثل نسبت جذر به کعب است $\dagger\dagger$. و این احکام را بطریق هندسی ثابت نکرده اند . و اما در معادله ی بین عدد و مکعب ، برای استخراج عددی ضلع مکعب راهی جز استقراء \times نداریم ، و اما حل هندسی [این صنف] جز باقطوع مخروطی

(\star) عدد ، شیء ، مال ، کعب .

($\star\star$) رجوع شود به $\S 30606$ و $\S 402$ و $\S 4030402$.

$$(1) \quad a = x \quad (د) \quad bx = x^2 \quad (\star\star\star)$$

$$(ب) \quad a = x^2 \quad (ه) \quad cx^2 = x^3$$

$$(ج) \quad a = x^3 \quad (و) \quad bx = x^3$$

(\dagger) یعنی $x : x^2 = x^2 : x^3$.

($\dagger\dagger$) مقصود اینست که $a : x^2 = ax : x^3$.

(\times) شاید مقصود تفحص در جدولی مشتمل بر مکعبات اعداد طبیعی باشد . و نیز رجوع

شود به ذیل $\dagger\dagger$ صفحه ی ۱۷۵ و $\star\star$ صفحه ی ۱۷۲ .

ممکن نیست. *
 [۵۰۲۰۴ § مقترنات سه تائی -] و اما مقترنات بعضی سه تائی و برخی چهار تائی است.

اما مقترنات سه تائی دوازده صنف است:

[۵۰۲۰۳۰۱ § مقترنات سه تائی درجه‌ی دوم -] سه صنف اول

مقترنات سه تائی عبارتست از: $\begin{cases} (الف) \\ (ب) \\ (ج) \end{cases}$

(الف) مالی و جذری معادل عددی است ،

(ب) مالی و عددی معادل جذری است ،

(ج) جذری و عددی معادل مالی است .

و این سه صنف در کتابهای علمای جبر مذکور و حل هندسی آنها مبرهن است ،

ولی برای حل عددی آنها برهانی نیآورده اند + .

[۵۰۲۰۳۰۲ § مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم قابل تحویل بدرجه‌ی

دوم -] و سه صنف دوم مقترنات سه تائی عبارتست از :

(الف) کعبی و مالی معادل جذری است ،

(ب) کعبی و جذری معادل مالی است ،

(ج) جذری و مالی معادل کعبی است ،

(۵) و آن در § ۵۰۶۰۵ آمده است .

(۵۵) حاجت بتذکار نیست که لفظ « درجه‌ی دوم » و امثال آن از جبر جدید بعاریت گرفته

شده است .

$$(۱) \quad x^2 + bx = a, \quad (ب) \quad x^2 + a = bx, \quad (۵۵۵)$$

$$(ج) \quad bx + a = x^2$$

(+) خیام هم باین مضمون اکتفا می کند که برهان عددی از تصور برهان هندسی فہمیده

می شود .

$$(۱) \quad x^2 + cx^2 = bx, \quad (ب) \quad x^2 + bx = cx^2, \quad (++)$$

$$(ج) \quad cx^2 + bx = x^2$$

و جبریه‌ها گفته‌اند که این سه صنف دوم هریک با نظیر خود از صنف اول^۵ متناسب است، یعنی معادله‌ی کعب و جذر با مال در حکم [معادله‌ی] مال و عدد با جذر است^{۵۵}، و هکذا در مورد سایرین. و این احکام را وقتی موضوع مسائل مقادیر هندسی باشد ثابت نکرده‌اند، و اما اگر موضوع مسائل عدد باشد، این احکام از کتاب اصول آشکار است، و من بزودی برای آنها برهان هندسی خواهم آورد.

[§ ۵۰۲۰۳۰۳] مقترنات سه تائی درجه‌ی سوم - اما شش معادله‌ی دیگر از اصناف دوازده گانه[†]:

(۱) کعبی و جذری معادل عددی است،

(ب) کعبی و عددی معادل جذری است،

(ج) عددی و جذری معادل کعبی است،

(د) کعبی و مالی معادل عددی است،

(ه) کعبی و عددی معادل مالی است،

(و) عددی و مالی معادل کعبی است.

و در باب این شش صنف در کتب جبریه‌ها سخنی نیست مگر کلامی ناقص در باب یکی از آنها^{††}، و من بزودی آنها را توضیح داده برهان [حل] هندسی - نه عددی - آنها را خواهم آورد، و برهان این شش صنف جز بوسیله‌ی خواص قطوع مخروطی ممکن نیست.

(*) مذکور در § ۵۰۲۰۳۰۱

(**) یعنی معادله‌ی $x^3 + bx = cx^2$ با معادله‌ی $x^2 + b = cx$ معادل است. البته

خیام از ریشه‌ی $x = 0$ بی‌خبر است.

(†) شش معادله‌ی درجه‌ی سوم مورد بحث عبارتند از

$$(۱) \quad x^3 + bx = a \quad (د) \quad x^3 + cx^2 = a$$

$$(ب) \quad x^3 + a = bx \quad (ه) \quad x^3 + a = cx^2$$

$$(ج) \quad a + bx = x^3 \quad (و) \quad a + cx^2 = x^3$$

(††) مقصود معادله‌ی $x^3 + a = cx^2$ است. رجوع شود به § ۵۰۷۰۶

[۵۰۲۰۴] § مقترنات چهارتائی -] و اما مقترنات چهارتائی بر دو قسم است .
 [۵۰۲۰۴۰۱] § مقترنات چهارتائی سه با يك -] یکی [از دو قسم مقترنات
 چهارتائی] ، که قسم اول باشد ، آنست که در آن سه مرتبه معادل يك مرتبه [ی دیگر]
 باشد ، و آن چهار صنف است [♠] :

- (ا) کعبی و مالی و جذری معادل عددی است ،
- (ب) کعبی و مالی و عددی معادل جذری است ،
- (ج) کعبی و جذری و عددی معادل مالی است ،
- (د) کعبی معادل جذری و مالی و عددی است .

[۵۰۲۰۴۰۲] § مقترنات چهارتائی دو با دو -] و قسم دوم آنست که در آن دو
 مرتبه معادل دو مرتبه [ی دیگر] باشد ، و آن سه صنف است ^{♠♠} :

- (ا) کعبی و مالی معادل جذری و عددی است ،
- (ب) کعبی و جذری معادل مالی و عددی است ،
- (ج) کعبی و عددی معادل جذری و مالی است .

[۵۰۲۰۴۰۳] § -] و اصناف هفتگانه‌ی چهارتائی همین‌ها است ، و ما را راهی به
 حل هیچیک جز بطریق هندسی نیست . و اما یکی از پیشینیان ما نیازمند نوعی از
 انواع یکی از اصناف شد [†] که بزودی آنرا خواهم گفت . و برهان [حل] این اصناف
 جز بوسیله‌ی خواص قطوع مخروطی انجام پذیر نیست .

$$(۱) \quad x^2 + cx^2 + bx = a \quad (♠)$$

$$(ب) \quad x^2 + cx^2 + a = bx$$

$$(ج) \quad x^2 + bx + a = cx^2$$

$$(د) \quad x^2 = bx + cx^2 + a$$

$$(۱) \quad x^2 + cx^2 = bx + a \quad (♠♠)$$

$$(ب) \quad x^2 + bx = cx^2 + a$$

$$(ج) \quad x^2 + a = bx + cx^2$$

(†) مقصود معادله‌ی $x^2 + bx + a = cx^2$ است . رجوع شود به §§ ۵۰۸۰۴-۵۰۸۰۴۰۱ .

[§ ۵۰۲۰۵] و من بزودی يك يك این اصناف بیست و پنجگانه ^۵ را می‌آورم و [راه حل] هر يك را ثابت میکنم ، و درین كار از خداوند یاری میجویم ، چو وی هر کس را که خالصانه با تو کل کند هدایت و از دیگران مستغنی میفرماید .

[§ ۵۰۳ حل مفردات ^{۵۵}]

[§ ۵۰۳۰۱] صنف اول مفردات آنست که جذری [†] معادل عددی باشد . پس جذر ناچار معلوم است ، و حکم این [معادله] در اعداد و در مقادیر هندسی یکسان باشد .

[§ ۵۰۳۰۲] صنف دوم آنست که عددی معادل مالی باشد . پس مال از جنبه‌ی عددی معلوم است ، زیرا معادل عدد معلوم است ، و برای دانستن جذر آن راه عددی نداریم جز استقراء ^{††}؛ زیرا آنکس که میداند جذر بیست و پنج پنج است ، البته این مطلب را از همین طریق میداند نه بر طبق قانونی [از علم حساب یا جبر] . پس توجهی بگفتی کسانی از جبریها که درین باب با ما اختلاف نظر دارند نمیکنیم . و هندیان را در استخراج جذر و کعب طریقه‌ایست مبتنی بر اندک استقراء ، و آن شناسائی مربعات اعداد نه گانه - یعنی مربع يك و دو و سه [. . . تا نه] - و نیز حاصل ضرب بعضی در بعضی است - یعنی حاصل ضرب دو در سه و امثال آن . و ما را کتابی است دربراهین درستی این راهها و منجر شدن آنها به مطلوب ، و ما انواع این طریقه‌ها را افزون کرده‌ایم - یعنی استخراج مال مال و مال کعب و کعب کعب ^x و غیره

(۵) شش صنف مفردات ، دوازده صنف مقترنات سه تائی ، و هفت صنف مقترنات چهار تائی ؛

یعنی همه‌ی معادلات درجات اول و دوم و سوم ، جز آنهایی که درین صورت مندرجند :

$$dx^2 + cx^2 + bx + a = 0 \quad (a, b, c, d \geq 0).$$

نیز رجوع شود به § ۴۰۳۰۴ و ۴۰۳۰۵ (ص ۱۴۵ - ۱۴۶) .

(۵۵) رجوع شود به § ۵۰۲۰۱ و § ۴۰۳۰۴ و ۴۰۳۰۵ (ص ۱۴۵) .

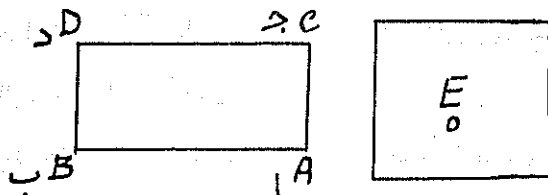
(†) برای استعمال جذر باین معنی رجوع شود به § ۳۰۶۰۴ (ص ۱۱۲) .

(††) رجوع شود به ذیل X صفحه‌ی ۱۶۶ .

(X) مقصود استخراج ریشه‌های چهارم پنجم و ششم است ، و غیره . نیز رجوع شود به

§ ۴۰۱۰۲ (ص ۱۳۲) .

را بر آنها افزوده‌ایم ، و این اضافات تازه است - و این براهین [که بآنها اشاره شد] براهینی عددی و مبتنی بر قسمت‌های مربوط به علم حساب در کتاب اسطقسات[⊛] است . و برهان هندسی [حل] صنف دوم چنین است . خط AB را مفروض و مساوی عدد مفروض و AC را واحد و عمود بر AB قرار می‌دهیم ، و مستطیل AD [⊞] را تمام



می‌کنیم . پس معلوم است که مساحت مستطیل AD مساوی عدد مفروض است . سپس - بنا بر آنچه اقلیدس در شکل چهاردهم از مقاله‌ی دوم کتاب خود ثابت کرده - سطحی بشکل مربع [که مساحت آن] مساوی مستطیل AD [باشد] می‌سازیم ، و آن مربع E است . پس مربع E مساوی عدد مفروض و لہذا معلوم است ، و بالتیجه ضلع آن نیز معلوم می‌باشد (در برهانی که اقلیدس در شکل مذکور آورده تأمل کنید) ، و این همان است که می‌خواستیم[†] .

[§ ۵۰۳۰۴ تعریف] و هر وقت درین رساله گوئیم که عددی مساوی سطحی است ، در چنین موردی ، مقصود ما از عدد سطحی است [چهار ضلعی] که زوایای آن قائمه باشند ، و یکی از دو ضلع [مجاور] آن واحد باشد ، و دیگری از حیث اندازه مساوی

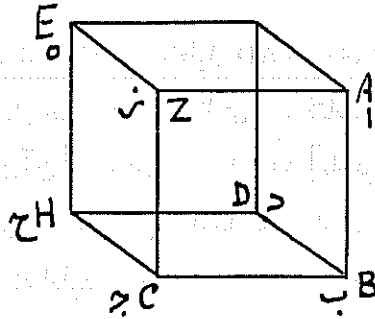
(⊛) لفظ اسطقسات یا اسطقس معرب لفظ یونانی ستویخیون و بمعنی اصل است ، و عناصر اربعه را اسطقسات گویند . مقصود از کتاب اسطقسات در متن همان کتاب اصول اقلیدس در هندسه است . در باب تسمیه‌ی کتاب هندسه‌ی اقلیدس باین اسامی می‌توان به کتاب هیث (سیزده مقاله ، جلد ۱ ، ص ۱۱۶) رجوع کرد .

(⊞) مقصود مستطیل $ABCD$ است . خیام اغلب مستطیلهای و مکعب مستطیلهای را با دو رأس مقابل و گاهی فقط با یکی از رؤوس نام می‌برد . مثلاً رجوع شود به § ۵۰۶۰۴ .
 (†) خلاصه‌ی مطلب اینکه برای حل معادله‌ی $x^2 = a$ مستطیل $ABCD$ را با $AB = a$ و $AC = 1$ ساخته مربع E را معادل این مستطیل می‌سازیم . ضلع مربع E مساوی x است .

عدد مفروض باشد، بطوری که هر يك از اجزای اندازه‌ی آن مساوی ضلع دوم (یعنی آنکه واحد فرض کردیم) باشد.

[§۵۰۳۰۴] صنف سوم آنست که عددی معادل مکعبی باشد. پس اگر موضوع مسئله عدد باشد ⊛ ، مکعب [آن عدد] معلومست، و برای استخراج ضلع آن [مکعب] راهی جز استقراء ⊛ نداریم، و چنانکه قبلاً گفتیم، در جمیع مراتب عددی از [قبیل] مال مال و مال کعب و کعب کعب حال همین است.

و اما بطریق هندسی، مربع AD را مربع واحد قرار میدهیم، یعنی AB را



مساوی BD بگیریم و هر يك را [مساوی] واحد فرض میکنیم. سپس - بنا بر آنچه اقلیدس در [شکل دوازدهم از] مقاله‌ی یازدهم کتاب خود ثابت کرده - از نقطه‌ی B از سطح عمود BC را رین سطح اخراج میکنیم، و آنرا مساوی عدد مفروض بگیریم، و مکعب مستطیل ABCDEZH را تمام میکنیم. پس معلوم است که حجم ⊕ این جسم مساوی عدد مفروض است. اینک مکعبی میسازیم که [از حیث حجم] مساوی این جسم باشد. چون ساختن این مکعب جز بخواص قطوع مخروطی انجام پذیر نیست، آنرا

(⊛) یعنی برای حل عددی معادله‌ی $x^3 = a$.

(⊛⊛) رجوع شود به ذیل X صفحه‌ی ۱۶۶.

(⊕) خیام در مورد اندازه‌ی حجم نیز لفظ مساحت بکار میبرد، ولی ما لفظ مصطلح حجم

را برگزیدیم.

موکول میکنیم بوقتی که مقدمات کار را آورده باشیم \star . در این مورد \star در چینی [§ ۵۰۳۰۵] تعریف - و هروقت گوئیم عددی مساوی مجسمی است، در چنین موردی، مقصود ما از عدد جسمی است که اضلاعش موازی و زوایایش قائمه $\star\star$ و قاعده‌اش مربع واحد و ارتفاعش مساوی عدد مفروض باشد.

[§ ۵۰۳۰۶] و صنف چهارم [مانند] آنست که مالی معادل پنج برابر جذرش باشد \dagger .

پس عده‌ی جذرها همان جذر مال است، و برهان عددی آن اینست که [از یک طرف همواره] جذر چون در مثل خودش ضرب شود مال حاصل گردد، و [از طرف دیگر، در مسئله‌ی مورد بحث]، این [جذر مطلوب] جذری است که چون در پنج ضرب شود مال حاصل گردد. پس این [جذر مطلوب] پنج است. و برهان هندسی آن - چون مربعی معادل پنج برابر ضلع آن بگیریم - شبیه همین [برهان عددی] است.

[§ ۵۰۳۰۷] صنف پنجم آنست که اشیائی معادل کعب باشد.

پس در مسائل عددی و واضحست که [این معادله] در حکم آنست که عددی معادل مالی باشد. مثلاً اگر گفته شود که چهار جذر معادل کعب است، بنابر تناسب مذکور $\dagger\dagger$ ، مانند آنست که گویند چهار عدد معادل مالی است.

اما بطریق هندسی، مکعبی مانند ABCDE میگیریم که حجمش چهار برابر یکی از اضلاعش باشد، و AB ضلع آن باشد. پس ضلع AB ازین مکعب، چون در چهار ضرب شود، مکعب ABCDE حاصل میگردد، و از طرف دیگر، ضلع این مکعب

(\star) رجوع شود به § ۵۰۶۰۵.

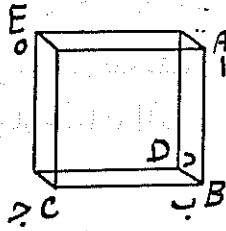
($\star\star$) مقصود جسمی است بشکل مکعب مستطیل.

(\dagger) در حل معادله‌ی $bx = x^2 - x^2$ که در آن x^2 مال، x جذر مال، و b عددی جذرهاست - خیام فقط جواب $x = b$ را می‌دهد. استدلال وی اینست که اولاً همواره $x \cdot x = x^2$ ، و ثانیاً در معادله‌ی مورد بحث $x^2 = b \cdot x$ ؛ پس $x \cdot x = x \cdot b$ (خیام این مرحله را ذکر نمی‌کند)؛

بالتیجه $x = b$.

($\dagger\dagger$) $x : x^2 = x^2 : x^2$

چون در مربع خود، یعنی در مربع AC ، ضرب شود همان مکعب حاصل میشود. پس مربع AC [مساوی] چهار است.



[§ ۵۰۳۰۸] و صنف هشتم آنست که مالهایی معادل کعب باشد.

و آن در حکم اینست که عددی معادل جذر باشد. برهان عددی آن اینست که، بنا بر آنچه در مقالهی هشتم اصول ثابت شده، نسبت عدد به جذر مثل نسبت مال است به کعب.

و اما بطریق هندسی، مکعب $ABCDE$ را معادل عددهای از مالهای \square آن، مثلاً معادل دو مال، و مربع ضلع آن را AC میگیریم. پس سطح AC چون در دو ضرب شود مکعب $ABCDE$ حاصل گردد، و از طرف دیگر، همین سطح چون در BD که ضلع مکعب است ضرب شود مکعب $ABCDE$ حاصل میشود. پس BD که ضلع مکعب است مساوی دو است، و مطلوب همین بود $\square\square$.

[§ ۵۰۳۰۸۰۱ تعریف] و هر جا در این رساله لفظ مالهای مکعب آوریم مقصود مربعهای اضلاع مکعب است.

[§ ۵۰۴] معادلات سه جمله‌ای درجه‌ی دوم

[§ ۵۰۴۰۱] اینک که مفردات را آوریم به سه صنف اول از اصناف

(۵) مال، يك مکعب یعنی مربع ضلع آن، یا وسعت یکی از وجوهش. رجوع شود

به § ۵۰۳۰۸۰۱

(۵۵) اگر S سطح مربع AC و V حجم مکعب مورد بحث باشد، بموجب فرض مسئله

$V = 2S$ و بموجب دستور حجم مکعب $V = S \cdot BD$ پس $S \cdot BD = 2S$ ، و لهذا $BD (=x) = 2$.

دوازده گانه \square میپردازیم.

[§ ۵۰۴۰۲ -] و صنف اول از آنها [مانند] آنست که مالی و ده جذرمعادل سی و نه عدد باشد \square .

پس [برای حل آن] نصف [عدهی] جذرها را در مثل آن ضرب کن، و حاصل را بر عدد بیضا، و از جذر حاصل جمع نصف عدهی جذرها را کم کن. باقیمانده همان جذر مال است \dagger .

اگر مسئله عددی باشد [برای امکان آن] این دو شرط باید برقرار باشد $\dagger\dagger$: یکی از آنها اینکه عدهی جذرها عدد زوجی باشد تا نصف داشته باشد، و دوم اینکه مجموع مربع نصف [عدهی] جذرها با عدد مربع [کامل] باشد، و الا مسئله از جنبه‌ی عددی غیر ممکن است.

اما از جنبه‌ی هندسی هیچیک از مسائل این صنف ممتنع نیست. و چون برهان هندسی [حل] این صنف صورت پذیرد برهان آن از جنبه‌ی عددی

§ ۵۰۲۰۳۰۱ (۵)

(۵۵) همان معادله‌ی خودارزمی است (§ ۳۰۶۰۷). طریق حل خیام در مورد معادله‌ی $x^2 + bx = a$ فرض کنیم. فرض کنیم $AB = AD = x$, $DE = b$, $EZ = ZD = b/2$. سطح EB مساوی $x^2 + bx$ است که بموجب معادله مساوی a است. اما بموجب شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول، $EA \cdot AD + DZ^2 = ZA^2$. پس بترتیب

$$a + (b/2)^2 = ZA^2 = (ZD + DA)^2 = (b/2 + x)^2,$$

$$\sqrt{a + (b/2)^2} = (b/2) + x,$$

$$x = \sqrt{(a + b/2)^2} - (b/2).$$

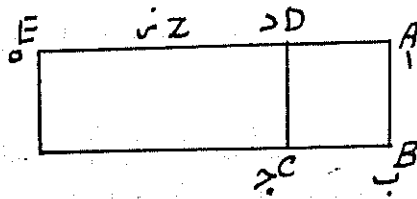
(\dagger) صورت معادله $x^2 + bx = a$ و جوابی که خیام می‌دهد اینست:

$$x = \sqrt{a + (b/2)^2} - (b/2)$$

($\dagger\dagger$) رجوع شود به § ۴۰۲۰۱ و § ۴۰۳۰۴۰۳. چنانکه ویکه تذکر می‌دهد (جبر عمر خیام، ذیل صفحه‌ی ۱۸) هیچیک از این دو شرط برای صحیح بودن x لازم نیست، چه اگر σ عددی اصم و مثبت و α عددی صحیح و مثبت و کمتر از σ باشد، باز $a = \sigma\alpha$ و $b = \sigma - \alpha$ معادله‌ی $x^2 + (\sigma - \alpha)x = \alpha\sigma$ حاصل می‌شود که دارای جواب مثبت و صحیح α است، و حال آنکه نالبداهه $\alpha - \sigma$ زوج نیست، و مبین مجذور کامل نیست (زیرا جذرش اصم است).

آسان خواهد بود، و برهان هندسی آن چنین است.

فرض میکنیم مربع AC با ده جذر آن معادل سی ونه عدد باشد، و سطح CE [مساوی] ده جذر آن باشد. پس خط DE ده خواهد بود. و این خط را در Z نصف میکنیم. حال چون خط DE در Z نصف شده و AD در امتداد آن بر آن افزوده شده،



[بنابر شکل ششم مقالای دوم اصول، حاصل ضرب EA در AD ، که مساوی سطح EB است، بعلاوهی مربع DZ مساوی مربع ZA است. اما مربع DZ که مساوی نصف [عددی] جذرها است معلومست، و سطح BE که عدد مفروض است معلوم میباشد. پس مربع AZ معلوم و [بالتیجه] خط AZ معلوم است، و چون ZD از آن کاسته شود، باقیمانده، که AD باشد، معلوم خواهد بود.

[§۵۰۴۰۴۰۱ طریق دیگر] و این صنف را برهان دیگری است * $ABCD$.

را مربع فرض میکنیم، و BA را تا E امتداد میدهیم، و EA را مساوی ربع [عددی] جذرها میگیریم، و آن دو و نیم است. و DA را تا Z امتداد میدهیم، و ZA را مساوی ربع عدوی جذرها میگیریم، و همچنین، از جمیع زوایای مربع خطوطی بهمین وصف

(۲) این طریقه در حل معادلهی $x^2 + bx = a$ اساساً همان طریقهی خوارزمی (§۳۰۶۰۷)

و مبتنی بر «مجذور کامل کردن $x^2 + bx$ » است. اگر فرض کنیم $EA = AB = BC = x$ ، خواهیم داشت $EZ = (b/4)^2$ و $EZ = (b/2)^2$ ، $ZB = (b/4)x$ و $ZB = bx$. چون بفرض $x^2 + bx = a$ ، نتیجه می شود،

$$HT = AB^2 + \epsilon EZ + \epsilon ZB = x^2 + bx + (b/2)^2 = a + (b/2)^2$$

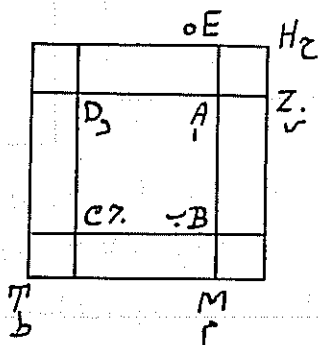
$$\text{پس } EM = \sqrt{a + (b/2)^2} \text{ و}$$

$$x = EM - \epsilon EA = \sqrt{a + (b/2)^2} - (b/2).$$

فهرهالمطلوب. باید دانست که در شکل، سطح مربع وسط باشافدی چهار مستطیل اطراف

مساوی $x^2 + bx$ است، که با افزودن چهار مربع کوچک «مجذور کامل» می شود.

اخراج میکنیم، و سطح HT را تمام میکنیم. این سطح مربع است، زیرا بنا بر آنچه در [اشکال بیست و سوم و بیست و چهارم] مقاله‌ی ششم اصول ثابت شده، ZE مربع است و AC مربع است و CT مربع است. و چون هر یک از مربعات چهار گانه، که در گوشه-

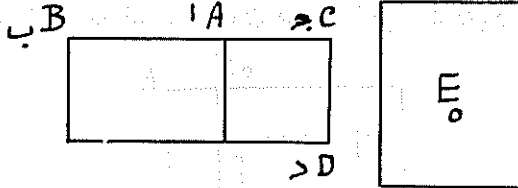


های مربع بزرگ جا دارد، مربع دو و نیم است، مجموع آنها بیست و پنج میباشد، که مربع نصف [عده‌ی] جذرها است. اما سطح ZB [مساوی] دو جذر مربع AC و نصف جذر آنست، زیرا ZA دو و نیم است. پس سطوح چهار گانه [، یعنی چهار مستطیل ZB و غیره، مساوی] ده جذر مربع AC است. اما مربع AC با ده جذرش [مساوی] سی و نه عدد فرض شده بود. پس مربع HT شصت و چهار است، و چون جذر آنرا بگیریم و از حاصل پنج بکاهیم AB میماند.

[§ ۵۰۴۰۳۰۲] تبصره -] و اما اگر خط AB مساوی ده فرض شود، و مربعی بخواهیم که حاصل جمع آن بعلاوه‌ی حاصل ضرب ضلعش در AB مساوی عدد مفروضی باشد، بطریق‌ی که [در § ۵۰۳۰۳] گذشت، عدد مفروض را مساوی سطح E قرار میدهیم، و آن متوازی‌الاضلاعی است که زوایایش قائمه‌اند. و بنا بر آنچه اقلیدس در مقاله‌ی ششم اصول ثابت کرده است^۵، برخط AB متوازی‌الاضلاعی مساوی سطح E اضافه میکنیم که مازاد آن بر سطح مضاف بر تمام خط AB مربع باشد. فرض کنیم

(۵) § ۳۰۲۰۳۰۱. خوانندگان توجه فرمایند که متاسفانه در متن جبر خیام در کتاب حاضر در درج شکل مربوط باین مسئله اشتباهی روی داده، بدین معنی که شکل پایین صفحه‌ی ۱۶ متعلق به اول صفحه‌ی ۱۸ است و بالعکس.

BD این سطح باشد. بنا بر آنچه در [شکل ششم] معطیات آمده است، مربع زاید AD و ضلع آن AC معلوم است [فهو المطلوب].



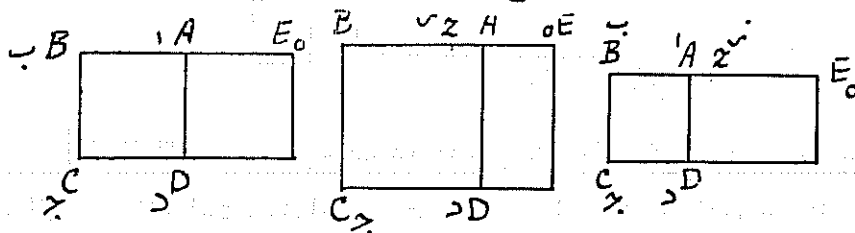
[§۵۰۴۰۳] و صنف دوم از آنها آنست که مالی و عددی معادل جذری باشد. درین صنف باید عدد بزرگتر از مربع نصف [عددی] جذرها نباشد، والا مسئله غیر ممکن است. و اگر عدد مساوی مربع نصف [عددی] جذرها باشد، نصف [عددی] جذرها همان جذر مال است. و اگر عدد کمتر از مربع نصف [عددی] جذرها باشد، عدد را از مربع نصف [عددی] جذرها کم میکنیم، و جذر باقیمانده را میگیریم، و حاصل را به نصف [عددی] جذرها میافزائیم یا از آن کم میکنیم. حاصل جمع و باقیمانده‌ی تقریب جذر مال است. *

و برهان عددی آن از تصور برهان هندسی آن صورت گیرد، و برهان هندسی آن اینست: [§۵۰۴۰۴] مربع ABCD را میکشیم، و مستطیل ED را، مساوی عدد، پهلو AD قرار میدهیم. پس مستطیل EC مثلا معادل ده [برابر] ضلع مربع AC[†] است. بالنتیجه EB مساوی ده خواهد بود. فرض کنیم در [شکل] اول AB نصف EB، و در

(*) معادله‌ی مورد بحث بصورت $x^2 + a = bx$ است. خیام می‌گوید ازاء $(b/2)^2 > a$ مسئله ممنوع است. بازاء $a = (b/2)^2$ جواب $x = b/2$ و بازاء $(b/2)^2 < a$ دو جواب $x = b/2 \pm \sqrt{(b/2)^2 - a}$ را می‌دهد.

(***) پس $ED = a$ و $AB = AD = x$ (***). چون $CE = x^2 + a = bx$ ، و چون $x = AB = b/2$ خواهیم داشت $AB = AE$ اگر $BE = b$ ، $CE = BE$ ، $BC = BE$ ، $x = AB = b/2$ در دو حالت دیگر فرض کنیم Z وسط BE باشد. بموجب شکل ششم مقاله‌ی دوم اصول، $\sqrt{(b/2)^2 - a}$ و $AZ^2 = BZ^2 - EA$ ، پس $EA = AB + AZ^2 = BZ^2 = AZ^2$ ، چون AZ را از BZ (یعنی $b/2$) کم کنیم یا بر آن بیفزائیم جوابهای معادله بدست می‌آید. خوارزمی فقط در مورد یکی از جوابها حکم را ثابت می‌کند (§۳۰۶۰۷).
(†) خیام بازاء $b = 10$ استدلال می‌کند. با مثال خوارزمی مقایسه کنید (§۳۰۶۰۷).

دومی بزرگتر از نصف آن، و درسومی کمتر از نصف آن باشد. پس در اولی AB مساوی پنج است، و در دومی، و نیز در سومی، EB را در Z نصف می‌کنیم. چون EB در Z نصف و در A بدو قسمت غیر مساوی تقسیم شده، بنا بر آنچه در [شکل ششم] مقاله‌ی دوم اصول ثابت شده است، حاصل ضرب EA در AB بعلاوه‌ی مربع ZA مساوی مربع ZB است. اما حاصل ضرب EA در AB همان عدد است، و آن معلوم می‌باشد. و چون [این حاصل ضرب] از مربع ZB که خودش مساوی نصف [عده‌ی] جذرهاست



کاسته شود، مربع ZA که باقی می‌ماند معلوم خواهد بود، و اگر ZA را در شکل سوم از ZB کم کنیم و در دومی بر آن بیفزائیم، باقیمانده یا حاصل جمع مساوی AB خواهد بود، و منظور همین بود. و اگر کسی بخواهد میتواند [حل] مسئله را به راه‌های دیگر ثابت کند، ولی ما از ترس اینکه سخن دراز شود به همین طریق اقتصار می‌کنیم.

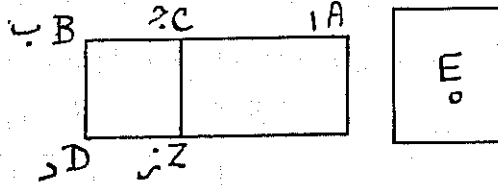
[۵۰۴۰۳۰۱ § تبصره -] اما اگر خط AB مثلاً فرض شود، و بخواهیم خطی از آن جدا کنیم که حاصل ضرب AB در این خط مساوی باشد با مربع این خط بعلاوه‌ی سطح دیگری که بزرگتر از مربع نصف AB نباشد^۴ - یعنی [بعلاوه‌ی] عدد مفروض که [با] مستطیل E [نمایش داده شده] است. پس می‌خواهیم از AB خطی جدا کنیم که مربع آن با سطح E مساوی حاصل ضرب AB در این خط باشد. پس بر خط AB، که معلوم است، مستطیلی مساوی سطح E، که معلوم است، اضافه می‌کنیم^۵ که نقصان آن نسبت به سطح مضاف بر تمام خط [AB] مربع باشد،

(۵) مقصود اینست که فرض $AB = b$ و $E = a$ و $a < (b/2)^2$ ، می‌خواهیم BC را

چنان تعیین کنیم که $AB \cdot BC = \overline{BC}^2 + a$.

(۶) رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۱، و نیز به ذیل صفحه‌ی ۱۷۷.

و چون سطح E بزرگتر از مربع نصف AB نیست، این امر، بنا بر آنچه اقلیدس در مقاله‌ی ششم اصول ثابت کرده [§] ممکن است. فرض کنیم سطح مذکور AZ باشد، و مربع ناقص^۵ CD باشد در این صورت، بنا بر آنچه در [شکل پنجاه و نهم] معطیات ثابت شده، ضلع CB معلوم است، و این همان است که میخواستیم ثابت کنیم.



[§ ۵۰۴۰۳۰۲] پس معلوم شد که این صنف را حالتی است ^{§§}، و بعضی مسائل آن ممتنع است، و شرایط صحت آنرا در مسائل عددی از آنچه در صنف اول آوردیم توانی دانست [†].

[§ ۵۰۴۰۴] و صنف سوم آنست که عددی و جذری معادل مال باشد. مربع نصف [عددی] جذرها را بر عدد افزوده جذر حاصل جمع را گرفته بر نصف عددی جذرها اضافه میکنند. آنچه حاصل شود جذر مال است ^{††}.

(۵) شکل ۲۸. رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۱.

(§§) مقصود سه حالت $a > (b/2)^2$ و $a = (b/2)^2$ و $a < (b/2)^2$ است. در حالت

اول بقول خیام معادله ممتنع است.

(†) مقصود از « شرایط صحت » شرایط امکان است، و منظور خیام شرایط تحمیلی اوست برای صحیح بودن جوابها. در اینجا یکی از دو جواب ممکن است عدد صحیح باشد بدون اینکه هیچیک از دو شرط خیام (زوج بودن b و مجذور کامل بودن $a - (b/2)^2$) برقرار باشد. و برای اینکه هر دو جواب هم صحیح باشند زوج بودن b لازم نیست، و در باب شرط دوم آنچه لازم است اینست که $a - (b/2)^2$ بصورت $(p/2)^2$ (p صحیح است) باشد. مثال حالت اول معادله $x^2 + \sigma\alpha = x^2 + (\alpha + \beta)x$ است که در آن α صحیح و σ اصم است؛ مثال حالت دوم معادله $x^2 + \alpha\beta = x^2 + (\alpha + \beta)x$ است که در آن α زوج و β فرد می‌باشد.

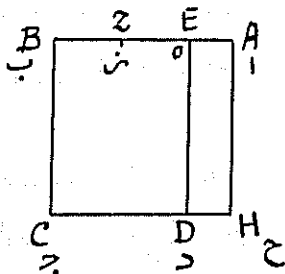
(††) $a + bx = x^2$ ، و

$$x = (b/2) + \sqrt{a + (b/2)^2}$$

خیام در مورد معادله $x^2 = 5x + 6$ استدلال می‌کند. با استدلال خوارزمی در مورد معادله‌ی

$$x^2 = 3x + 4 \quad (\S 30607) \text{ مقایسه کنید.}$$

برهان آن . فرض میکنیم مربع $ABCH$ معادل پنج جذر آن و شش عدد باشد . چون عدد را که [با] سطح AD [نمایش داده شده] است از آن کم کنیم ، سطح EC



میمانند که مساوی [جمله‌ی] عددهی جذرها \square است ، و آن [عده] پنج است . پس خط EB پنج است . آنرا در Z نصف میکنیم . چون خط EB در Z نصف شده ، و EA در

(۵) در بقیه‌ی این مطالب در جبر خیام و نیز در فصل ۱۰۵ آن کتاب ، در استعمال مبهم لفظ عده (گاهی بمعنی ضریب و گاهی بمعنی جمله‌ی معادله) ، نمونه‌ای از درماندگی جبر لفظی (۳۰۱۰۲ § ، ص ۷۸) و جبریهائی که در این علم در مرحله‌ی لفظی وامانده‌اند دیده می‌شود . خیام در نامیدن m و mx و mx^2 ، خاصه در مواردی که پای هر سه درکار است ، بسختی می‌افتد . گاهی m و زمانی mx را عددهی جذرها (یا عددهی اضلاع) می‌خواند ، و در جایی که قبلاً از mx^2 صحبت کرده ، و سپس می‌خواهد بگوید که فلان چیز مساوی mx است که با همان ضریب و از همان مجهول ساخته شده ، می‌گوید «مساوی همان عده از جذرها است که برای مالها فرض شده بود» . اینک نمونه‌هایی از این استعمال مبهم :

(I) ص ۱۸ ، سطر آخر: عدده‌الاجذار بمعنی ضریب جمله‌ی درج‌دی اول معادله یعنی b در bx ، ولی در لعدده‌اضلاعه ، مراد از «عدده‌اضلاع» bx است .

(II) ص ۱۹

سطر دوم : عدده‌الاضلاع یعنی b (در bx) :

سطر هشتم : عدده‌الاموال یعنی c (در cx^2) :

سطر آخر : عدده‌الاموال یعنی cx^2 .

(III) ص ۲۰

سطور ۱ و ۲ : عدده‌الاجذار و عدده‌الاضلاع یعنی bx :

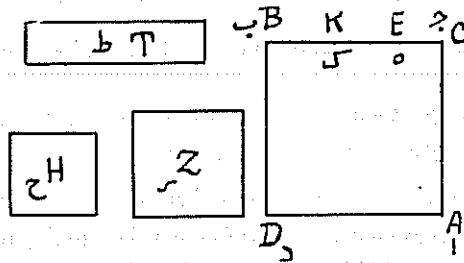
سطر ۳ : عدده‌امواله (المفروضه) یعنی cx^2 :

سطور ۶-۷ . عبارت «... حالذی هو عدده‌اجذاره التي فرضت للاموال» ، یعنی دحا

بقیه‌ی در ذیل صفحه‌ی بعد

امتداد آن بر آن افزوده شده، [بنابر شکل ششم مقالده‌ی دوم اصول،] حاصل ضرب BA در AE، که مساوی سطح معلوم AD است، بعلاوه‌ی مربع EZ، که معلوم است، مساوی مربع ZA است. پس مربع ZA معلوم و ZA معلوم و ZB معلوم است. پس AB معلوم است. و [حل] این صنف را براهین دیگر نیز هست، زنی بد آنکه گفته شد دل خوش دار.

[۵۰۴۰۴۰۱ § تبصره -] و اما اگر BE که عدده‌ی \square جذرها است مفروض باشد و مربعی و ضلع آن مطلوب باشد چنانکه آن مربع مساوی [جمله‌ی] عدده‌ی اضلاع خود بعلاوه‌ی عدد مفروضی باشد، فرض میکنیم عدد مفروض [با] مستطیل



T [نمایش داده شده] باشد، و مربع مساوی آن H باشد، و مربعی میسازیم مساوی مجموع مربع H و مربع EK - که EK نصف عدده‌ی اضلاع است - و فرض میکنیم

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

مساوی x است، که در آن c عدده‌ی (= ضرب) مفروض مالها است. و هکذا در سطور ۷ (از دو کلمه‌ی آخر) - ۸.

مترجم در چنین موارد وظیفه‌ای بس دشوار دارد. اگر اصطلاحات امروزی را بکار برد کار خیام و دشواریها و نقائص آنرا معرفی نکرده، و اگر به ترجمه‌ی تحت‌اللفظی اکتفا کند، مطلب بر خواننده نا مفهوم و احیاناً موجب گمراهی خواهد بود. راهی که ما در این مورد برگزیده‌ایم همان روش عمومی است که در این ترجمه اتخاذ شده، یعنی منحرف نشدن از کتاب خیام و جان کلام وی. منتهی، در موردی که فعلاً مورد بحث است، هر جا « عدده‌ی . . . » بمعنی تمام جمله‌ی معادله بکار رفته لفظ جمله را در داخل علامت [] اضافه کرده‌ایم، و در جایی که « عدده » بمعنی ضرب استعمال شده آنرا بهمان حال گذاشته‌ایم، و بالاخره هر جا این تدابیر را برای فهمانیدن مطلب کافی ندیده‌ایم، در ذیل صفحه توضیحات اضافی آورده‌ایم.

(۵) رجوع کنید به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱.

Z این مربع باشد، و KC را مساوی ضلع Z جدا میکنیم، و مربع ABCD را تمام میکنیم. مربع ABCD همان مطلوب است. *

[§ ۵۰۴۰۵ -] پس معلوم شد که هیچیک از مسائل صنف سوم ممتنع نیست، و در صنف اول نیز حال همین است. و اما صنف دوم بعضی مسائل ممتنع دارد، و این صنف دارای حالات مختلف است، ولی دو صنف دیگر چنین نیست.

[§ ۵۰۵] مقترنات سه تایی درجه‌ی سوم قابل تجویل بدرجه‌ی دوم **

[§ ۵۰۵۰۱] و اما برهان اینکه سه صنف دوم ** از این اصناف سه تایی دوازده گانه با سه صنف اول † متناسبند.

[§ ۵۰۵۰۲] صنف اول از آنها اینست که مکعبی و ماله‌ها معادل جذر باشد †
مکعب ABCDE را فرض میکنیم و AB را در امتداد آن تا Z میکشیم، و AZ را مساوی عده‌ی مالها قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیل AZHTCD را در امتداد مکعب AE، چنانکه معمول است، تمام میکنیم. درین صورت، مکعب مستطیل AT

(*) در اینجا $BE = b$ ، $T = H = a$ ، $EK = KB = b/2$ ، و لهذا بترتیب

$$Z = H + EK^2 = a + (b/2)^2$$

$$KC = \sqrt{a + (b/2)^2}$$

$$BC = (b/2) + \sqrt{a + (b/2)^2}$$

$$\text{§ ۵۰۲۰۳۰۱} (\dagger) \quad \text{§ ۵۰۲۰۳۰۲} (**)$$

(††) استدلال خیم برای معادل بودن معادله‌ی $bx = x^2 + cx^2$ با معادله‌ی

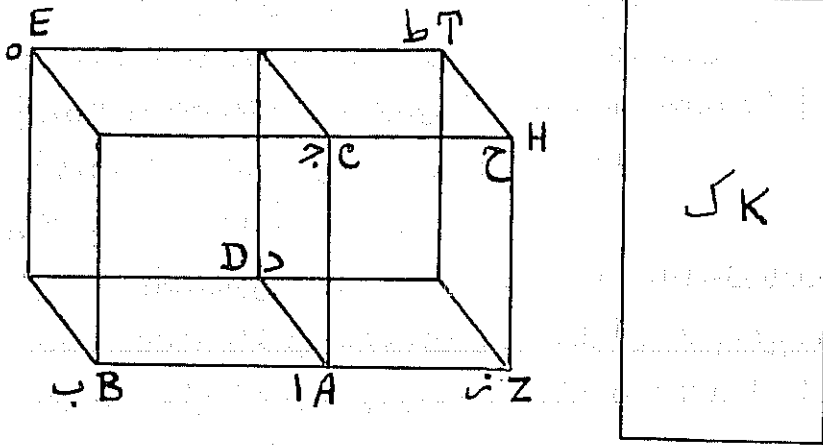
$$bx = x^2 + cx^2 \text{ چنین است.}$$

فرض کنیم $ABCDE = x^2$ و $AZ = c$. چون مکعب مستطیل AT را تمام کنیم خواهیم داشت $AT = cx^2$ ؛ پس، با توجه به معادله‌ی مفروض،

$$BT = x^2 + cx^2 = bx.$$

اینک اگر مستطیل K را با سطح b رسم کنیم، از طرفی $AD = bx$ و از طرف دیگر $AD (= BT) = x^2 + cx^2 = bx$. پس مکعب مستطیل BT با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش K و ارتفاعش AD باشد معادل است، و لهذا، قواعد دوجیم به نسبت عکس ارتفاعات آنهاست، و چون ارتفاعات آنها AD است، قواعدشان مساوی است، یعنی $K = HB$. اما $K = b$ و $HB = CB + AH = x^2 + cx$ ؛ پس $b = x^2 + cx$. البته این استدلال خالی از حشو و زواید نیست.

مساوی [جمله‌ی] عددهی \ast اموال خواهد بود، و لہذا مکعب مستطیل BT، که مجموع مکعب [AE] و [جمله‌ی] عددهی مفروض اموال است، مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض جذرها میباشد. حال مستطیل K را مساوی عددهی مفروض جذرها



میسازیم - و [مقصود از] جذر همان ضلع مکعب است، و آن AD است. پس حاصل ضرب سطح K در AD مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض اضلاع است، و [از طرف دیگر] از ضرب سطح HB در AD مجموع مکعب با [جمله‌ی] عددهی مفروض اموال آن حاصل میشود. ولی این دو جسم - یعنی مکعب مستطیل BT و مکعب مستطیلی که بر [قاعده‌ی] K ساخته شده و ارتفاعش AD است - متساویند. پس قاعده‌های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند $\ast\ast$ ، و چون ارتفاعات آنها متساویند قواعدشان نیز متساوی می‌باشند. اما قاعده‌ی HB عبارتست از مجموع مربع CB و [مستطیل] AH که مساوی همان عددهی از جذرها [ی CB] است که برای مالها فرض شده بود \dagger . پس K، که عددهی مفروض جذرها است، مساوی است با مال و

(\ast) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱.

($\ast\ast$) رجوع شود به \S ۴۰۰۰۱، (ص ۱۵۶).

(\dagger) اگر عددهی مالها (یعنی ضرب درجه‌ی دوم) در معادله‌ی مفروض C باشد، مستطیل

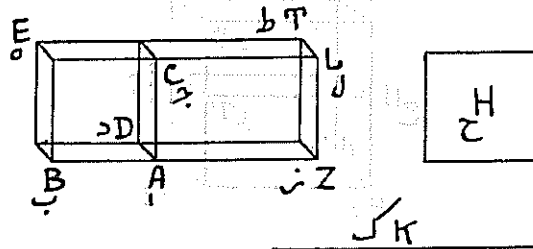
AH مساوی C برابر جذر (یعنی x) است. رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۸۱.

همان عده از جذرها که برای مالها فرض شده بود، و این همان است که میخواستیم ثابت کنیم.

مثال آن اینکه معادله مکعب و سه مال با ده جذر در حکم معادله‌ی مال و سه جذر با ده عدد است. [۳+۵+۵-§] و صنف دوم از آنها [مانند اینست که] مکعبی با دو جذر

معادل سه مال باشد. و آن در حکم اینست که مالی بعلاوه‌ی دو معادل سه جذرش باشد. و برهانش

اینست \square . مکعب ABCDE را که با دو جذرش معادل سه مال است می‌گیریم، و شکل H را مربع و مساوی CB و خط K راسه قرار می‌دهیم، پس حاصل ضرب H در K سه مال مکعب AE است. و بر AC مستطیلی [مانند AL] مساوی دو می‌سازیم، و مکعب مستطیل AZCTD را تمام میکنیم. پس این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی جذرها است. ولی [از یک طرف]، خط ZB چون در مربع AC ضرب شود مکعب مستطیل BT حاصل گردد. و [از طرف دیگر] مکعب



مستطیل AT مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع است، و بالنتیجه مکعب مستطیل

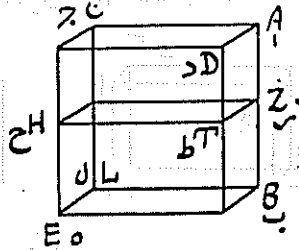
$$(*) \text{ معادله‌ی مفروض: } x^2 + bx = cx^2 \quad (b = 2, c = 3)$$

فرض کنیم $ABCDE = x^2$ و $H = CB = x^2$ و $K = c$ پس $H \cdot K = cx^2$. اگر $AL = b$ خواهیم داشت $AZCTD = bx$ یا $AT = bx$. اما، از طرفی $BT = AE + AT = x^2 + bx = BT = ZB \cdot AC^2 = ZB \cdot x^2$ ، پس $ZB = c$ ولی $BL = x^2 + b$ ، و چون از طرف دیگر $BL = ZB \cdot x = c \cdot x$ خواهیم داشت $x^2 + b = cx$ ؛ فهوالمطلوب.

BT مساوی است با مجموع مکعب [AE] و مقداری مساوی [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع آن؛ پس مکعب مستطیل BT مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالها است. بنابراین، بقیاس آنچه در شکل قبل ثابت شد، خط ZB مساوی سه است. اما مستطیل BL مساوی مال و دو می‌باشد؛ پس مال و دو معادل سه جذراست، زیرا سطح BL از ضرب AB در سه حاصل می‌شود. و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[§ ۵۰۵۰۴] و صنف سوم از آنها [مانند] اینست که مکعبی معادل مال و سه جذر باشد.

در این صورت، مال معادل جذر و سه عدد خواهد بود. [برای اثبات] مکعب ABCDE را میگیریم که معادل مال آن و سه ضلع آنست، و از خط AB، که ضلع آنست، خط AZ را مساوی عده‌ی مالها، که واحد است، جدا میکنیم، و مکعب مستطیل AZTHC را تمام میکنیم. پس مکعب مستطیل AZTHC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است، و باقی میماند مکعب مستطیل ZE که مساوی [جمله‌ی]



عده‌ی مفروض اضلاع است. و چون ارتفاعات این دو مکعب مستطیل متساویند، بنا بر آنچه در [شکل سی و دوم] مقاله‌ی یازدهم اصول ثابت شده، نسبت آنها مثل

$$(c = 1, b = 3) x^2 = cx^2 + bx \quad (*)$$

فرض کنیم $ABCDE = x^2 = cx^2 + bx$ و $AZ = c$ ؛ پس $AH = cx^2$

و $ZE = x^2 - cx^2 = bx$. چون دو جسم AH و ZE دارای يك ارتفاع (ZT)

هستند، $AH : ZE = ZC : ZL$ ، اما $ZC = cx$. بالنتیجه $cx^2 : bx = cx$ ؛

و از آنجا $ZL = b$ پس بالاخره $CB = ZC + ZL = cx + b$ ، یا $x^2 = cx + b$ ؛

فهو المطلوب.

نسبت قاعده‌ی ZC است به قاعده‌ی ZL . اما سطح ZC مساوی يك جذر مربع CB است، و [بالتیجه] سطح ZL عده‌ی جذرها است، و آن سه است. پس مربع CB مساوی يك جذر و سه عدد است، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

[۵۰۵۰۵ § تبصره -] و تا این براهین از این طریق [هندسی که ذکر شد] فهمیده نشود فن جبر جنبیدی علمی نخواهد داشت^{۵۵}، اگر چه فهم آنها از این طریق مستلزم تحمل دشواریهایی است.

[۵۰۶ § مقدمات حل معادلات درجه‌ی سوم]

[۵۰۶۰۱ §] چون از ذکر این اصناف که برهان [حل] آنها بخواص دایره-یعنی به کتاب [اصول] اقلیدس - ممکن است فارغ شدیم، اینک می‌پردازیم به اصنافی که برهان آنها جز به خواص قطوع ممکن نیست، و آن چهارده صنف است: یکی از آنها مفرد است، و آن معادله‌ی عددی با مکعبی است، و شش معادله‌ی سه‌تایی که مانده است، و هفت معادله‌ی چهارتایی.

و پیش از بحث از این اصناف، مقدماتی مبتنی بر کتاب مخروطات می‌آوریم^{۵۶} تا متعلم را تمهید گونه‌ای باشد، و درین رساله ما را به بیش از سه کتاب سابق‌الذکر - یعنی دو کتاب اصول و معطیات اقلیدس و دو مقاله از کتاب مخروطات - حاجت نیفتد.

[۵۰۶۰۲ § مسئله -] می‌خواهیم دو خط بین دو خط [مفروض] بیابیم که هر چهار متوالیاً بريك نسبت باشند^۴.

(۵) خیام بار دیگر اهمیت براهین هندسی را تأکید می‌کند.

(۵۵) فقط اولین مقدمه (۵۰۶۰۲ §) مبتنی بر مخروطات است.

(۴) رجوع شود به ۳۰۷۰۱ §. مقصود مسئله تعیین دو طول x و y است چنانکه

$$AB : x = x : y = y : BC.$$

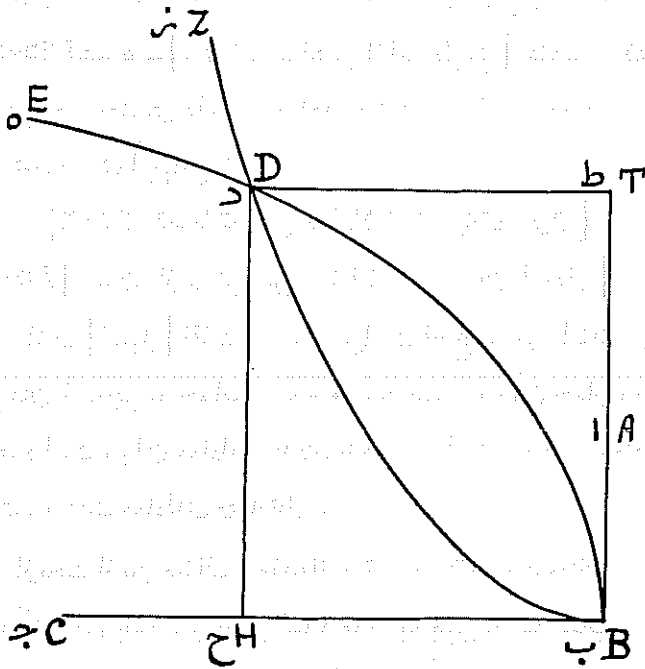
خیام برای حل مسئله دو سهمی به رأس B می‌سازد که محور و ضلع قائم اولی BC ، و محور و ضلع قائم دومی AB است. اگر D محل تلاقی دو قطع باشد، بموجب خاصیت سهمی،

$$\overline{HD}^2 (= \overline{BT}^2) = BH \cdot BC \quad \text{و} \quad \overline{DT}^2 (= \overline{BH}^2) = BA \cdot BT$$

$$BC : BT = BT : HB, \quad BT : HB = HB : BA,$$

وبالتیجه $AB : HB = HB : BT = BT : BC$. فیه‌المطلوب.

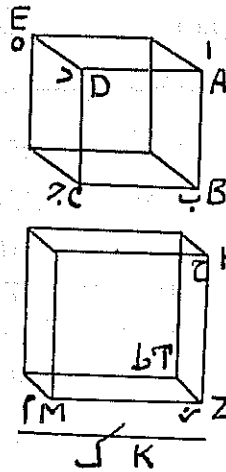
فرض کنیم AB و BC آن دو خط مستقیم [مفروض] باشند. این دو خط را چنان قرار می‌دهیم که اضلاع زاویه‌ی قائمه‌ی B باشند، و قطع مکافی به رأس B و سهم BC



و ضلع قائم BC می‌سازیم، و آن قطع BDE است. پس قطع BDE از حیث و ضلع معلوم است، زیرا رأس و سهم آن از حیث و ضلع قائم آن از حیث مقدار معلوم است. این قطع بر خط BA مماس است، زیرا زاویه‌ی B قائمه است، و آن، چنانکه در شکل سی و سوم مقاله‌ی اول مخروطات ثابت شده، مساوی زاویه‌ی ترتیب قطع است. همچنین چنانکه آپولونیوس در شکل پنجاه و ششم از مقاله‌ی اول ثابت کرده، قطع مکافی دیگری به رأس B و سهم AB و ضلع قائم AB می‌سازیم، و آن قطع BDZ است. قطع BDZ بر خط BC مماس است، و بالنتیجه، دو قطع یکدیگر را ناچار قطع می‌کنند. فرض کنیم D نقطه‌ی تقاطع آنها باشد. پس وضع نقطه‌ی D

معلوم است، زیرا وضع هر دو قطع مکافی معلوم است. پس اگر ازین نقطه دو عمود DH و DT را [بترتیب] بر BC و AB بکشیم، چنانکه در معطیات ثابت شده \odot ، مقادیر این دو عمود معلوم خواهد بود. اینک گوئیم چهار خط AB و BH و BT و BC متوالیاً بريك نسبت اند. برهان آن اینست که چون خط DH از خطوط ترتیب قطع BDE است، مربع HD مساوی حاصل ضرب BH در BC است. پس نسبت BC به HD (که مساوی خط BT است) مثل نسبت BT به HB است. و [همچنین چون] خط DT در قطع BDZ از خطوط ترتیب است، مربع DT (که مساوی BH است) مساوی حاصل ضرب BA در BT است؛ بالنتیجه، نسبت BT به BH مثل نسبت BH به BA می باشد. پس خطوط چهارگانه [یعنی AB و BH و BT و BC] متوالیاً متناسبند. اما مقدار DH معلوم است، زیرا این خط از نقطه‌ی معلومی بزاویه‌ی معلومی برخط معلومی کشیده شده، و نیز مقدار DT معلوم است؛ پس مقادیر دو خط BH و BT معلوم است، و این دو خط وسطهای نسبت بین دو خط AB و BC هستند، یعنی نسبت AB به BH مثل نسبت BH به BT و مثل نسبت BT به BC است، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم.

[۵۰۶.۳ مسئله] - مربع ABCD مفروض و قاعده‌ی جسم متوازی السطوح و



قائم‌الزویای ABCDE است ، و مربع MH [نیز] مفروض است ، و می‌خواهیم به قاعده‌ی MH جسم متوازی‌السطوح قائم‌الزویائی مساوی جسم مفروض ABCDE بسازیم .
نسبت AB به MZ را مساوی نسبت MZ به K می‌سازیم ، و سپس نسبت AB به K را مثل نسبت ZT به ED می‌سازیم ^{۵۵} ، و ZT را در نقطه‌ی Z عمود بر سطح MH قرار می‌دهیم ، و مکعب مستطیل MZTH را تمام می‌کنیم .

حال گوئیم که این مکعب مستطیل مساوی مکعب مستطیل مفروض است .
دلیل آن اینست که نسبت مربع AC به مربع MH مثل نسبت AB به K است . پس نسبت مربع AC به مربع MH مثل نسبت ZT است ، که ارتفاع مکعب مستطیل MTH است ، به ED ، که ارتفاع مکعب مستطیل BE است . پس ، بموجب آنچه در [شکل سی و چهارم] مقالده‌ی یازدهم اصول ثابت شده ، دو مکعب مستطیل [از حیث حجم] متساویند ، زیرا قاعده‌های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند .

[۵۰۶۰۳۰۱ § تعریف ^{۵۵} -] و هر گاه لفظ ^{۵۵} جسم گوئیم مراد ما جسمی است متوازی‌السطوح و قائم‌الزویا ، و نیز هر گاه سطح گوئیم مقصود سطحی متوازی‌الاضلاع و قائم‌الزویا است .

[۵۰۶۰۴ § مسئله -] مکعب مستطیل ABCD مفروض است ، و قاعده‌ی آن AC مربع است ، و می‌خواهیم مکعب مستطیلی بسازیم که قاعده‌اش مربع و ارتفاعش مساوی طول مفروض ET باشد ، و [از حیث حجم] مساوی مکعب مستطیل ACD باشد [†] .

(۵) مقصود اینست که طولهای K و MZ را چنان تعیین می‌کنیم که

$$AB : MZ = MZ : K , \quad AB : K = ZT : ED .$$

ازین دو نتیجه می‌شود $ZT = \frac{AB \cdot ED}{MZ}$ ، و هوالمطلوب .

(۵۵) رجوع شود به ۴۰۵۰۱ § (ص ۱۵۶) .

(†) K و EZ را بوسیله‌ی تناسبات

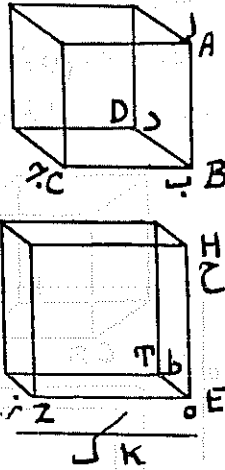
$$ET : BD = AB : K , \quad AB : EZ = EZ : K$$

تعیین می‌کنیم . خواهیم داشت

$$\overline{AB}^2 : \overline{EZ}^2 = (AB : EZ) (EZ : K) = AB : K = ET : BD .$$

پس $\overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{EZ}^2 \cdot ET$ و هوالمطلوب .

پس نسبت ET را به BD مثل نسبت AB به K می‌سازیم، و بین AB و K واسطه‌ای هندسی می‌گیریم، و آن EZ است، و EZ را عمود بر ET قرار می‌دهیم، و TZ را تمام می‌کنیم، و EH را عمود بر سطح TZ و مساوی EZ قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیل



HETZ را تمام می‌کنیم. حال گوئیم مکعب مستطیل T، که قاعده‌اش مربع HZ و ارتفاعش خط مفروض ET است، [از حیث حجم] مثل مکعب مستطیل مفروض D است. برهانش اینست که نسبت مربع AC به مربع HZ مثل نسبت AB به K است. پس نسبت مربع AC به مربع HZ مثل نسبت ET است به BD. بالنتیجه دو جسم متساوی‌اند، زیرا قواعدشان با ارتفاعاتشان متکافی است، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم. [§ ۵۰۶۰۵ حل معادله‌ی مفرد درجه‌ی سوم] و بعد از ذکر این مطالب به صنف سوم از مفردات می‌پردازیم، و آن اینست که گاهی معادل عددی باشد *

(*) $x^2 = a$. مکعب مستطیل ABCD را با شرایط $AB = BC = 1$ و

$BD = a$ می‌سازیم، و طولهای E و Z را چنان تعیین می‌کنیم که

$$(1) \quad AB : E = E : Z = Z : BD.$$

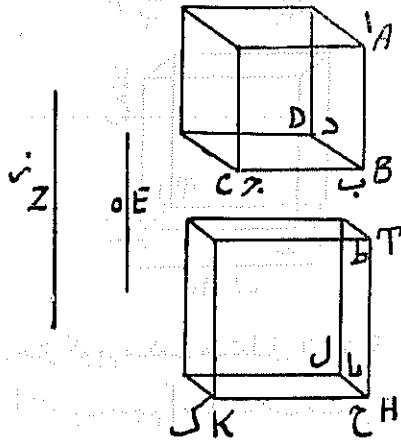
و مکعب KHTL را با ضلع E می‌سازیم $(KH = HT = HL = E)$. بموجب (۱):

$$AC : TK = (AB : HK) (AB : HK) = (AB : E) (E : Z) =$$

$$AB : Z = E : BD = HK : AD.$$

پس $AC \cdot BD = TK \cdot HK$ ، یا $a = \overline{HK}^2$. پس $x = HK$ ، و هوالمطلوب.

عدد را، چنانکه [در ۵۰۳۰ §] گفتیم، بامکعب مستطیل ABCD نمایش می‌دهیم که قاعده‌اش AC است، و آن مربع واحد است، و ارتفاعش مساوی عدد مفروض است. حال می‌خواهیم مکعبی مساوی این مکعب مستطیل بسازیم. برای این منظور بین دو خط AB و BD دو خط که واسطه در نسبت باشند می‌گیریم \square . پس این دو خط بنا بر آنچه [در ۵۰۶۰ §] ثابت کردیم، از حیث مقدار معلومند، و این دو خط E و Z است. و HT را مساوی خط E قرار می‌دهیم، و بر آن مکعب THKL را می‌سازیم.



پس این مکعب از حیث مقدار معلوم است، و ضلعش از حیث مقدار معلوم می‌باشد. اینک گوئیم که این مکعب مساوی مکعب مستطیل D است.

برهان آن. نسبت مربع AC به مربع TK مثل نسبت AB به HK است که دو بار تکرار شود \dagger ؛ و نسبت AB به HK که دو بار تکرار شود مثل نسبت AB به Z است، که اولین و سومین از خطوط چهار گانه است، و بالنتیجه مثل نسبت HK است، که

(\square) یعنی دو خط مانند E و Z بین AB و BD درج می‌کنیم که

$$AB : E = E : Z = Z : BD$$

(\dagger) مقصود از نسبت AB به HK که دو بار تکرار شود $(AB : HK) \times (AB : HK)$

یعنی مربع AB : HK است. و این تعبیر را ریاضیون اسلامی از یونانیان گرفته‌اند. رجوع

شود به: هیت، سیزده مقاله، جلد ۲، ص ۱۳۲ - ۱۳۳؛ تحریر اقلیدس، ص ۷۲.

دومین خط است ، به BD که چهارمین خط است . پس قواعد مکعب L و مکعب مستطیل D با ارتفاعات آنها متکافی اند . پس دو جسم متساویند ، و این همان است که می‌خواستیم ثابت کنیم .

§ ۵۰۷] مقترنات سه تائی درجهی دوم

[§ ۵۰۷۰۱] و بعد ازین ، به شش صنف سدتائی که مانده است [†] می‌پردازیم .
 [§ ۵۰۷۰۲] صنف اول اینست که مکعبی و اضلاع معادل عددی باشد [‡] .
 AB را ضلع مربعی مساوی عددهی جذرهای گیریم ، و آن معلوم است . و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مساوی مربع AB باشد ، و ارتفاعش مساوی BC باشد ، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد . ساختن این مکعب مستطیل را در آنچه [در § ۵۰۶۰۳] گذشت بیان کردیم . و BC را عمود بر AB قرار می‌دهیم . و معنی عدد مجسم را در این رساله [در § ۵۰۳۰۵] آموختی ، و آن مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع واحد باشد ، و ارتفاعش مساوی عدد مفروض باشد ، یعنی خطی باشد که نسبت آن به ضلع قاعدهی مکعب مستطیل مساوی نسبت عدد مفروض به واحد باشد . حال خط AB را مستقیماً تا Z امتداد می‌دهیم ، و قطع مکافیی به رأس B و سهم

§ ۵۰۲۰۳۰۳ (†)

$$x^2 + bx = a \quad (\ddagger)$$

فرض کنیم $BC = a$ ، $\overline{AB}^2 = b$. سهمی HBD را به رأس B و محور BZ و ضلع قائم AB و بی‌دایرهی CDB را بقطر BC می‌سازیم . فرض کنیم D نقطه‌ی تقاطع دو منحنی و E تصویر آن بر CB باشد ، گوئیم $x = BE$.

برهان . در سهمی ، $\overline{DZ}^2 = BZ \times AB$ ، و چون $DZ = BE$ و $ED = ZB$ ، خواهیم داشت $BE : ED = BE : ED$ (۱) . در دایره $BE : ED = EC : ED$ (۲) . از (۱)

$$\text{و (۲) نتیجه می‌شود } \overline{AB}^2 : \overline{BE}^2 = BE : EC \text{ ، و یا } \overline{AB}^2 \cdot EC = \overline{BE}^2 \cdot BE \text{ . پس}$$

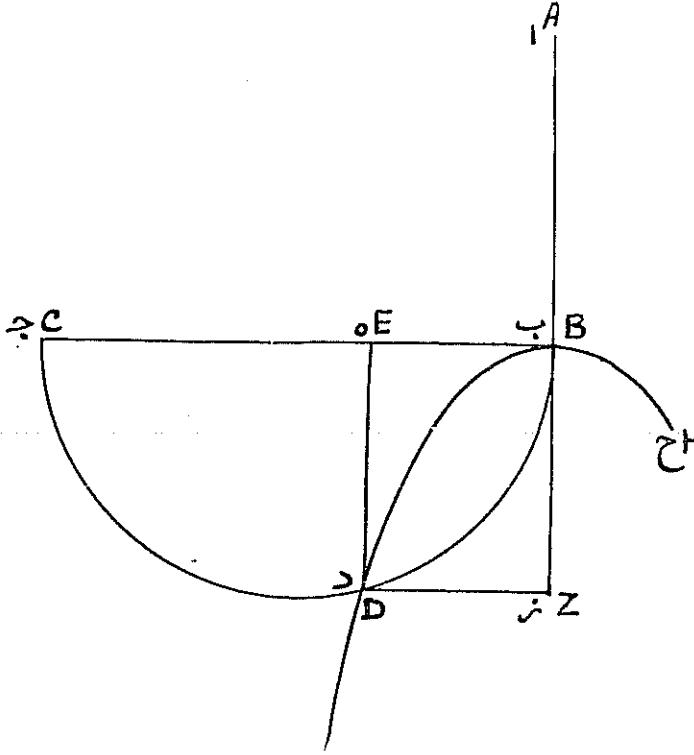
$$\overline{BE}^2 + \overline{AB}^2 \cdot EB = \overline{AB}^2 \cdot EC + \overline{AB}^2 \cdot EB = \overline{AB}^2 \cdot BC \text{ .}$$

یا $BE = a$ ، $\overline{BE}^2 + b \cdot BE = a$ بهو المطلوب .

قطوعی که خیام در حل این معادله بکار می‌برد سهمی $y = \sqrt{b}$ و دایره ی

$$y^2 = x \left(\frac{a}{b} - x \right) \text{ است}$$

BZ و ضلع قائم AB میکشیم، و آن قطع BDH است. پس، وضع قطع BDH،



چنانکه سابقاً [در § ۵۰۶۰۲] بیان کردیم، معلوم است. و این قطع بر خط BC مماس می‌باشد. و بر BC نیمدایره‌ای می‌کشیم. این نیمدایره ناچار قطع مکافی را قطع می‌کند. فرض کنیم آن را در D قطع کند. از D، که چنانکه دانستی وضعش معلوم است، دو عمود DZ و DE را [بترتیب] بر BZ و BC می‌کشیم. پس این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلوم است. چون خط DZ از خطوط ترتیب قطع است، مربع آن مساوی حاصل ضرب DZ در AB می‌باشد. پس نسبت AB به DZ (که مساوی BE است) مثل نسبت BE است به ED (که مساوی ZB است). اما نسبت BE به ED مثل نسبت ED به EC می‌باشد. پس خطوط چهار گانه‌ی AB و BE و ED و EC متناسبند، و بالنتیجه، نسبت مربع AB، که اولی

است ، به مربع BE ، که دومی است ، مثل نسبت BE است ، که دومی است ، به EC ، که چهارمی است . پس مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش EC است ، مساوی مکعب BE است ، زیرا ارتفاعات آن دو با قاعده های آنها متكافی اند . حال اگر مکعب مستطیلی را که قاعده اش مربع AB و ارتفاعش EB است بر هر دو بیفزاییم ، مجموع مکعب BE و این مکعب مستطیل [اضافی] مساوی مکعب مستطیلی خواهد بود که قاعده اش مربع AB است و ارتفاعش BC ، و این مکعب مستطیل را مساوی عدد مفروض گرفته بودیم . اما مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع AB است (که مساوی عدهی جذرها است) و ارتفاعش EB است (که ضلع مکعب است) مساوی [جملهی] عدهی مفروض اضلاع EB است . پس مکعب EB با [جملهی] عدهی مفروض اضلاع آن مساوی عدد مفروض است ، و هوالمطلوب .

و این صنف حالات مختلف ندارد ، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست [☆] ، و بوسیلهی خواص دایره با خواص قطع مكافی حل شد .

[§۵۰۷۰۳-] صنف دوم از صنف های ششگانه آنست که مکعبی و عددی معادل اضلاع باشد [†] .

(☆) معادلهی $x^2 + bx - a = 0$ فقط يك ریشهی حقیقی دارد ، و آنها هم همیشه مثبت است .

$$x^2 + a = bx \quad (\dagger)$$

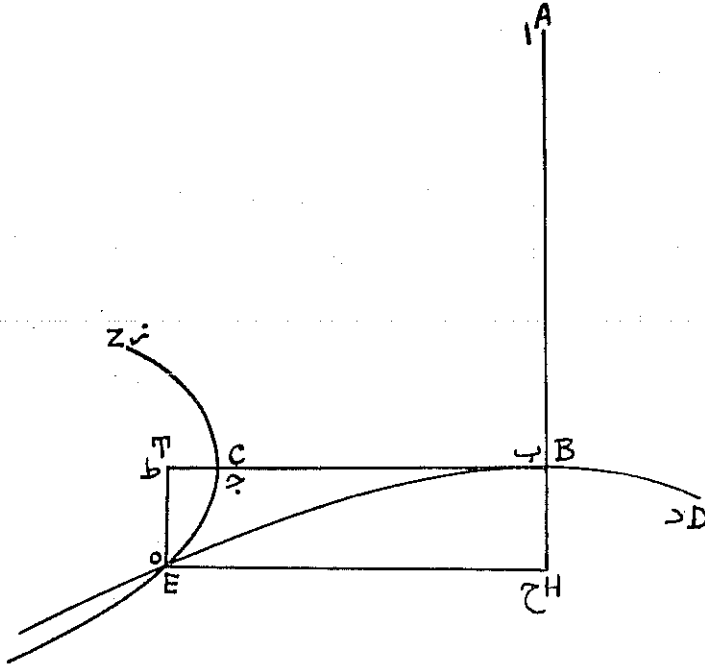
فرض کنیم $\overline{AB}^2 = b$ و $\overline{AB}^2 : BC = a$. سهمی به رأس B و محور AB و ضلع قائم AB و هذلولی به رأس C که محور کانونی آن در استقامت BC و اضلاع قائم و مایل آن هر يك مساوی BC باشد می کشیم (این هذلولی متساوی القطرین است) . اگر دو قطع نقطه ای مشترك نداشته باشند مسئله ممتنع است ، و الا فرض کنیم E یکی از نقاط تقاطع آنها و T و H تصاویر E بر BC و AB باشد . گوئیم $x = BT$.

برهان . بموجب خاصیت کلی هذلولی :

$$\overline{ET}^2 : (BT \times TC) = \text{ضلع مایل} : \text{ضلع قائم}$$

پس $\overline{ET}^2 = BT \times TC$ ، و بالنتیجه $BT : ET = ET : TC$ (۱) . بموجب خاصیت سهمی $\overline{EH}^2 = BH \cdot BA$ ، و چون $EH = BT$ و $BH = ET$ ، با توجه به (۱) خواهیم داشت $AB : BT = BT : BH = BT : ET = ET : TC = BH : TC$. خلاصه آنکه بقیه در ذیل صفحهی بعد

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذرها می‌گیریم، و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد، و فرض می‌کنیم BC، که بر AB عمود است، ارتفاع آن باشد. حال قطع مکافی به رأس B که



سهمش در استقامت AB و ضلع قائم آن AB باشد می‌کشیم، و آن قطع DBE است، و وضع آن معلوم می‌باشد. سپس قطع دیگری، که زاویه باشد، به رأس C می‌کشیم که سهمش در استقامت BC و اضلاع قائم و مایل آن هر يك مساوی BC

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی بعد

$$AB : BT = BT : BH = BH : TC$$

بالتیجه $\overline{AB}^2 \cdot TC = \overline{BT}^2$ یا $\overline{AB}^2 : \overline{BT}^2 = BT : TC$ پس،

$$\overline{BT}^2 + \overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot TC + \overline{AB}^2 \cdot BC = \overline{AB}^2 \cdot BT,$$

یا $\overline{BT}^2 + a = b \cdot BT$ وهوالمطلوب.

معادلات قطوعی که خیام بکار میبرد $x^2 = \sqrt{b}y$ و $x^2 = x(x - \frac{a}{b})$ است.

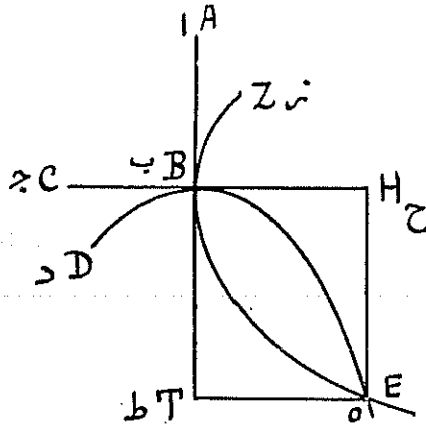
باشد، و آن ECZ است. این قطع، چنانکه آپولونیوس در شکل پنجاه و هشتم مقالدهی اول ثابت کرده است، از حیث وضع معلوم است. این دو قطع یا متلاقی اند و یا یکدیگر را قطع نمی کنند. پس اگر یکدیگر را قطع نکنند مسئله ممتنع است، و اگر در يك نقطه با یکدیگر مماس شوند یا یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند وضع نقطه‌ای تقاطع معلوم خواهد بود. فرض کنیم دو قطع در نقطه‌ی E متلاقی باشند. ازین نقطه عمودهای ET و EH را [بترتیب] بر دو خط BT و BH فرود می آوریم. پس این دو عمود ناچار وضعاً و مقدراً معلومند. و چون خط ET از خطوط ترتیب است، بنابر آنچه آپولونیوس در شکل بیستم مقالدهی اول ثابت کرده است، نسبت مربع ET به حاصل ضرب BT در TC مثل نسبت ضلع قائم است به ضلع مایل؛ و چون اضلاع قائم و مایل متساوینند، مربع ET مساوی حاصل ضرب BT است در TC، و بالنتیجه، نسبت BT به TE مثل نسبت TE به TC می باشد. اما بنا بر آنچه در شکل دوازدهم مقالدهی اول کتاب مخروطات ثابت شده، مربع EH (که مساوی BT است) مساوی حاصل ضرب BH در BA می باشد. پس نسبت AB به BT مثل نسبت BT به BH و مثل نسبت BH (که مساوی ET است) به TC می باشد. پس خطوط چهارگانه متناسبند، و بالنتیجه، نسبت مربع AB، که اولی است، به مربع BT، که دومی است، مثل نسبت BT است، که دومی است، به مربع TC، که چهارمی است. پس مکعب BT مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش CT است. و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BC است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، بر هر دو بیفزائیم، مکعب BT با عدد مفروض مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BT است، و این مکعب مستطیل [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع مکعب می باشد. پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و بعضی مسائل آن ممتنع

است \ominus ، و بوسیله‌ی خواص قطع مکافی و قطع زاید حل شد.

[§ ۵۰۷۰۴ -] صنف سوم آنست که مکعبی معادل اضلاع و عددی باشد \dagger .

AB را ضلع مربعی مساوی عدوی اضلاع قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی

می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و [حجمش] مساوی عدد مفروض باشد، و



(\ominus) معادله‌ی $x^2 - bx + a = 0$ همواره يك ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد که مورد

توجه خیام نیست. دو ریشه‌ی دیگرش یا موهومی اند - و در این صورت خیام مسئله را ممتنع می‌شمارد - و یا مثبت و مساوی ($x = \sqrt{b/3}$) و یا مثبت و متفاوت؛ و مقصود از حالاتی که خیام به آنها اشاره می‌کند همینها است.

$$\dagger \quad x^2 = bx + a$$

ترسیمات: $\overline{AB}^2 \cdot BC = a$ و $\overline{AB}^2 = b$

سه‌می DBE بر رأس B و محور BT و ضلع قائم AB

همدولوی متساوی القطرین ZBE بر رأس B و محور کائونی BH و ضلع قائم BC.

حکم: $x = BH$

رهان. در همدولوی $\overline{EH}^2 = CH \cdot BH$ ، و با بملاحظه‌ی $EH = BT$

$$(۱) \quad BH : BT = BT : CH$$

در سه‌می $\overline{ET}^2 = AB \cdot BT$ ، و چون $ET = BH$

$$(۲) \quad AB : BH = BH : BT$$

بموجب (۱) و (۲)، پس $\overline{AB}^2 : \overline{BH}^2 = BH : CH$

$$\overline{BH}^2 = \overline{AB}^2 \cdot CH = \overline{AB}^2 \cdot BH + \overline{AB}^2 \cdot BC$$

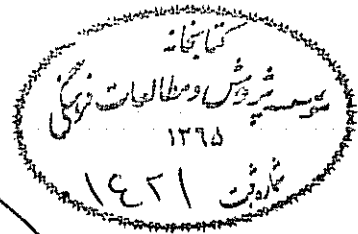
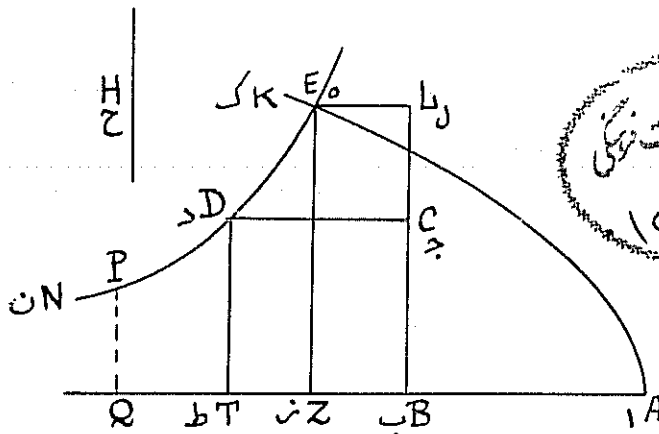
یا $\overline{BH}^2 = b \cdot BH + a$ پس $x = BH$

معادلات قطوعی که بکار رفته عبارتست از $x^2 = \sqrt{b} y$ و $y^2 = x(x + \frac{a}{b})$

فرض می‌کنیم ارتفاع آن BC بر AB عمود باشد. و AB و BC را مستقیماً امتداد می‌دهیم، و قطع مکافی به رأس B که سهمش بر استقامت AB و ضلع قائمش AB باشد می‌کشیم، و آن قطع DBE است، و وضع آن معلوم می‌باشد، و بر خط BH مماس است، چنانکه آپولونیوس در شکل سی و سوم مقالدهی اول ثابت کرده است. و قطع دیگری، که زاید باشد، می‌کشیم که رأسش B باشد، و سهمش بر استقامت BC باشد، و هریک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی BC باشد، و آن قطع ZBE است، و وضعش معلوم است، و بر خط AB مماس می‌باشد. پس دو قطع ناچار تلاقی می‌کنند. فرض کنیم در E متلاقی شوند. وضع این نقطه معلوم است، و اگر از نقطه‌ی E عمودهای ET و EH را بکشیم وضع و مقدار آنها معلوم خواهد بود. چون EH از خطوط ترتیب [قطع زاید] می‌باشد، بنا بر آنچه پیش از این گفتیم، مربع آن مساوی حاصل ضرب CH در BH است. پس نسبت CH به EH مانند نسبت EH به HB می‌باشد. اما نسبت EH ، که مساوی BT است، به HB ، که مساوی ET است و آن از خطوط ترتیب قطع دیگر است، مثل نسبت ET است به AB که ضلع قائم قطع [مکافی] است. پس خطوط چهار گانه متناسب اند، و نسبت AB به HB مثل نسبت HB به BT و مثل نسبت BT به CH می‌باشد. پس نسبت مربع AB ، که اولی است، به مربع HB ، که دومی است، مانند نسبت HB است، که دومی است، به CH ، که چهارمی است. پس مکعب HB مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش CH باشد، زیرا ارتفاعات آنها با قواعدشان متکافی است. اما این مکعب مستطیل مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BC باشد و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم. بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌ای مساوی مربع AB بر آن محیط باشد و ارتفاعش BH باشد. و این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BH است. پس مکعب BH مساوی عدد مفروض بعلاوه‌ی [جمله‌ی]

عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب است، و مطلوب همین بود.
 پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف ندارد، و در آن، یعنی در مسائل
 آن، چیزی ممتنع نیست^۵، و بخواس قطع مکافی و زاید با هم حل شد.
 [§ ۵۰۷۰۵ -] صنف چهارم از اصناف ششگانه‌ی سده‌تائی آنست که مکعبی
 و مالها معادل عددی باشد[†].

خط AB را مساوی عددی اموال می‌گیریم، و مکعبی مساوی عدد مفروض



(*) معادله‌ی $x^3 - bx - a = 0$ که موضوع بحث است همواره يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد. دو ریشه‌ی دیگرش هر دو منفی یا هر دو موهومی‌اند.

$$x^3 + ex^2 = a \quad (\dagger)$$

ترسیمات: $H = BC = BT$, $H^3 = a$, $AB = c$

همذلولی متساوی‌القطرین EDN با مجانبهای BC و BT و مار بر D؛ سهمی AEK بر رأس A و محور AT و ضلع قائم BC.
 حکم: $x = BZ$

برهان. در سهمی AZ : $BC : EZ = EZ : AZ$ ؛ در همذلولی $BC : BC = BC : EZ$ پس $\overline{BZ}^2 : \overline{BC}^2 = BC : AZ$ ، و یا

$$\overline{BC}^3 = \overline{BZ}^2 \cdot AZ = \overline{BZ}^2 + \overline{BZ}^2 \cdot AB,$$

یا $a = \overline{BZ}^3 + c \cdot \overline{BZ}^2$ پس $x = BZ$

معادلات قطوعی که بکار برده شده عبارتست از $xy = a^{1/3}(x+c)$ و $y^2 = a^{1/3}(x+c)$

می‌سازیم، و فرض می‌کنیم H ضلع آن باشد، و AB را مستقیماً امتداد می‌دهیم، و BT را مساوی H می‌سازیم، و مربع $BTDC$ را تمام می‌کنیم، و - چنانکه از اشکال چهارم و پنجم مقاله‌ی دوم و شکل پنجاه و نهم مقاله‌ی اول [مخروطات] استنباط می‌شود - بر نقطه‌ی D قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط BC و BT آنرا قطع نکنند، و آن قطع EDN است. پس قطع EDN از حیث وضع معلوم است، زیرا وضع نقطه‌ی D معلومست، و خطوط BC و BT از حیث وضع معلومند. و سپس قطع مکافی بر رأس A و سهم AT و ضلع قائم BC می‌سازیم، و آن قطع AK است. پس قطع AK از حیث وضع معلوم است. و دو قطع ناچار یکدیگر را تلاقی می‌کنند، و اگر E نقطه‌ی تلاقی آنها باشد، وضع این نقطه معلوم است. حال ازین نقطه عمودهای EZ و EL را [بترتیب] بر دو خط AT و BC فرود می‌آوریم؛ پس این دو عمود وضعاً و مقداراً معلومند. حال گوئیم ممکن نیست که قطع AEK قطع EDN را در نقطه‌ای قطع کند که عمود وارد از آن بر خط AT بر T یا خارج آن وارد آید^۵. زیرا اگر، در صورت امکان، این عمود بر T وارد شود، مربع آن مساوی حاصل ضرب AT در TB (که مساوی BC است) خواهد بود. اما این عمود مساوی عمود DT است. پس مربع TD مساوی حاصل ضرب AT در TB است، و نیز مساوی حاصل ضرب BT در خودش می‌باشد، و این ممتنع است. پس عمود بر T وارد نمی‌شود. و بهمین طریق خارج از آن نیز وارد نمی‌شود، زیرا درین صورت

(*) عبارت دیگر، محل تلاقی دو قطع نه D و نه واقع بر قسمت DN از قطع زاید (هذلولی) تواند بود. چه اولاً اگر دو قطع در D متلاقی شوند، بمسبب خاصیت سهمی $\overline{DT}^2 = AT \cdot BC$ ، و چون $BC = DT = BT$ ، $\overline{BT}^2 = AT \cdot BT$ ، و یا $BT = AT$ ، و این ممتنع است، زیرا $AT = AB + BT$. ثانیاً اگر دو قطع در نقطه‌ای مانند P از قطعه‌ی DN از سهمی متلاقی شوند، چون عمود PQ را بر AT فرود آوریم، بالبداهه $PQ < DT$. پس $\overline{PQ}^2 < \overline{DT}^2$ ؛ اما $\overline{PQ}^2 = AQ \cdot BC$ ؛ بالتسبیح $\overline{DT}^2 > \overline{PQ}^2$ ، یا $\overline{BT}^2 > AQ \cdot BC$ ، و این ممتنع است زیرا $AQ = AB + BT + TQ$.

این عمود کوتاهتر از TD خواهد بود ، و این بطریق اولی ممتنع است . پس ناچار عمود بر نقطه‌ای بین A و T وارد می‌شود ، مانند [عمود] EZ . و مربع EZ مساوی حاصل ضرب AZ در BC می باشد . پس نسبت AZ به EZ مثل نسبت EZ به BC است . و بنا بر آنچه در شکل هشتم مقالدهی دوم مخروطات ثابت شده ، سطح EB مساوی سطح DB است ، و بالتیجه ، نسبت EZ به BC مثل نسبت BC به BZ می باشد . پس خطوط چهارگانه‌ی AZ و EZ و BC و BZ [متوالیاً] متناسبند . بالتیجه ، نسبت مربع BZ ، که چهارمی است ، به مربع BC ، که سومی است ، مثل نسبت BC است ، که سومی است ، به AZ ، که اولی است . پس مکعب BC - که آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم - مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AZ باشد . اما مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AZ است مساوی است با مجموع مکعب BZ و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ و ارتفاعش AB باشد ، و این مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BZ است و ارتفاعش AB است مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض مالها است . پس مکعب BZ با [جمله‌ی] عددهی مفروض مالهای آن مساوی عدد مفروض است ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

و این صنف را حالات مختلف نیست ، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نمیباشد* ، و بوسیله‌ی خواص قطع مکافی و قطع زاید با هم حل شد .

[صنف پنجم از اصناف ششگانه‌ی سدثائی باقی مانده آنست که

مکعب و عددی معادل مال باشد † .

(*) معادله‌ی مورد بحث ، $x^3 + cx^2 - a = 0$ ، همیشه يك جواب حقیقی و مثبت

دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی است .

(†) چون این یکی از موارد نادری است که خیام به بحث از معادله‌ی درجه سوم بر حسب

ضرایب می پردازد ، شرح روش او خالی از فایده بنظر نمی‌رسد .

معادله‌ی مورد بحث $x^3 + a = cx^2$ (۱) است که در آن a و c و x مثبت فرض

می شود . خیام ابتدا بوسیله‌ی $AC = c$ (۲) و $H^2 = a$ (۳) معادله را متجانس می کند ،

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

AC را مساوی عددی مالها می گیریم ، و مکعبی مساوی عدد مفروض می سازیم ،

بقیه از ذیل صفحه‌ی قبل

و بر حسب اینکه H مساوی AC یا بیشتر یا کمتر از آن باشد سه حالت تشخیص می‌دهد . سپس ثابت می‌کند که در دو حالت اول معادله ممتنع است . خلاصه‌ی استدلال وی اینست .

در حالت اول ، یعنی اگر $H = AC$ (۴) یا $a = c^2$ ، بر حسب اینکه $x = H$ یا $x < H$ یا $x > H$ ، سه فرض ممکن است . اولاً $x = H$ (۵) . بموجب (۴) و (۵) ، $H^2 = x^2 = AC^2$ ؛ یا بموجب (۲) و (۳) ، $cx^2 = a$ ، و لهذا $cx^2 < x^2 + a$ ، و این با (۱) ناسازگار است . ثانیاً $x < H$. بهمان قیاس لازم می‌آید $cx^2 < a$ ، و بطریق اولی $cx^2 < x^2 + a$. ثالثاً $x > H$ (۶) . بموجب (۶) و (۴) ، $x > AC$ ، پس $x^2 > AC^2$. پس بنا بر (۲) ، $x^2 > cx^2$ ؛ و بطریق اولی $x^2 + a > cx^2$ ، و این نیز با (۱) متناقض است . در حالت دوم ، یعنی اگر $H > AC$ (یا $a > c^2$) ، بدلائل مشابه با حالت قبل معادله ممتنع می‌باشد .

پس فقط در حالت سوم ، یعنی وقتی $H < AC$ (۷) یا $a < c^2$ ، ممکن است مسئله جواب داشته باشد . در این حالت چنین قرار می‌دهد : $BC = H$ (۸) . بر حسب اینکه $BC < AB$ یا $BC > AB$ یا $AB = BC$ (یا $\sqrt{a} < c/2$ یا $\sqrt{a} > c/2$ یا $\sqrt{a} = c/2$) سه حالت ممکن است اتفاق افتد . سپس ، خیام دو قطع رسم می‌کند :

قطع زایدی (هذلولی) با مجانبهای CA و CE و مار بر نقطه‌ی D (DZ در شکل اول و DT در سایرین)

قطع مکافی (سهمی) بر رأس A و محور AC و ضلع قائم BC (AT در شکل اول ، AL در دومی ، و AK در سومی) .

شکل اول : $BC = AB$. چون $BC = AB$ ، $\overline{DB}^2 = AB \cdot BC$ ، سهمی از D می‌گذرد ، و دو منحنی نقطه‌ی تقاطع دیگری هم دارند .

خواننده می‌تواند تحقیق کند که اگر CA و CE را بترتیب محورهای x و y بگیریم ، مختصات نقطه‌ی دیگر $x = \frac{1}{4} c (\sqrt{5} + 1)$ و $y = \frac{1}{4} c (\sqrt{5} - 1)$ است .

شکل دوم : $BC > AB$. چون $BC > AB$ ، $\overline{DB}^2 > AB \cdot BC$ ، در خارج سهمی است . در این صورت خیام می‌گوید که اگر دو قطع نقطه‌ای مشترك داشته باشند تصویر این نقطه بر AC بین A و B است ، و عبارت دیگر x بین c و \sqrt{a} است . کسی که با جبر مقدماتی امروزی آشنا باشد با آسانی می‌تواند این مطلب را ثابت کند .

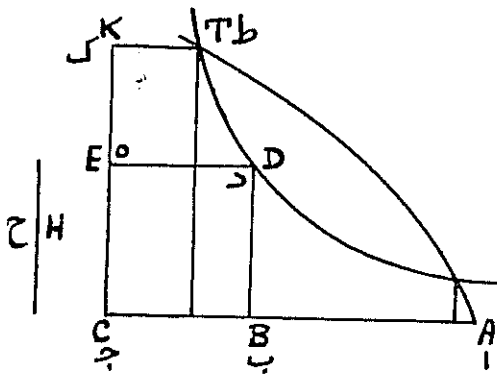
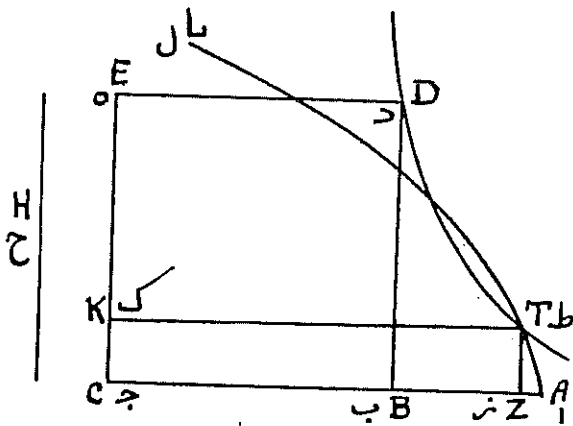
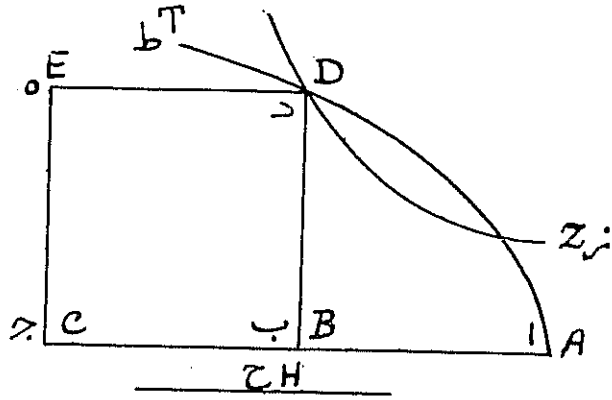
شکل سوم : $BC < AB$. نقطه‌ی D داخل سهمی است ، و دو قطع یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند .

اما اثبات اینکه از نقطه‌ی تقاطع دو قطع جواب معادله بدست می‌آید شبیه همانست که در مسائل سابق آمده است .

و فرض می‌کنیم H ضلع AC باشد. خط H از سه حال خالی نیست؛ یا مساوی خط AC است، و یا بزرگتر، و یا کوچکتر از آن. پس اگر مساوی آن باشد مسئله ممتنع است، زیرا از سه حال خارج نیست؛ ضلع مکعب مطلوب مساوی H یا کوچکتر و یا بزرگتر از آنست. پس اگر مساوی آن باشد، حاصل ضرب AC در مربع آن [یعنی در مربع ضلع مکعب] مساوی مکعب H خواهد بود، و بالنتیجه، عدد مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالها می‌گردد، و احتیاج به افزودن مکعب [مطلوب] نیست. و اگر ضلع مطلوب کمتر از آن [یعنی از H] باشد، حاصل ضرب AC در مربع این ضلع کمتر از عدد مفروض خواهد بود، و بالنتیجه، [جمله‌ی] عده‌ی مالها کمتر از عدد مفروض می‌شود چه رسد باینکه چیزی [بر این عدد] اضافه شود. و اگر ضلع بزرگتر H باشد. مکعب آن بزرگتر از حاصل ضرب AC در مربع آن خواهد بود، چه رسد باینکه عدد بر این مکعب افزوده شود.

سپس، اگر H بزرگتر از AC باشد، در هر سه حالت، امتناع بطریق اولی پیش می‌آید. پس لازمست که H کمتر از AC باشد، والا مسئله ممتنع است. اینک از AC [قطعه‌ی] BC را مساوی H جدا می‌کنیم. خط BC یا مساوی AB ، یا بزرگتر، و یا کوچکتر از آنست. فرض می‌کنیم در شکل اول مساوی آن و در شکل دوم بزرگتر از آن و در شکل سوم کمتر از آن باشد، و در اشکال سه گانه مربع DC را تمام می‌کنیم، و بر نقطه‌ی D قطع زایدی می‌سازیم که خطوط AC و CE آنرا قطع نکنند، و آن در شکل اول DZ و در اشکال دوم و سوم DT است. و قطع مکافی می‌سازیم که رأس نقطه‌ی A و سهمش AC و ضلع قائمش BC باشد، و آن در شکل اول AT و در دومی AL و در سومی AK است. و هر دو قطع از جهت وضع معلومند. در شکل اول قطع مکافی از D می‌گذرد، زیرا مربع DB مساوی حاصل ضرب AB در BC است؛ پس D بر محیط قطع مکافی است. و با اندک تأملی توانی دریافت که قطع مکافی قطع زاید را در نقطه‌ی دیگری [نیز] قطع می‌کند. و در شکل دوم نقطه‌ی

D در خارج قطع مکافی است، زیرا مربع DB بزرگتر از حاصل ضرب AB در BC است.



درین صورت اگر دو قطع در نقطه‌ی دیگری به تماس یا تقاطع تلافی کنند - و در این حال عمود وارد [از این نقطه بر AC] ناچار بین نقاط A و B [بر AB] وارد می‌شود - مسئله ممکن است و الامتنع می‌باشد . و هندسه‌دان فاضل ، ابوالجود ، فکرش به این تماس یا تقاطع نرسید ، و باین جهت حکم کرد باینکه اگر BC بزرگتر از AB باشد مسئله ممتنع است ، و درین حکم بخطا رفت . و از اصناف ششگانه ، همین صنف است که ماهانی بدان دوچار شد . و در شکل سوم نقطه‌ی D داخل قطع مکافی است ، و بالنتیجه ، دو قطع یکدیگر را در دو نقطه تلافی می‌کنند .

و در جمیع حالات از نقطه‌ی تلافی عمودی بر AB فرود می‌آوریم . فرض کنیم این عمود در شکل دوم TZ باشد . و همچنین ، عمود دیگری از آن بر CE فرود می‌آوریم ، و آن TK است . پس سطح TC مساوی سطح DC است ، و بالنتیجه نسبت ZC به BC مثل نسبت BC به TZ است . و چون TZ از خطوط ترتیب قطع ATL است مربع آن مساوی حاصل ضرب AZ در BC است . پس نسبت BC به TZ مساوی نسبت TZ به AZ است . پس خطوط چهارگانه متناسبند ، و نسبت ZC به CB مثل نسبت CB به TZ و مثل نسبت TZ به ZA است . پس نسبت مربع ZC ، که اولی است ، به مربع BC ، که دومی است ، مثل نسبت BC است ، که دومی است ، به ZA ، که چهارمی است . بالنتیجه ، مکعب BC - که مساوی عدد مفروض است - مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع ZC و ارتفاعش ZA باشد . و چون مکعب ZC را بر هر دو بیفزائیم ، مکعب ZC با عدد مفروض مساوی مکعب مستطیلی خواهد بود که قاعده‌اش مربع ZC و ارتفاعش AC است ، و این مکعب مستطیل مساوی

$$(*) \text{ در هذلولی } ZC : BC = BC : TZ$$

$$\text{در سهمی } BC : TZ = TZ : ZA$$

$$\text{پس } \overline{ZC}^2 : \overline{BC}^2 = BC : ZA \text{ ، یا } \overline{ZC}^2 = \overline{BC}^2 \cdot ZA \text{ . بالنتیجه}$$

$$\overline{ZC}^2 + \overline{BC}^2 = \overline{ZC}^2 + \overline{ZC}^2 \cdot ZA = \overline{ZC}^2 \cdot AC \text{ ,}$$

$$\text{یا } \overline{ZC}^2 + a = c \cdot \overline{ZC}^2 \text{ ؛ پس } x = ZC$$

$$\text{معادلات قطوعی که در حل معادله بکار رفته } xy = a^{1/2} (c - x) \text{ و } y = a^{1/2} (c - x) \text{ است .}$$

[جملدی] عده‌ی مفروض اموال است ، و هوالمطلوب . و دو حالت دیگر بر همین قیاس است ، منتهی در شکل سوم ناچار دومکعب بدست می آید ، زیرا ، چنانکه ثابت شد ، هر [یک از دو] عمود [وارد از دو نقطه‌ی تقاطع دو قطع] ضلع مکعبی را از CA جدا می کند .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلفی دارد^{*} ، و بعضی مسائل آن ممتنع است ، و بوسیله‌ی قطع مکافی با قطع زاید حل شد .

[۵۰۷.۷ - §] صنف ششم از اصناف ششگانه‌ی سده‌تائی که مانده است آنست که مکعبی معادل اموال و عددی باشد[†] .

خط AB را مساوی عده‌ی اموال فرض می کنیم ، و مکعب مستطیلی با ارتفاع AB ، که قاعده‌اش مربع باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، می سازیم ، و فرض میکنیم ضلع قاعده‌ی آن BC باشد که بر AB عمود است . و مستطیل DB را تمام میکنیم ، و بر نقطه‌ی C ، که وضعش معلوم است ، قطع زایدی مرور می دهیم که خطوط AB و AD آنرا قطع نکنند ، و آن قطع CEZ است . و قطع دیگری ، مکافی ، بر رأس B میکشیم

(۵) معادله‌ی $x^3 - cx^2 + a = 0$ همواره یک ریشه‌ی حقیقی و منفی دارد ، و دو ریشه‌ی دیگرش مثبت یا موهومی‌اند . برای بحث در حالات مختلفی که خیام به آنها اشاره کرده به ذیل § ۵۰۷.۶ ، ص ۲۵۲ - ۲۵۳ رجوع کنید .

$$x^3 = cx^2 + a \quad (\dagger)$$

ترسیمات : $AB \cdot \overline{BC}^2 = a$ و $AB = c$

هندلولی متساوی‌القطرین CEZ با مجانبهای AB و AD و مار بر نقطه‌ی C ؛

سه‌می BEH بر رأس B و محور BK وضاع قائم AB .

حکم : $x = AK$.

پرهان . در هندلولی $BC : AK = EK : AB$ ؛ پس $\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{EK}^2 : \overline{AB}^2$ ؛

در سه‌می $AB : EK = EK : BK$ ؛ پس $\overline{AB}^2 : \overline{EK}^2 = \overline{BK}^2 : \overline{AB}^2$ ؛

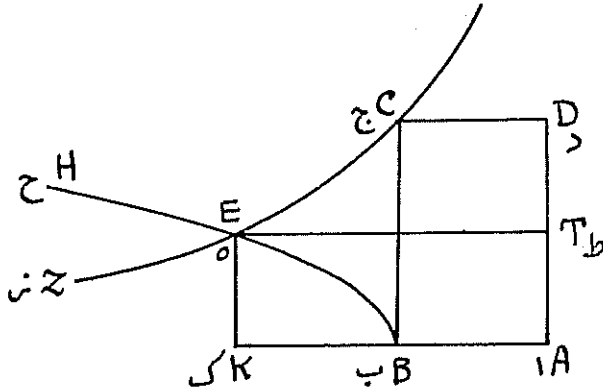
بالتبجیه $\overline{BC}^2 : \overline{AK}^2 = \overline{BK}^2 : \overline{AB}^2$ ، یا $\overline{BC}^2 \cdot \overline{AB}^2 = \overline{AK}^2 \cdot \overline{BK}^2$. پس

$$\overline{AK}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AK}^2 \cdot \overline{BK} = \overline{AK}^2 \cdot \overline{AB} + \overline{AB} \cdot \overline{BC}^2$$

یا $\overline{AK}^2 = c \cdot \overline{AK}^2 + a$. پس $x = AK$ ، و هوالمطلوب .

معادلات قطوعی که بکار برده شده $xy = \sqrt{ac}$ و $y^2 = c(x - c)$ است .

که همیشه بر استقامت AB و ضلع قائمش AB باشد، و آن BEH است. پس این دو قطع ناچار تلاقی میکنند. فرض کنیم در E تلاقی کنند. پس وضع E معلوم است.



و از E عمودهای ET و EK را بر AB و AD میکشیم. پس سطح EA مساوی سطح CA است، و بالنتیجه، نسبت AK به BC مثل نسبت AB به EK است، و مربعات آنها نیز متناسبند، اما مربع EK مساوی حاصل ضرب KB در AB است - زیرا EK در قطع BEH خط ترتیب است - پس نسبت مربع AB به مربع EK مثل نسبت AB به BK است. بنا براین، نسبت مربع BC به مربع AK مساوی نسبت BK به AB است، و بالنتیجه، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش AB است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع AK و ارتفاعش KB است، زیرا ارتفاعات آنها با قواعدها متناسبند. حال چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌ی آن مربع AK و ارتفاعش AB است بر هر دو بیفزائیم، مکعب AK مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش AB است - و این مکعب مستطیل را مساوی عدد مفروض ساختیم - باضافه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AK و ارتفاعش AB است - و این مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عدده‌ی مفروض اموال است. پس مکعب AK مساوی است با [جمله‌ی] عدده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی عدد مفروض.

و این صنف را حالات مختلف نیست، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نمیباشد^{۵۰}،
و بوسیله‌ی خواص دو قطع مکافی و زاید با هم حل شد.

[§ ۵۰۸] مقترنات چهارتائی سه با یک

[§ ۵۰۸.۱] و چون اصناف سدتائی را آوردیم، اینک می‌پردازیم به معادلات
چهارتائی چهار گانه که هر یک مرکب از معادله‌ی سه [مرتبه] با یک [مرتبه‌ی دیگر]
است^{۵۱}.

[§ ۵۰۸.۲] و صنف اول از چهارتائی‌های چهار گانه آنست که مکعبی و
مالها و اضلاع معادل عددی باشد[†].

BE را ضلع مربعی مساوی عده‌ی مفروض اضلاع قرار می‌دهیم؛ و مکعب
مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BE باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و
فرض میکنیم ارتفاع آن BC عمود بر BE باشد؛ و BD را، بر امتداد BC، مساوی

(۵) معادله‌ی $x^3 - cx^2 - a = 0$ همیشه یک ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی
دیگرش همواره موهومی‌اند.

§ ۵۰۲.۴.۱ (۵۵)

$$x^3 + cx^2 + bx = a \quad (\dagger)$$

ترسیمات: $\overline{EB}^2 \cdot BC = a$ و $\overline{EB}^2 = b$ و $BD = c$

دایره‌ی DZC بقطر DC؛

هذلولی متساوی‌القطرین CZ با مجانبهای EA و EK و مار بر نقطه‌ی C.

حکم: $x = BL$.

برهان. در هذلولی $ZB = LK$ ، پس $ZE - EL = BK - EL$ ، یا $ZB = LK$ ،
و لهذا $ZL : LC = TL : BL = EB : BL$ ، بالنتیجه $\overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2 = \overline{EB}^2 : \overline{BL}^2$ ،
از طرف دیگر، در دایره $\overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2 = DL : LC$ ، پس $\overline{ZL}^2 : \overline{LC}^2 = DL : LC$ ، و از
آنجا به ترتیب:

$$\overline{EB}^2 \cdot LC = \overline{BL}^2 \cdot DL = \overline{BL}^2 + \overline{BL}^2 \cdot BD,$$

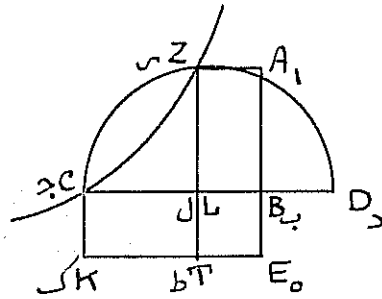
$$\overline{BL}^2 + BD \cdot \overline{BL}^2 + \overline{EB}^2 \cdot BL = \overline{EB}^2 \cdot LC + \overline{EB}^2 \cdot BL = \overline{EB}^2 \cdot BC,$$

$$\overline{BL}^2 + c \cdot \overline{BL}^2 + b \cdot BL = a.$$

پس $x = BL$ ، و هوالمطلوب.

معادلات قطوعی که بکار رفته $y^2 = \left(\frac{a}{b} - x\right)(x + c)$ و $xy = \sqrt{b} \left(\frac{a}{b} - x\right)$ است.

عده‌ی مفروض مالها می‌سازیم . سپس بقطر DC نیم‌دایره‌ی DZC را می‌کشیم ، و مستطیل BK را تمام می‌کنیم . و بر نقطه‌ی C قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط BE و EK آنرا قطع نکنند . پس این قطع دایره را در نقطه‌ی C قطع می‌کند ،



زیرا خط مماس آنرا که CK است قطع می‌کند . پس لازم است که آنرا در نقطه‌ی دیگری نیز قطع کند . فرض کنیم آنرا در Z قطع کند . پس وضع Z معلوم است ، زیرا وضع دایره و قطع معلوم می‌باشد . حال از Z عمودهای ZA و ZT را بر EK و EA فرود می‌آوریم . پس سطح ZE مساوی سطح BK است ، و چون EL را که مشترک است اسقاط کنیم ، نتیجه می‌شود که سطح ZB مساوی سطح LK است . بالنتیجه ، نسبت ZL به LC مثل نسبت EB به BL است ، زیرا EB مساوی TL می‌باشد . و همچنین مربعات آنها نیز متناسبند . اما ، بعلاوه [خواص] دایره ، نسبت مربع ZL به مربع LC مساوی نسبت DL به LC است . پس نسبت مربع EB به مربع BL مساوی نسبت DL به LC می‌باشد . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع EB و ارتفاعش LC است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش DL است . اما این مکعب مستطیل اخیر مساوی است با مکعب BL باضافه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش BD است که [BD] مساوی عده‌ی مفروض مالها است . چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع EB و ارتفاعش BL است ، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی جذرها است بر هر دو بیفزائیم ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع EB و ارتفاعش BC است ، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم ،

مساوی می‌شود با مکعب BL باضافه‌ی همچند [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن، باضافه‌ی همچند [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم.

پس این صنف حالات مختلف ندارد، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست \square ، و بخواس قطع زاید و دایره با هم حل شد.

[§ ۵۰۸.۰۳] صنف دوم از اصناف چهار گانده‌ی چهارتائی آنست که مکعبی و مالها و عده معادل اضلاع باشد $\square\square$.

AB را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع و BC را مساوی عده‌ی مفروض مالها و عمود بر AB قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع AB باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و فرض می‌کنیم BD، که بر استقامت BC است، ارتفاع آن باشد. حال، پس از اتمام مستطیل BE، بر نقطه‌ی D قطع زایدی مرور

(\square) معادله‌ی $x^2 + cx^2 + bx - a = 0$ همواره يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی‌اند.

$$x^2 + cx^2 + a = bx \quad (\square\square)$$

ترسیمات: $\overline{AB}^2 = b$ و $BC = c$ و $\overline{AB}^2 \cdot BD = a$ ؛

هذلولی متساوی‌القطرین ZDH با مجانبهای AB و AE و مار بر نقطه‌ی D؛

هذلولی متساوی‌القطرین TDH بر رأس D و محور کانونی DL و ضلع قائم DC.

حکم: $x = BL$.

برهان. در هذلولی اول $AH = AD - EM + DH$ ، پس $AH - EM + DH = AD - EM + DH$ ،

و یا $EL = LM$. پس $\overline{AB}^2 : \overline{BL}^2 = \overline{HL}^2 : \overline{LD}^2$.

در هذلولی دوم $HL = LD \cdot CL$ ، و لهذا $\overline{HL}^2 = LD \cdot CL$. پس بترتیب:

$$\overline{AB}^2 : \overline{BL}^2 = CL : LD,$$

$$\overline{BL}^2 \cdot LC = \overline{AB}^2 \cdot LD,$$

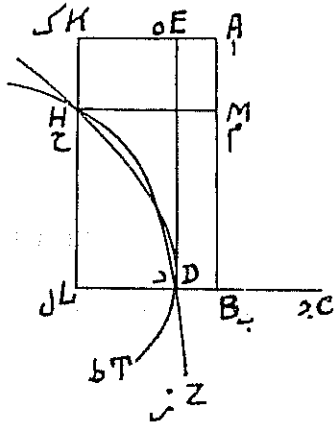
$$\overline{BL}^2 + \overline{BL}^2 \cdot BC + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{AB}^2 \cdot LD + \overline{AB}^2 \cdot BD = \overline{AB}^2 \cdot BL,$$

$$\overline{BL}^2 + c \cdot \overline{BL}^2 + a = b \cdot BL.$$

پس $x = BL$.

معادلات قطوعی که بکار رفته $y^2 = (x - \frac{a}{b})(x + c)$ و $xy = \sqrt{b}(x - \frac{a}{b})$ است.

می‌دهیم که خطوط AB و AE آنرا قطع نکنند، و آن ZDH است. و قطع زاید دیگری بر رأس D می‌سازیم که سهمش در امتداد BD باشد، و هر یک از اضلاع قائم



و مایل آن مساوی DC باشد، و آن TDH است. و ناچار این قطع قطع اول را در D قطع می‌کند. پس اگر بشود که در نقطه‌ی دیگری متلاقی شوند مسئله ممکن است، و الا ممتنع است. و این تلافی، به صورت تماس یا تقاطع در دو نقطه، مبتنی بر مقالده‌ی چهارم کتاب مخروطات است، و حال آنکه [در § ۵۰۱۰۴] عهد کرده بودیم که جز بدو مقاله ازین کتاب توسط نجوئیم. اما این امر مخل عهد ما نیست، زیرا همینقدر که دو قطع متلاقی شوند تفاوتی نکند که این تلافی بصورت تماس یا تقاطع باشد؛ این مطلب را بدان. و تلافی ممکن است بصورت تماس باشد یا تقاطع؛ اما اگر یکی از دو قطع دیگری را در نقطه‌ای غیر از D قطع کند ناچار آنرا در دو نقطه [ی دیگری] قطع میکند.

و در هر حال، از نقطه‌ی تقاطع یا تلافی، هر چه باشد - فرض کنیم نقطه‌ی H باشد - دو عمود HM و KHL را میکشیم. این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلومند، زیرا وضع نقطه‌ی H معلومست. پس سطح AH مساوی سطح AD است، و چون EM را که مشترك است اسقاط کنیم، MD و EH میماند که برابرند، و اگر DH را بآنها

بیزائیم، ML مساوی EL خواهد بود، و بالتیجه اضلاع این دو متکافی اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. پس نسبت مربع AB به مربع BL مثل نسبت مربع HL است به مربع LD . و اما، چنانکه بکرات ثابت کردیم، نسبت مربع HL به مربع LD مثل نسبت CL است به LD . پس نسبت مربع AB به مربع BL مثل نسبت CL به LD میباشد. و بالتیجه مکعب مستطیلی که ارتفاعش LD و قاعده‌اش مربع AB است مثل مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش LC است. لکن این مکعب مستطیل اخیر مساویست با مجموع مکعب BL و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BL و ارتفاعش BC است و مساوی [جملدی] عده‌ی مفروض مالهاست. و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BD است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، بهر دو بیزائیم، مکعب BL با [جملدی] عده‌ی مالهای آن و با عدد مفروض مساوی خواهد بود با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع AB و ارتفاعش BL است و مساوی [جملدی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BL است، و مقصود همین بود.

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و گاهی در مسائل آن دوزلع، متعلق به دو مکعب، پیدا میشود، و گاهی در آن، یعنی در مسائل آن، امتناع پیش می‌آید^{*}، و این صنف بوسیله‌ی خواص دو قطع زاید حل شد، و همین بود که میخواستیم ثابت کنیم.

[§ ۵۰۸۰۴] صنف سوم از اصناف چهارگانه‌ی چهارتائی آنست که

مکعبی و اضلاع و عدد معادل مالها باشد[†].

(*) معادله‌ی موردبخت، $x^2 + cx^2 - bx + a = 0$ ، همواره يك ریشه‌ی حقیقی

و منفی دارد، که مورد توجه خیام نیست. دوریشه‌ی دیگر آن حقیقی و مثبت یا موهومی میباشد.

$$x^2 + bx + a = cx^2 \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $BE = c$ و $\overline{BC}^2 = b$ و $AB = a$ و \overline{BC}^2 . بقطر AE نیمدایره‌ای میکشیم،

و عمود BC را امتداد میدهیم و CM را بموازات AE رسم می‌کنیم. طریقی که خیام سرانجام و پس

از ذکر حالات خاص و جزئیاتی بیفایده می‌آورد اینست که مستطیلی که يك ضلعش CZ و سطحش

مساوی سطح مستطیل CA باشد رسم می‌کند. فرض کنیم H رأس مقابل به C از این مستطیل باشد.

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

خط BE را مساوی عدوی مفروض مالها میگیریم ، و BC را ضلع مربعی مساوی عدوی اضلاع ، و BC را عمود بر BE قرار می دهیم ، و مکعب مستطیلی میسازیم که قاعده اش مربع BC باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و فرض میکنیم ارتفاعش AB و در امتداد BE باشد ، و بر AE نیمدایرهی AZE را میکشیم . پس نقطه ی C یا داخل دایره واقع میشود ، یا بر محیط آن ، و یا در خارج آن .

اولا فرض میکنیم C داخل دایره واقع باشد ، و BC را امتداد می دهیم تا دایره

بقیه ی ذیل صفحه ی قبل

بر H هذلولی با مجانبهای CZ و CM می کشیم ، و فرض می کنیم L یکی از نقاط تقاطع آن با دایره و K تصویر L بر AE باشد . کوئیم $BK = x$.

برهان . بنابر خاصیت هذلولی $LC = CH = CA$ پس $LC + CK = CA + CK$ ،

یا $TK = DK$ ؛ بالنتیجه $LK \cdot BK = KA \cdot BC$ ، ولهذا $\overline{LK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{BC}^2 : \overline{BK}^2$.

اما چون L بر دایره است $LK : KA = KE : LK$ پس $(LK:KA) \cdot (KE:LK) = \overline{LK}^2 : \overline{KA}^2$.

بالنتیجه $\overline{BC}^2 : \overline{BK}^2 = KE : KA$ ، و یا $\overline{BC}^2 \cdot KA = \overline{BK}^2 \cdot KE$. پس

$$\overline{BK}^2 + \overline{BC}^2 \cdot BK + \overline{BC}^2 \cdot AB = \overline{BK}^2 \cdot KE + \overline{BK}^2 = \overline{BK}^2 \cdot BE,$$

و یا $\overline{BK}^2 + b \cdot BK + a = c \cdot \overline{BK}^2$ ، و هوالمطلوب .

اما حالات بیفایده ای که خیام قبل از این طریقه می آورد از این فراراست که ابتداء سدحالت

تشخیص می دهد :

$$(I) \quad C \text{ داخل نیمدایره } (b^2 < ac) ;$$

$$(II) \quad C \text{ بر نیمدایره } (b^2 = ac) ;$$

$$(III) \quad C \text{ خارج نیمدایره } (b^2 > ac) .$$

در حالت (I) فرض کنیم Z نقطه ی تلاقی BC با نیمدایره باشد . مستطیل CH را که یک ضلعش CZ و همسطح CA است می سازد ، و سپس حالت مذکور را به سه حالت تقسیم می کند :

$$H (I_1) \text{ داخل نیمدایره } (a^{2/2} + b^2 \sqrt{c} < \sqrt{a} bc)$$

$$H (I_2) \text{ بر محیط نیمدایره } (a^{2/2} + b^2 \sqrt{c} = \sqrt{a} bc)$$

$$H (I_3) \text{ در خارج نیمدایره } (a^{2/2} + b^2 \sqrt{c} > \sqrt{a} bc)$$

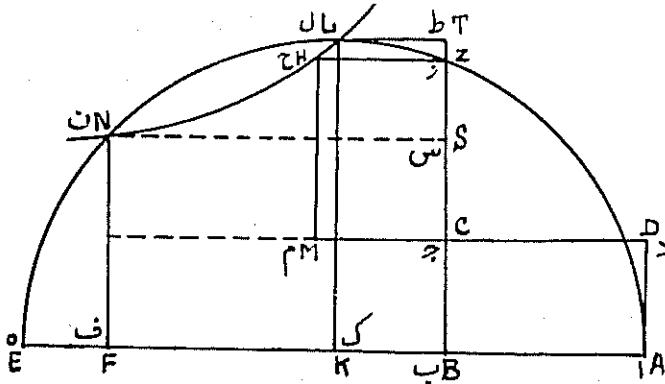
در حالت I_1 قطع زاید مار بر H و با مجانبهای CZ و CM دایره را در دو نقطه قطع می کند ، و اگر K و F تصاویر این دو نقطه بر AE باشند ، برطبق برهانی که گذشت معلوم می شود

که BK و BF جوابهای معادله اند . سایر مطالب خیام را در متن ملاحظه می فرمایند . معادلات قطوع سابق الذکر که در حل معادله بکار برده شده عبارتست از

$$xy = \sqrt{b} \left(x + \frac{a}{b} \right),$$

$$y^2 = \left(x + \frac{a}{b} \right) (c - x).$$

را در Z قطع کند، و مستطیل AC را تمام می‌کنیم، و بر ZC مستطیلی همسطح



مستطیل AC می‌سازیم، و آن مستطیل CH است. وضع نقطه‌ی H معلومست، زیرا سطح CH از حیث مقدار معلومست، و مقدار زوایای آن نیز معلوم می‌باشد، و خط ZC از حیث وضع و مقدار معلومست.

و این نقطه‌ی H یا داخل دایره، یا بر محیط آن، و یا در خارج آنست. اولاً فرض می‌کنیم H داخل دایره باشد، و بر نقطه‌ی H قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط ZC و CM آنرا قطع نکنند. درین وضع، قطع زاید دایره را ناچار در دو نقطه قطع می‌کند. فرض کنیم آنرا در دو نقطه‌ی I و N قطع کند. پس این دو نقطه از حیث وضع معلومند. و از آنها عمودهای LK و NF را بر AE و از نقطه‌ی L عمود LT را بر BZ فرود می‌آوریم. سطح LC مساوی CH خواهد بود، و CH مثل CA است. و چون CK را بهر دو بیضائیم DK مساوی TK خواهد بود، و لهذا اضلاع آنها متکافی‌اند، و مربعات اضلاع آنها نیز چنین است. اما، بعلت [خواص] دایره؛ نسبت مربع LK به مربع KA مثل نسبت EK به KA است. پس لازم آید که نسبت مربع BC به مربع BK مساوی نسبت EK به KA باشد. بالنتیجه، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BC و ارتفاعش KA است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش KE باشد. لکن مکعب مستطیل اول مساوی است با [جمله‌ی]

عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BK بعلاوه‌ی همچند عدد مفروض . و چون مکعب BK را بهر دو بیفزائیم ، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش BE است - و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BK است - مساوی خواهد بود با مجموع مکعب BK با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن و با عدد مفروض ، و بهمین برهان ، مکعب BF نیز چنین است . و این در صورتی بود که نقاط C و H در داخل دایره قرار گیرند .

اما اگر H در خارج دایره واقع شود ، و قطع را بسازیم ، گاهی دایره را به تماس یا تقاطع تلافی میکند (همین حالت ازین صنف است که ابوالجود در مسئله‌ای که بزودی آنرا خواهیم گفت ذکر کرده است) ، و مطلب به همان [حالت] که گفتیم برمی گردد . و اگر قطع دایره را تلافی نکند ، باز هم مستطیل را برخطی کوتاه‌تر از ZC ، و یا ، در حالت دیگر ، بلندتر از آن میکشیم* . درین صورت ، اگر قطع دایره را تلافی نکند مسئله ممتنع است ، و برهان امتناع آن معکوس آنست که گفتیم .

[ثانیاً] اگر C بر محیط دایره یا خارج آن قرار گیرد ، CZ را امتداد میدهیم ، و مستطیلی رسم می کنیم که یک گوشه‌ی آن بر C واقع شود ، و چنان باشد که چون بر گوشه‌ی مقابل زاویدی C قطعی [زاید] بهمان صفت که مذکور شد مرور دهیم ، این قطع دایره را به تماس یا تقاطع تلافی کند ، و این امر با عده‌ی کمی امتحانات متوالی و حالتی از یک قاعده‌ی ساده دانسته شود ، ولی از ذکر این قاعده چشم پوشیدم تاخوانندگان این رساله را تمرینی باشد ، چو کسی که این اندازه استنباط نتواند هیچ ازین رساله نخواهد فهمید ، زیرا این رساله مبتنی است بر کتابهای سه گانه که از آنها یاد کردیم .

و امتناع حالات ممتنع را با معکوس کردن برهانی که برای حالات ممکن گفتیم ثابت میکنیم ، و آن اینکه ضلع مکعب باید از EB ، که عده‌ی مفروض مالها

(*) عملی است لغو .

است، کوتاهتر باشد \square ، چو اگر مساوی عده‌ی مفروض مالها باشد، این مکعب مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای خود خواهد بود، بدون اینکه چیز دیگری از قبیل عدد یا اضلاع آن بر آن افزوده شود. و اگر ضلع مکعب بزرگتر از عده‌ی مفروض مالها باشد، مکعب خود بزرگتر از [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها، آن خواهد بود، چه رسد باینکه چیز دیگری بآن اضافه شود. پس ثابت شد که ضلع مکعب باید کوچکتر از عده‌ی مفروض مالها باشد. حال از BE [جزئی] مساوی ضلع مکعب جدا می‌کنیم، و فرض میکنیم [این جزء] BF باشد، و از F عمودی [بر BE] تا محیط دایره می‌کشیم. سپس برهائی را که ذکر شد معکوس می‌کنیم. نتیجه میشود که رأس عمود بر محیط قطع زایدی قرار دارد که گفته شد ممکن نیست دایره را قطع کند، و این محال است \dagger .

(۵) اگر $x \geq c$ ، نتیجه می‌شود $cx^2 \geq x^2$ ، و بطریق اولی $cx^2 + bx + a > x^2$.
 (+) مقصود اثبات اینست که اگر قطوع مذکور متلاقی نباشند مسئله ممنوع است. توضیح استدلال خیام باین شرح است. ثابت شد که اگر معادله جوابی داشته باشد آن جواب از c (یعنی BE) کمتر است. پس BF را مساوی این جواب جدا کرده از F عمودی بر AE می‌کشیم تا دایره را در N قطع کند. چون BF جواب معادله است خواهیم داشت:

$$(۱) \quad \overline{BF}^2 + \overline{BC}^2 \cdot BF + \overline{BC}^2 \cdot AB = BE \cdot \overline{BF}^2$$

(رجوع شود به ذیل صفحہ ۲۱۴). اما طرف دوم مساوی $\overline{BF}^2 + \overline{BF}^2 \cdot EF$ است.

پس بموجب (۱)، $\overline{BC}^2 \cdot BF + \overline{BC}^2 \cdot AB = \overline{BF}^2 \cdot EF$ ، و یا

$$(۲) \quad \overline{BC}^2 \cdot AF = \overline{BF}^2 \cdot EF.$$

اما چون N بر دایره است، $\overline{NF}^2 \cdot AF = \overline{AF}^2 \cdot EF$ ، پس بموجب (۲)،
 $\overline{NF} \cdot FB = FA \cdot \overline{AD}$. بنابراین، مستدلیلهای SF و DF متساوی اند، و پس از اسقاط CF نتیجه می‌شود $NC = AC = CH$. بالنتیجه، نقطه‌ی N بر هذلولی مار بر H و با مجانبهای ZC و CM قرار دارد، و این خلاف فرض است. فهوالمطلوب.

در سایر حالات «امتناع»، خیام، هرگاه دو قطعی که در حل مسئله بکار می‌برد متلاقی نکنند، بدون استدلال حکم به امتناع می‌کند. استدلال فوق‌الذکر، که مانند بسیاری از حواشی این قسمت، از جبر عمر خیام و یک‌گه گرفته شده (ص ۵۳)، با تغییر مناسب در سایر اصناف نیز قابل اجراء است.

و چون گمان می کنم که این امتحانات ممکن است بر بعضی از خوانندگان این رساله دشوار باشد، این طریقه را کنار میگذاریم، و قاعده‌ای می آوریم که از این امتحانات بی نیاز باشد، و آن اینست که برخطی دلخواه بر استقامت $C - BC$ هر جا باشد، در داخل [دایره] یا در خارج [آن] - مستطیلی می سازیم که یک گوشه‌ی آن بر C باشد، و مساوی سطح AC باشد. پس وضع و مقدار اضلاع آن ناچار معلوم خواهد بود. سپس بر گوشه‌ی مقابل گوشه‌ی C قطع زایدی می کشیم که خطوط ZC و CM آنرا قطع نکنند - و CM خطی است عمود بر $[ZC]$ نقطه‌ی C . پس اگر قطع دایره را به تماس یا تقاطع تلاقی کند مسئله ممکن و الامتنع است، و برهان بر امتناع آنست که ذکر کردیم.

[§ ۵۰۸۰۴۰۱-] و [پیش از ما] یکی از هندسه دانان دوچار این صنف شد، و آنرا حل کرد، ولی حالات مختلف آنرا ثابت نکرد، و بفکرش نرسید که گاهی مسائل این صنف، چنانکه ثابت کردیم، ممتنع است. پس این مطلب را بدان، و نیز قانون دیگر حل این صنف و تمیز مسائل ممکن آنرا از حالات ممتنع دریاب. و این صنف بوسیله‌ی خواص دایره با خواص قطع زاید حل شد، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم.

و اما مسئله‌ای که یکی از متأخرین را دوچار این صنف کرد اینست: « ده را بدو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعات دو قسمت بعلاوه‌ی خارج قسمت جزء بزرگتر بر جزء کوچکتر هفتاد و دو باشد »^{۵۴}. پس، بر طبق عادت علمای جبر در امثال این تقسیمات، یکی از دو قسمت را شیء گرفت و دیگری را ده منهای شیء. سپس مسئله منجر شد به معادله‌ی مکعبی و پنج عدد و سیزده و نیم ضلع آن

(۵) اگر یکی از اجزاء را به x نمایش دهیم معادله‌ی مسئله اینست:

$$(10 - x)^2 + x^2 + (10 - x)/x = 72$$

یا $10x^2 + 13.5x + 5 = x^2$. ج. و ابهای این معادله عبارتند از $x = 2$ و

$x = 4 \pm \sqrt{74}/2$. درین مسئله نقاط C و H هر دو در خارج دایره قرار دارند، و حکم

بخلاف آن، که در متن آمده، ناشی از اشتباه نسخ یا خیام است.

با ده مال . و درین مسئله دو نقطه‌ی C و H درست در داخل دایره قرار می‌گیرند . و این مرد فاضل مسئله‌ی مذکور را - که جماعتی از فضالای عراق ، از جمله ابوسهل کوهی ، خدا همدهی آنانرا رحمت کند ، پس از کوشش بسیار از حلش عاجز شدند - حل کرد؛ منتهی این حل کننده - که خداوند از او خوشنود باد - با مراتب فضل و مقام بلندی که در ریاضیات داشت ، متوجه حالات مختلف سابق الذکر نشد ، و حال آنکه در مسائل این صنف بعضی ممتنع است . و این فاضل همان ابوالجود یا شتی* است . و خدا داناست .

[۵۰۸۰۵ -] صنف چهارم از اصناف چهارگانه آنست که اعداد و اضلاع و مائلها معادل مکعب باشد †

فرض می‌کنیم BE ضلع مربعی مساوی عده‌ی اضلاع باشد ؛ و مکعب مستطیلی

(*) ابوعبدالله محمد ابن احمد الشنی ، از ریاضیون معاصر ابوالجود یا کمی پیش از زمان

وی بوده است . رجوع شود به سوتر ، ریاضیون و منجمین عرب ، ص ۹۷ - ۹۸ .

$$x^3 = cx^2 + bx + a \quad (\dagger)$$

ترسیمات : $BC = c$ ، $\overline{BE}^2 . AB = a$ ، $\overline{BE}^2 = b$ ؛

هذلولی متساوی القطرین HTK با مجانبهای EM و ES و مار بر H ؛

هذلولی متساوی القطرین LCT با رأس C و محور کانونی CN و ضلع قائم AC ،

حکم : $x = NB$ ؛

برهان . در هذلولی اول $EA = HE = TE$ ؛ پس $TB = AS$ ، و لهذا

$$\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{SN}^2 = \overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 .$$

در هذلولی دوم $\overline{TN}^2 = NC . AN$ ، یا $\overline{AN}^2 : \overline{TN}^2 = AN : NC$. پس بترتیب

$$\overline{NB}^2 : \overline{BE}^2 = AN : NC ,$$

$$\overline{BE}^2 . AN = \overline{NB}^2 . NC ,$$

$$\overline{BE}^2 . AB + \overline{BE}^2 . NB + \overline{NB}^2 . BC = \overline{NB}^2 . NC + \overline{NB}^2 . BC = \overline{NB}^3 ,$$

$$a + b . NB + c . \overline{NB}^2 = \overline{NB}^3 ,$$

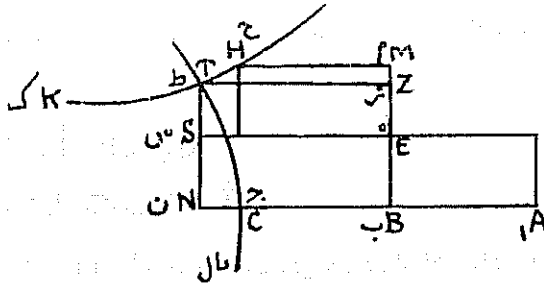
پس $x = NB$

معادلات قطوعی که بکار رفته عبارتست از :

$$xy = \sqrt{b} \left(x + \frac{a}{b} \right) ,$$

$$y^2 = \left(x + \frac{a}{b} \right) (x - c) .$$

می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BE باشد، و مساوی عدد مفروض باشد، و ارتفاع آن AB را عمود بر BE می‌گیریم؛ و BC را بر امتداد AB مساوی عددی مفروض مالها فرض میکنیم. سپس مستطیل AE را تمام می‌کنیم، و BE را بطول دلخواه EM امتداد می‌دهیم، و بر EM که مفروض گرفتیم مستطیلی مساوی AE می‌سازیم، و آن EH است. پس وضع نقطه‌ی H معلومست. حال بر H قطع زایدی می‌سازیم که خطوط



ES و EM آنرا قطع نکنند، و آن HTK است. پس وضع این قطع معلومست. و طع زاید دیگری می‌سازیم که رأس آن نقطه‌ی C و سهمش در امتداد BC باشد، و بریک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد، و آن قطع LCT است، و وضعش معلوم می‌باشد، و ناچار قطع HTK را تلاقی می‌کند. فرض کنیم آنرا در نقطه‌ی T تلاقی کند. پس وضع T معلومست، و چون از آن دو عمود TZ و TN را بر BC و BM بکشیم، این دو عمود از حیث وضع و مقدار معلوم خواهند بود، و TE مساوی EH می‌شود که خود مساوی EA است، و چون EN را بر هر دو بیفزائیم، AS مساوی TB می‌شود، و بالنتیجه، اضلاع این دو متکافی‌اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. اما، چنانکه بکرات ثابت کردیم، باقتضای قطع زاید LCT ، نسبت مربع TN به مربع AN مساوی نسبت NC است به AN . پس نسبت مربع BE به مربع BN مثل نسبت NC است به NA . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش AN است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BN و ارتفاع آن CN است. اما اولی مساوی مکعب مستطیلی است که مربع HE بر آن محیط است و ارتفاعش AB

است، و آنرا مساوی عدد ساختیم، با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BN است، و مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض اضلاع مکعب BN می‌باشد. حال مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BN و ارتفاعش BC است، و مساوی [جمله‌ی] عددهی مفروض مالهای مکعب BN می‌باشد، به هر دو اضافه می‌کنیم. لازم می‌آید که مکعب BN مساوی باشد با [جمله‌ی] عددهی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عددهی مفروض اضلاع آن و با عدد مفروض، و این همانست که می‌خواهیم ثابت کنیم. و این صنف حالات مختلف ندارد، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست \ast .

[۵۰۹] § مقترنات چهارتائی دو با دو

[۵۰۹۰۱ -] و چون اصناف چهارگانه‌ی چهارتائی [سه با یک] را آوردیم، اینک می‌پردازیم به اصناف سه‌گانه $\ast \ast$ که هر یک عبارتست از معادله‌ی دو [مرتبه] با دو [مرتبه‌ی دیگر].

[۵۰۹۰۲ -] صنف اول از اصناف سه‌گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که مکعب و مالها معادل اضلاع و عدد باشد \dagger .

(\ast) معادله‌ی $x^2 - cx^2 - bx - a = 0$ همواره یک ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی است.

($\ast \ast$) § ۵۰۲۰۴۰۲

$$x^2 + cx^2 = bx + a \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $\overline{BD}^2 = b$ ، $BC = c$ ، و $S = a$ ، $\overline{BD}^2 \cdot S = a$. بر حسب اینکه $S < BC$ یا $S = BC$ یا $S > BC$ سه حالت تشخیص می‌دهیم. بحث فعلی راجع به حالت اول است. حالت اول $S < BC$.

ترسیمات. AB را مساوی S جدا کرده مستطیل ED را مساوی مستطیل AD می‌سازیم. هذلولی متساوی‌القطرین EH را با مجانبهای DZ و DO بر نقطه‌ی F ، و هذلولی متساوی‌القطرین AHT را بر رأس A و محورکانولی AB و ضلع قائم AC می‌کشیم.

حکم: $x = KB$.

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

BD را ضلع مربعی مساوی عدهی اضلاع می گیریم و CB را عدهی مفروض اموال ، و CB عمود بر AB است . سپس مکعب مستطیلی می سازیم که قاعده اش مربع BD باشد ، و مساوی عدد مفروض باشد ، و فرض می کنیم ارتفاع آن S باشد . خط S یا بزرگتر از BC است ، و یا کوتاهتر از آن ، و یا مساوی آن .

اولا فرض می کنیم S کوتاهتر از BC باشد . و از BC [جزء] AB را مساوی S جدا می کنیم ، و مستطیل AD را تمام می کنیم ، و بر امتداد BD طول دلخواه DZ را میگیریم ، و بر DZ مستطیلی مساوی AD می سازیم ، و آن ED است . پس وضع E معلوم است ، و اضلاع مستطیل ED جملهگی از حیث وضع و مقدار معلومست . سپس بر E قطع زایدی مرور می دهیم که خطوط ZD و DO آنرا تلافی نکنند ، و آن قطع EH است . پس وضع EH معلومست . و قطع زاید دیگری می کشیم که رأسش نقطه ی A و سهمش AB و هر یک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد . و آن قطع AHT است ، و ناچار قطع دیگر را تلافی میکند . فرض کنیم آنرا در H تلافی کند . پس وضع H معلومست ، و چون از آن دو عمود HK و HL را بکشیم وضع و مقدار آنها معلوم خواهد بود ، و مستطیل HD مساوی ED می شود ، که خود مساوی AD

بقیه ی ذیل صفحه ی قبل

برهان . در هذلولی اول ، $HD = ED = AD$ ، پس $HB = AM$ ، و لهذا

$$\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{MK}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{KB}^2 .$$

در هذلولی دوم ، $\overline{HK}^2 : \overline{KA}^2 = \overline{CK} : \overline{AK}$ ،

پس بترتیب :

$$\overline{BD}^2 : \overline{KB}^2 = \overline{CK} : \overline{AK} ,$$

$$\overline{KB}^2 \cdot \overline{CK} = \overline{BD}^2 \cdot \overline{AK} ,$$

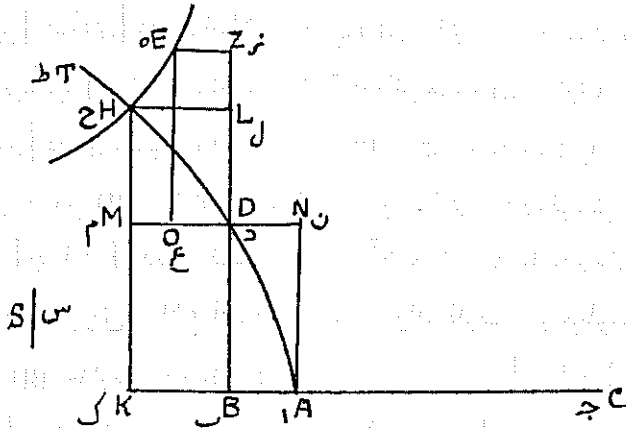
$$\overline{KB}^2 + \overline{KB}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BD}^2 \cdot \overline{KB} + \overline{BD}^2 \cdot \overline{AB} ,$$

$$\overline{KB}^2 + c \cdot \overline{KB}^2 = b \cdot \overline{KB} + a .$$

پس $x = \overline{KB}$.

معادلات قطوع مذکور عبارتست از $(x + \frac{a}{b})^2 = y^2$ و $xy = \sqrt{b}(x + \frac{a}{b})$.

است ، و چون DK را بر هر دو بیفرزائیم ، سطح HB مساوی AM در میآید ، و بالنتیجه



اضلاع آنها متكافی اند ، و همچنین است مربعات اضلاع آنها . اما چنانکه بکرات ثابت کردیم ، باقی‌نمای قطع AHT ، نسبت مربع HK به مربع KA مثل نسبت CK به AK است . پس نسبت مربع BD به مربع KB مثل نسبت CK به AK است . پس مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش AK است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش CK است . اما این مکعب مستطیل اخیر مساوی است با مجموع مکعب BK و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BK و ارتفاعش BC است ، و مساوی [جملدی] عددهی مفروض اموال میباشد . و مکعب مستطیل اول مساویست با مجموع مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش AB است - و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم - و مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BK است ، و مساوی [جملدی] عددهی مفروض اضلاع مکعب BK است . پس مکعب BK با [جملدی] عددهی مفروض مالهای آن مساویست با عدد مفروض و [جملدی] عددهی مفروض اضلاع آن مکعب ، و هوالمطلوب .

و [ثانیاً] اگر S مساوی BC باشد، BD خود ضلع مکعب مطلوبست \square ، و برهان آن اینکه [از يك طرف] مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش نیز BD است - و برابر [جمله‌ی] عده‌ی اضلاع مکعب BD میباشد - مساویست با مکعب BD . و [از طرف دیگر] مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش BC است - و برابر [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BD است - مساویست با مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش S است، و مساوی عدد مفروض میباشد. پس مکعب BD با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن مساویست با عدد مفروض بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مکعب، و هوالمطلوب. و معلومست که درین حالت مکعب BD بعلاوه‌ی عدد مفروض مساویست با مجموع [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن و [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن. پس [این حالت از] این صنف داخل در صنف سوم است که معادله‌ی مکعب و عدد با مالها و اضلاع باشد.

و [ثالثاً] اگر S بزرگتر از BC باشد، AB را مساوی S قرار می‌دهیم، و قطع دوم را بر نقطه‌ی C می‌گذرانیم چنانکه هر يك از اضلاع [قائم و مایل] آن مساوی AC باشد، و آن ناچار قطع دیگر را تلاقی می‌کند، و باز هم ضلع مکعب [مطلوب] BK است، و باقی عمل و برهان شبیه آنست که گذشت، الا اینکه نسبت مربع HK به مربع KA مثل نسبت AK به KC میباشد \square .

پس ثابت شد که این صنف حالات مختلف دارد، و یکی از حالات آن داخل

(۵) حالت دوم $S = BC$ (رجوع شود به ذیل † صفحه‌ی ۲۲۱).

حکم: $x = BD$.

برهان. از يك طرف $BD = b$. $BD^2 = \overline{BD}^2$ ، و از طرف دیگر

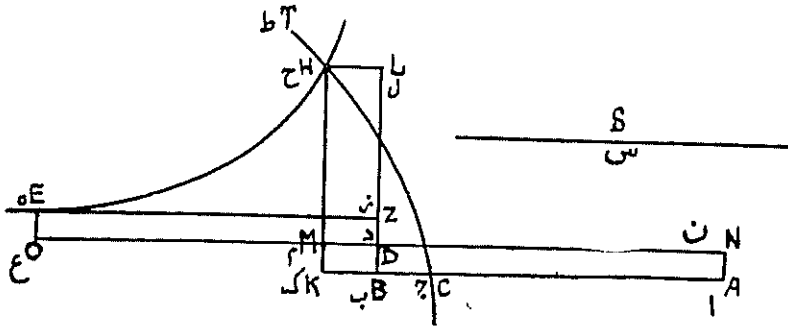
$$S = a \cdot \overline{BD}^2 \cdot BC = \overline{BD}^2 \cdot S = a$$

$$\overline{BD}^2 + \overline{BD}^2 \cdot BC = b \cdot BD + a.$$

فهوالمطلوب.

(۵) بعبارت دیگر، نقش نقاط A و C تعویض میشود.

صنف سوم است، و هیچیک از مسائل آن ممتنع نیست^۵، و به خواص دو قطع زاید حل شد.



[§ ۵۰۹۰۳ -] صنف دوم از اصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که مکعبی و اضلاع معادل مالها و عدد باشد^۶.

(۵) معادله‌ی $x^3 + cx^2 - bx - a = 0$ همیشه يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد، و دو ریشه‌ی دیگرش منفی یا موهومی اند. حالاتی که خیام تشخیص می دهد مطابقست با $a < bc$ و $a > bc$ و $a = bc$.

$$x^3 + bx = cx^2 + a \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $BC = c$ ، $\overline{BD}^2 = b$ ، $\overline{BD}^2 \cdot S = a$ ، بر حسب اینکه $S < BC$ یا $S = BC$ یا $S > BC$ ، خیام سه حالت تشخیص میدهد.

حالت اول: $S < BC$. قطعه‌ی AB را مساوی S جدا میکنیم، و نیمدایره‌ای بقطر AC و هذلولی متساوی القطرینی با مجانبهای DB و DZ و مار بر A میکشیم. بموجب خاصیت هذلولی $AD = KD$ ؛ پس $AD - MZ + AK = KD - MZ + AK$ ، یا $BK = AL$ ، بالنتیجه

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{LE}^2 : \overline{BE}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2,$$

و بموجب خواص دایره $\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = EC : EA$ ؛ پس بترتیب:

$$\overline{BD}^2 \cdot EA = \overline{BE}^2 \cdot EC,$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot EA = \overline{BE}^2 + \overline{BE}^2 \cdot EC = \overline{BE}^2 \cdot BC,$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot BE = BC \cdot \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot AB,$$

$$\overline{BE}^2 + b \cdot BE = c \cdot \overline{BE}^2 + a.$$

پس $X = BE$. اثبات دو حالت دیگر در ذیل صفحات ۲۲۷ و ۲۲۸ آمده است.

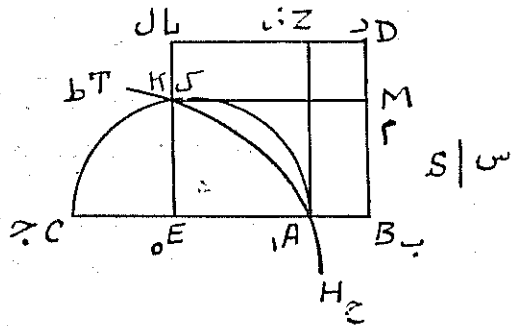
معادلات قطوعی که در حل معادله بکار رفته عبارتست از

$$xy = \sqrt{b} \left(x - \frac{a}{q} \right),$$

$$y^2 = \left(x - \frac{a}{b} \right) (c - x).$$

BC را مساوی عده‌ی مفروض اموال و BD را ضلع مربعی مساوی عده‌ی اخلاص و عمود بر BC قرار می‌دهیم، و مکعب مستطیلی مساوی عدد مفروض می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد، و فرض میکنیم ارتفاعش S باشد. پس S یا کوتاهتر از BC است، یا مساوی آن، و یا بلندتر از آن.

اولا فرض میکنیم کوتاهتر از آن باشد، و از BC [طول] BA را مساوی S جدا می‌کنیم، و AD را تمام می‌کنیم، و بر قطر AC دایره‌ی AKC را می‌کشیم.



پس وضع این دایره معلومست. سپس بر نقطه‌ی A قطع زایدی مرور می‌دهیم که خطوط BD و DZ آنرا قطع نکنند، و آن قطع HAT و وضعش معلومست. و چون HAT خط AZ را که بر دایره مماس است قطع می‌کند، دایره را نیز قطع می‌کند، چو اگر بین آنها [یعنی بین دایره و مماس AZ] واقع شود، چنانکه آپولونیوس در شکل ششم مقاله‌ی دوم [کتاب مخروطات] ثابت کرده است، خواهیم توانست که از نقطه‌ی A خطی مماس بر قطع بکشیم. درین صورت، این خط [مماس] یا بین AZ و دایره واقع میشود، و این ممتنع است، و یا خارج AZ قرار می‌گیرد، و درین حال AZ خط مستقیمی خواهد بود واقع بین قطع و این خط مماس، و این نیز ممتنع است. پس قطع TAH بین دایره و AZ واقع نتواند بود، و بالنتیجه آنرا قطع می‌کند. و ناچار آنرا در نقطه‌ی دیگری [نیز] قطع میکنند. فرض کنیم آنرا در K قطع کند. پس وضع K معلومست، و چون از آن عمودهای KM و KE را بر BC و BD بکشیم،

چنانکه دانستی، وضع و مقدار این دو عمود معلوم خواهد بود. و چون مستطیل KD را تمام کنیم، سطح AD مساوی سطح KD خواهد بود، و اگر MZ را از هر دو اسقاط کنیم، و AK را بیفزائیم، BK مساوی AL در می آید، و بالتسبیح، اضلاع آنها متکافی اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. لکن نسبت مربع KE به مربع EA مثل نسبت EC به EA است. پس نسبت مربع BD به مربع BE مثل نسبت EC است. بنا برین، مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش EA است مساوی مکعب مستطیلی است که قاعده اش مربع BE و ارتفاعش EC است. و چون مکعب BE را به هر دو بیفزائیم، مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BE و ارتفاعش BC است مساوی میشود با مکعب BE و مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش EA است. اما مکعب مستطیل اول مساوی است با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BE. حال مکعب مستطیلی را که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش BA است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختیم، به هر دو می‌افزائیم. پس مکعب BE بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده اش مربع BD و ارتفاعش BE است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب میباشد، برابر [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال مکعب بعلاوه‌ی عدد مفروض خواهد بود، و هوالمطلوب.

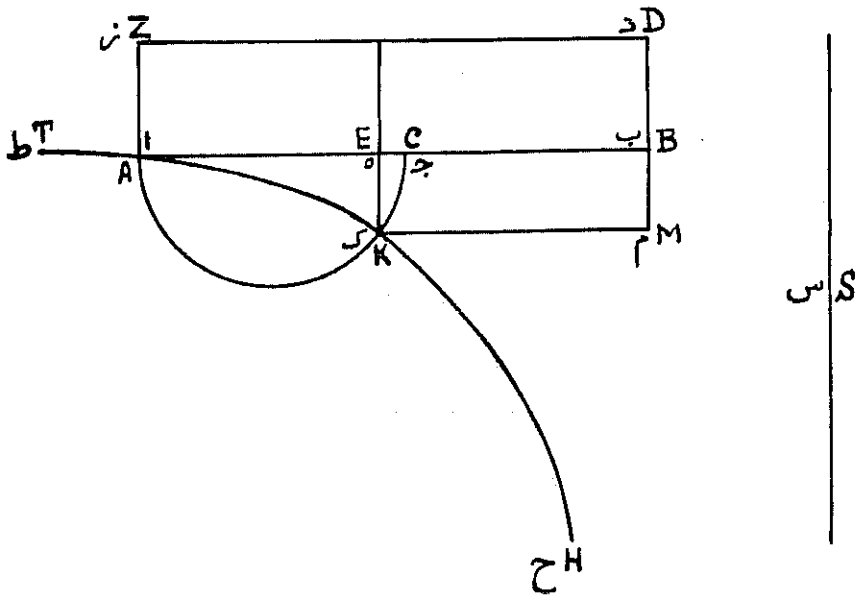
و ثانیاً اگر S مساوی BC باشد، BC خود ضلع مکعب مطلوب است. برهانش اینکه مکعب BC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالها است. و مکعب مستطیلی که ارتفاعش BC و قاعده اش مربع BD است مساوی عدد مفروض است، و همین مکعب مستطیل مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC نیز هست. پس مکعب BC بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن مساویست با [جمله‌ی]

(۵) حالت دوم: (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۵). گوئیم اگر $X = BC$ ، $S = BC$

زیرا از یک طرف $\overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2 = BC \cdot \overline{BC}^2$ ، و از طرف دیگر $\overline{BC}^2 = BC \cdot \overline{BD}^2$ و یا $b \cdot BC = a$. پس $c \cdot \overline{BC}^2 + a = b \cdot BC + \overline{BC}^2$. فهوالمطلوب. ضمناً بموجب تساویهای مذکور $b \cdot BC + \overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2 + a$ ، و این معادله تعلق به صنف سوم (§ ۵۰۹۰۴) دارد.

عده‌ی مفروض مالهای آن با عدد مفروض [فهوالمطلوب] . و این حالت نیز داخل، صنف سوم است، زیرا [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC مساوی عدد مفروض است. پس مکعب BC بعلاوه‌ی عدد مفروض مساوی است با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن.

و [ثالثاً] اگر S بلندتر از BC باشد، BA را مساوی S قرار می‌دهیم، و دایره‌ای



(۵) حالت سوم (جوع شود به ذیل صفحه ۲۲۵). فرض کنیم $S > BC$. طول AB را مساوی S جدا کرده قطوع را میسازیم. در هذلولی $AD = KD$ ، و لهذا $EZ = EM$. پس

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{BD}^2 : \overline{BE}^2 .$$

در دایره

$$\overline{KE}^2 : \overline{EA}^2 = EC : EA .$$

پس بترتیب :

$$\begin{aligned} \overline{BE}^2 \cdot EC &= \overline{BD}^2 \cdot EA , \\ \overline{BE}^2 &= \overline{BD}^2 \cdot EA + \overline{BE}^2 \cdot BC , \\ \overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot BE &= \overline{BD}^2 \cdot AB + BC \cdot \overline{BE}^2 , \\ \overline{BE}^2 + b \cdot BE &= a + c \cdot \overline{BE}^2 . \end{aligned}$$

فهوالمطلوب .

بقطر AC می کشیم. قطع [زاید] مار بر A، چنانکه ثابت کردیم، دایره را در K قطع میکند. سپس، چنانکه در شکل سابق عمل کردیم، از نقطه‌ی K عمودهای KE و KM را اخراج می‌کنیم. درین صورت، EB ضلع مکعب [مطلوب] است، و برهان این مطلب مانند آنست که گذشت: چون مستطیل مشترک ED را اسقاط کنیم، اضلاع EM و EZ متکافیی خواهند بود، و مربعات آنها نیز چنین است. پس برهان این حالت، بعینه و بدون هیچ تفاوتی، مانند آنست که گذشت.

پس معلوم شد که این صنف حالات و انواع مختلف دارد، و یکی از انواع آن داخل در صنف سوم است، و هیچیک از مسائل آن غیر ممکن نیست^۴، و بوسیله‌ی خواص دایره و قطع زاید حل شد.

[§ ۵۰۹۰۴-] صنف سوم از اصناف سه گانه‌ی چهارتائی که مانده بود اینست که مکعبی و عددی مساوی اضلاع و مالها باشد^۴.

(*) معادله‌ی $x^3 - cx^2 + bx - a = 0$ همیشه يك ریشه‌ی حقیقی و مثبت دارد. در حالات دوم و سوم ($a/b > c$)، دو ریشه‌ی دیگر موهومی‌اند. ولی در حالت اول ($a/b < c$) ممکن است هر سه ریشه حقیقی و مثبت باشند، و متأسفانه این مطلب مهم از نظر خیام پنهان مانده است (رجوع شود به § ۴۰۳۰۴۰۰).

$$x^3 + a = cx^2 + bx \quad (\dagger)$$

فرض کنیم $BC = c$ ، $\overline{BD} = b$ ، $S = a$ ، $\overline{BD}^2 = b$ ، بر حسب اینکه $S < BC$ یا $S = BC$ یا $S > BC$ سه حالت تشخیص می‌دهیم.

حالت اول: $S < BC$. طول AB را مساوی S جدا می‌کنیم، و دو هذلولی متساوی القطرین می‌سازیم، یکی (HAT) با مجانبهای BD و DZ و مار بر A، و دیگری (KCL) با رأس C و محور کانونی CE و ضلع قائم AC.

$$\text{حکم: } x = BE$$

برهان. در هذلولی اول $DA = DM$ پس $DA - ZN + AM = DM - ZN + AM$

$$\text{یا } NE = ZE \text{، بنابراین}$$

$$\overline{ME}^2 : \overline{EA}^2 = \overline{DB}^2 : \overline{BE}^2$$

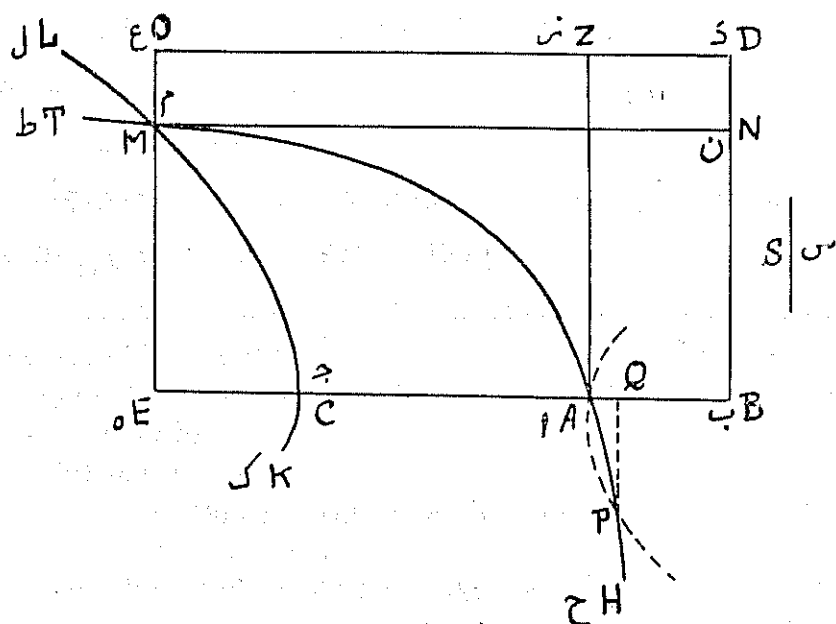
در هذلولی دوم $EA : CE = \overline{EA}^2 : \overline{ME}^2$ پس بترتیب

$$\overline{BE}^2 \cdot CE = \overline{BD}^2 \cdot EA$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

BC را عده‌ی اموال و BD را ، که بر آن عمود است ، ضلع مربعی مساوی عده‌ی جذرها میگیریم ؛ و مکعب مستطیلی می‌سازیم که قاعده‌اش مربع BD باشد ، و با عدد مفروض مساوی باشد ، و فرض می‌کنیم ارتفاع آن S باشد . پس خط S یا کوتاهتر از BC است ، یا مساوی آن ، و یا بزرگتر از آن .

اولا فرض می‌کنیم کوتاهتر از آن باشد ، و از BC [قطعه‌ی] BA را مساوی S جدا می‌کنیم و BZ را تمام می‌کنیم ، و بر نقطه‌ی A قطع زایدی می‌کشیم که BD



و DZ آنرا تلاقی نکنند ، و آن قطع HAT است . و قطع زاید دیگری می‌کشیم که

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$\overline{BE}^2 \cdot BC + \overline{BE}^2 \cdot CE (= \overline{BE}^2) = \overline{BE}^2 \cdot BC + \overline{BD}^2 \cdot EA ,$$

$$\overline{BE}^2 + \overline{BD}^2 \cdot AB = \overline{BE}^2 \cdot BC + \overline{BD}^2 \cdot BE ,$$

$$\overline{BE}^2 + a = c \cdot \overline{BE}^2 + b \cdot BE .$$

فہوالمطلوب .

معادلات قطوع مذکور $(x-c)$ و $y^2 = (x - \frac{a}{b})$ و $xy = \sqrt{b}(x - \frac{a}{b})$ است .

برای سایر حالات به ذیل صفحات ۲۳۱ و ۲۳۲ رجوع شود .

رأس نقطه‌ی C و سهمش بر استقامت BC باشد، و هریک از اضلاع قائم و مایل آن مساوی AC باشد، و آن KCL است، و ناچار قطع دیگر را تلاقی می‌کند. فرض کنیم قطع KCL و قطع HAT در نقطه‌ی M تقاطع کنند. پس وضع نقطه‌ی M معلومست - زیرا وضع قطع‌ها معلوم می‌باشد - و چون ازین نقطه عمودهای MN و EMO را بکشیم، وضع و مقدار این دو معلوم خواهد بود. پس سطح DA مساوی سطح DM است، و چنانکه چندین بار ثابت کردیم، NE مساوی ZE می‌باشد، و بالنتیجه اضلاع آنها متکافی‌اند، و همچنین است مربعات اضلاع آنها. اما، باقتضای قطع KCL، نسبت مربع ME به مربع EA مثل نسبت CE به EA است. پس نسبت مربع BD به مربع BE مثل نسبت CE به EA می‌باشد. بنابراین، مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش EA است مساویست با مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش CE است. و چون مکعب مستطیلی را که قاعده‌اش مربع BE و ارتفاعش BC است، و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مالهای مکعب BE است، به آنها بیفزائیم، مکعب BE مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش EA است خواهد بود. اینک مکعب مستطیلی را که ارتفاعش BA و قاعده‌اش مربع BD است، و آنرا مساوی عدد مفروض ساختم، بهر دو اضافه می‌کنیم. نتیجه می‌شود که مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع BD و ارتفاعش BE است - و مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BE می‌باشد - بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای مکعب BE مساویست با مکعب BE بعلاوه‌ی عدد مفروض [، فهوالمطلوب].

و [نائیاً] اگر S مساوی BC باشد ^۵، BC خود ضلع مکعب [مطلوب] است.

(۵) حالت دوم: $S = BC$ (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۹). کوئیم $x = BC$. زیرا

از یک طرف $\overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2 = BC \cdot \overline{BC}^2$ ، و از طرف دیگر $\overline{BC}^2 = S \cdot \overline{BD}^2$ ، یا $a = b \cdot BC$ پس $a = c \cdot \overline{BC}^2 + b \cdot BC$ ، و هوالمطلوب.

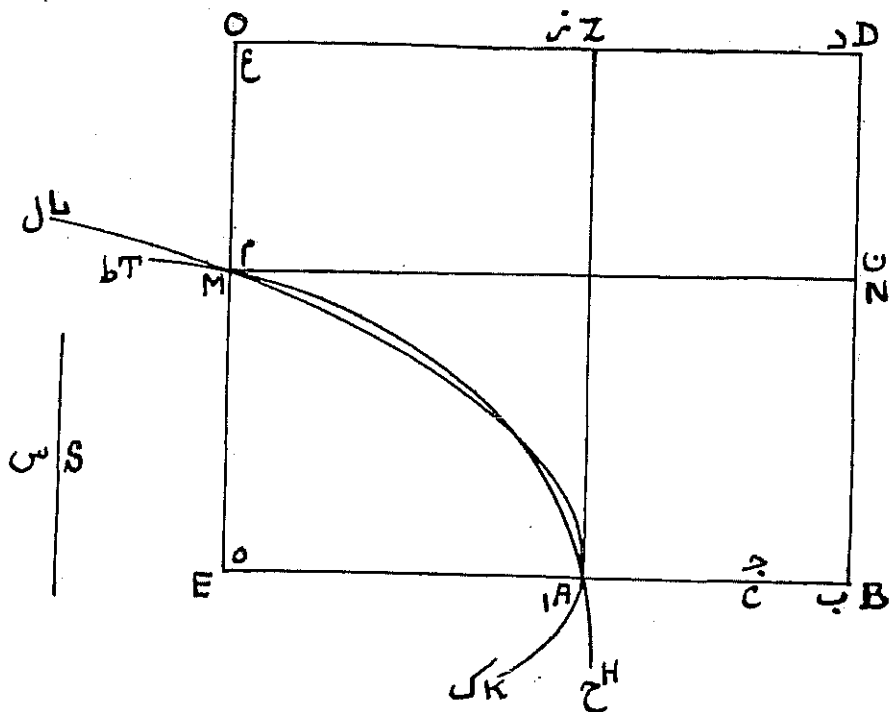
ضمناً $a + \overline{BC}^2 = c \cdot \overline{BC}^2 + b \cdot BC$ ، و این معادله تعلق به صنف دوم (§۵۰۹۰۳) دارد.

باید دانست که در این حالت $a + \overline{BD}^2 = c \cdot \overline{BD}^2 + b \cdot BC$ ، و لهذا BD نیز جواب معادله

است، ولی این جواب از نظر خیام پنهان مانده است.

برهانش آنکه مکعب BC مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اموال آن است، و عدد مفروض مساوی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع مکعب BC می‌باشد. پس مکعب BC با عدد مفروض مساویست با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن، و مقصود همین بود. و [درین حالت] مکعب BC بعلاوه‌ی [جمله‌ی] عده‌ی مفروض اضلاع آن با [جمله‌ی] عده‌ی مفروض مالهای آن بعلاوه‌ی عدد مفروض نیز مساویست. پس این حالت داخل صنف دوم است.

و [ثالثاً] اگر S بلندتر از BC باشد، BA را مساوی S قرار می‌دهیم و مستطیل را تمام می‌کنیم، و قطع اول را بر A و دومی را نیز بر A مرور می‌دهیم، و



(۵) حالت سوم: $S > BC$ (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۲۹). AB را مساوی S

جداً رده هندولوی HAT را مانند حالت اول و هندولوی KML را بر رأس A و محورکائونی AE و ضلع قائم AC میسازیم، و مانند همان حالت استدلال می‌کنیم.

این دو قطع تقاطع می کنند. پس اگر دگر بار تلاقی کنند - خواه در يك نقطه مماس شوند و یا در دو نقطه تقاطع کنند، چنانکه از مقالیدی چهارم کتاب مخروطات معلوم است - مسئله ممکن است، و الامتنع می باشد. و اگر تقاطع کنند، چون از نقاط تقاطع دو عمود بکشیم، این دو عمود دو ضلع برای دو مکعب [که هر يك جواب معادله‌ی مورد بحث است] جدا می سازند. و برهان آن، بدون هیچ تفاوتی، مانند آنست که گذشت.

پس معلوم شد که این صنف حالات مختلف دارد، و بعضی از آنها ممتنع است^۵، و بوسیله‌ی خواص دو قطع زاید حل شد.

[§ ۵۰۹۰۵ تبصره -] و معلوم شد که این سه صنف چهارتائی متداخل اند، یعنی اولی را حالتی است که عیناً از حالات صنف دوم است، و حالتی از دومی هست که حالتی از صنف سوم می باشد، و حالتی از سومی هست که بعینه حالتی از دومی است - چنانکه توضیح دادیم.

[§ ۵۰۱۵ معادلات کسری]

[§ ۵۰۱۵۰۱ مقدمه -] چون اصناف بیست و پنجگانه از مقدمات جبر و مقابله را به انجام رسانیدیم، و آنچه را گفتنی بود بتمامی گفتیم، و حالات هر صنف از آنها را بدست آوردیم، و درمسائل اصنافی که امتناع در آنها پیش می آید، قانونی برای باز شناختن آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است بدست دادیم، و معلوم

(*) معادله‌ی مفروض بصورت $x^2 - cx^2 - bx + a = 0$ است. درحالت اول ($a < bc$) معادله همواره دو ریشه‌ی مثبت دارد. بازا $a < bc$ ، خیام فقط یکی از ریشه‌ها را بدست می آورد (ریشه‌ی دیگر از تقاطع هذلولی HAT با شاخه‌ی دیگر هذلولی KCL بدست می آید). بازا $a = bc$ ریشه‌ی مثبت دیگر معادله $x = \sqrt{b}$ یا $x = BD$ است. در حالت سوم ($a > bc$)، خیام گوید دو قطع مماس اند (ریشه‌ی مضاعف $x = \frac{1}{c} + \frac{1}{c} \sqrt{3b + c^2}$)، یا متقاطعتند (ریشه‌ی مثبت متفاوت)، و بیا یکدیگر را قطع نمی کنند (امتناع). باید دانست که در هر حال معادله يك ریشه‌ی منفی دارد.

کردیم که اکثر آنها خالی از مسائل ممتنع است^۵ ، اینک به اجزای این اصناف می پردازیم .

[§ ۵۰۱۵۰۲ جزء -] جزء⁺ شیء عددی است که نسبت آن به واحد مثل نسبت واحد باین شیء باشد . پس اگر آن چیز سه باشد جزئش يك سوم است ، و اگر آن چیز يك سوم باشد جزئش سه است ، و نیز اگر چهار باشد جزئش يك چهارم است ، و اگر يك چهارم باشد جزئش چهار است . و بطور کلی ، جزء هر عدد جزئی است که از آن نام می گیرد⁺⁺ ، مانند يك سوم از سه (اگر عدد صحیح باشد) و سه از يك سوم (اگر عدد کسری باشد) . و نیز جزء مال جزئی است که از عدد مساوی این مال نام می گیرد ، خواه این عدد صحیح باشد یا کسری ، و همچنین است در مورد کعب . و برای اینکه این مطلب محسوس تر باشد این اجزاء را در جدولی قرار می دهیم :

جزء کعب	جزء مال	جزء جذر
$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$
واحد	جذر	کعب
۱	۲	۸

(۵) از ۲۵ صنف مذکور ، که در § ۴۰۳۰۴۰۲ (ص ۱۴۵ - ۱۴۶) طبقه بندی شده ، فقط معادلات ۸ ، ۱۱ ، ۱۴ ، ۱۷ ، ۲۵ ، ۲۱ ، و ۲۵ ممکن است جواب حقیقی و مثبت نداشته باشند ، و در این صورت ، بزعم خیام ، این معادلات ممتنع خواهند بود .
(+) آنچه خیام « جزء a » میخواند همان $1/a$ است که امروز « عکس a » نامیده میشود .
n جزء a ، یعنی n/a .

گرخی در کتاب فخری (§ ۳۰۴۰۵۰۷) در تعریف « جزء » باین معنی گوید : « جزء هر عدد چیزی است که چون در آن عدد ضرب شود واحد حاصل گردد » .

نیز باید دانست که در اصطلاح ریاضیون قدیم ، هر گاه مقداری بدفعات صحیح در مقداری دیگر بکنجد ، یا عدد صحیحی عدد صحیح دیگر را عاد کند ، مقداریا عدد کوچکتر جزء دیگری خوانده میشود . (مثلا رجوع شود به تحریر اقلیدس ؛ ص ۷۱ و ۹۹ . نیز به هیث ، سیزده مقاله ، جلد ۲ ، ص ۱۱۵ و ۲۸۰) .

(++) این تعبیر از یونانیان گرفته شده است . مثلا رجوع شود به صفحه ۳ از کتاب پول ور آک ، مذکور در ذیل صفحه ۸۲ از کتاب حاضر .

§ ۵۰۱۰۰۳ مراتب هفتگانه -] پس نسبت جزء کعب به جزء مال مثل نسبت جزء مال به جزء جذر و مثل نسبت جزء جذر به واحد و مثل نسبت واحد به جذر و مثل نسبت جذر به مال و مثل نسبت مال به کعب است. پس این مراتب هفت مرتبه اند متوالیاً بريك نسبت $\frac{1}{x}$. و ما فقط در معادلات بين این مراتب صحبت خواهیم داشت. و اما جزء مال مال و جزء مال کعب و جزء کعب کعب و مراتب بعد، تا هر جا پیش رود، نیز متوالیاً متناسب اند، ولی ما را حاجت بذکر آنها نیست، زیرا راهی به استنباط [جواب معادلات مشتمل بر] آنها نداریم.

§ ۵۰۱۰۰۴ معادلات بین اجزاء -] و بدانکه اگر يك هشتم را که جزء کعب است کعب انگاری، جزء آن هشت خواهد بود که آن، بالعکس، همان کعب است \dagger ، و سایر جزء ها را باید بر همین قیاس کنی. پس این چهار مرتبه - جزء کعب و جزء مال و جزء جذر و واحد - در حکم کعب و مال و جذر و واحد است. مثلاً اگر گفته شود که جزء مال معادل نصف جزء جذر است $\dagger\dagger$ چنان باشد که گفته شود مالی معادل نصف جذر است؛ پس مال يك چهارم است، و آن جزء مال [مطلوب] است، و بالنتیجه، مال مطلوب چهار می باشد، و جزء آن يك چهارم و جزء جذرش يك دوم است. و در مفردات باید به همین قیاس عمل کرد. و اما در معادلات مرکب. اگر گفته شود جزء مال و دو جزء جذر معادل يك و

(۶) مراتب هفتگانه مذکور عبارتند از

$$۱) x^3 \quad ۲) x^2 \quad ۳) x \quad ۴) ۱ \quad ۵) 1/x \quad ۶) 1/x^2 \quad ۷) 1/x^3,$$

و این مراتب متناسبند:

$$\frac{1}{x^3} : \frac{1}{x^2} = \frac{1}{x^2} : \frac{1}{x} = \frac{1}{x} : 1 = 1 : x = x : x^2 = x^2 : x^3.$$

(\dagger) مقصود اینست که اگر $1/x^2$ را مثلاً z^2 بگیریم، جزء z^2 (یعنی $1/z^2$) همان

x^2 خواهد بود.

($\dagger\dagger$) یعنی $1/x^2 = \frac{1}{4} (1/x)$. این معادله، بازاء $z = 1/x$ ، بصورت $z^2 = \frac{1}{4} z$ در

می آید، و از این نتیجه می شود $z^2 = 1/4$. پس $x^2 = 4$ و $1/x = 1/2$ و $1/x^2 = 1/4$.

يك چهارم است ^۵ ، چنان باشد که گفته شود مالی و دو جذر معادل يك و يك چهارم است . پس بطریقی که ثابت کردیم ، جذر را يك دوم و مال را يك چهارم بدست می آوریم ، منتهی در مسئله جزء مال و جزء جذر گفته شده . پس يك چهارم که مال اول است جزء مال مطلوب می باشد . پس مال مطلوب چهار است .

و در معادلات چهارتائی نیز طریق عمل همین است . [مثلا] اگر گفته شود جزء مكعب و سه جزء مال و پنج جزء جذر معادل سه و سه هشتم است ^{۵۵} ، چنان باشد که گویند كعبی و سه مال و پنج جذر معادل سه و سه هشتم است . پس بطریقی که بوسیله ی قطوع مخروطی بیان کردیم ضلع مكعب را تعیین می کنیم ، و آن جزء جذر مطلوب است . پس نسبت آنرا به واحد مفروض مساوی نسبت این واحد مفروض به خطی دیگر قرار می دهیم ، و این خط همان ضلع مكعب مطلوب است .

پس معلوم شد که بیست و پنج صنف دیگر از اینگونه معادلات بین این چهار مرتبه هست که [هر يك] با [یکی از] بیست و پنج صنف سابق الذکر متناسب است [†] .

[§ ۵۰۱۵۰۵ - تبصره -] اما ضرب بعضی از این مراتب [هفتگانه] در برخی معلوم و از کتابهای علمای جبر آشکار است ، و خواننده می تواند در آن بیندیشد ، و ما سخن را به ذکر آن دراز نمی کنیم ^{††} .

[§ ۵۰۱۵۰۶ حل معادلات مراتب هفتگانه -] و اما معادلات بین این چهار

(۵) $1/x^2 + 2/x = 1/4$. معادله ی $z^2 + 2z = 1/4$ را حل می کنیم : $z = 1/4$ و $z^2 = 1/4$. پس $x^2 = 4$.

(۵۵) $1/x^3 + 3/x^2 + 5/x = 3/8$. معادله ی $z^3 + 3z^2 + 5z = 3/8$ را حل می کنیم . اگر z ریشه ی ازین معادله باشد ، طول l که از $l = 1$: $1 = 1$ استخراج شود جواب معادله ی اولیه است .

(†) یعنی ۲۵ صنف حاصل از تبدیل x به $1/x$ در ۲۵ صنف سابق الذکر (۴۰۳ . ۳۰۴ . ۳۰۵) .
(††) این یادآوری مقدمه ایست برای حل معادلات هفتگانه ، که در آنها حاجت به ضرب قوای مجهول در یکدیگر پیش می آید .

[مرتبه] و چهار [مرتبه‌ی] سابق الذکر چنانست که اینک به شرح آن می‌پردازیم .
 §۵۰۱۵۰۶۰۱ مفردات - مثال اول -] اگر گفته شود کعبی معادل ده جزء کعب است - یعنی معادل ده جزء خودش است - گوئیم کعب اولین مرتبه از مراتب هفتگانه [⊕] است ، و اجزای کعب هفتمین آنها است . پس آنها را در یکدیگر ضرب کن ، و جذر حاصل ضرب را بگیر . آنچه بدست آید مرتبه‌ی وسطی (یعنی چهارم) است ^{⊕⊕} ، و همان کعب مطلوب می‌باشد [†] . و تفصیل مطلب اینکه هر عددی چون در جزء خود که از آن نام گرفته ضرب شود واحد حاصل شود ، و اگر در دو جزء خود ضرب شود دو حاصل گردد ، و اگر در ده جزء خود ضرب شود ده عدد بدست آید ^{††} . پس در مسئله‌ی مورد بحث چنانست که گفته شده باشد کدام کعب است که چون در مثل خودش ضرب شود ده حاصل گردد . پس جذر ده همان کعب مطلوب است ، و سپس ، استخراج ضلع این مکعب بطریقی که بوسیله‌ی قطوع مخروطی بیان کردیم بعمل می‌آید .

[مثال ۴۵ -] و نیز اگر گفته شود کدام مال است که معادل شانزده جزء از اجزای خود که از آن نام گرفته است باشد ^x ، واحد را در شانزده ضرب کن و جذر حاصل را بگیر ، و آن چهار است ، و همین چهار مال مطلوب می‌باشد . زیرا ، بقیاس آنچه گذشت ، [این مسئله] در حکم اینست که گفته شود کدام مال است که چون در مثل خودش ضرب شود شانزده حاصل گردد .

[مثال سوم -] و نیز اگر گفته شود کدام جذر است که معادل چهار جزئش باشد ^{xx} ، چنانست که گفته شود کدام عدد است که چون در مثل خود ضرب شود چهار

(⊕) رجوع شود به ذیل § ۵۰۱۵۰۳

(⊕⊕) مرتبه‌ی وسطی ، یا مرتبه‌ی چهارم ، عدد است .

(†) معادله‌ی مورد بحث $x^2 = 10/x^2$ است . استدلال خیام ، که بلافاصله بعد توضیح

میدهد اینست که $x^2 = (10/x^2) x^2 = 10$ ، و بالتیجه $x^2 = \sqrt{10}$.

(††) یعنی بطور کلی $a/x^n \cdot x^n = a$.

(x) $x^2 = 16/x^2$ (xx) $x = 4/x$

حاصل گردد، و آن دو است.

[مثال چهارم - حالات لاینحل -] اما اگر گفته شود کدام مال است که معادل عده‌ای از اجزای مکعب ضلعش باشد \ominus ، حل آن به طریقی که بیان کردیم ممکن نشود، چو حل این مسئله محتاج به درج چهار خط است بین دو خط که هر شش خط متوالیاً بر يك نسبت باشند $\ominus\ominus$ ، چنانکه ابوعلی ابن هیثم \dagger رحمه الله تعالی ثابت کرده است، منتهی این مطلب سخت دشوار است، و نمیشود آنرا به این کتابمان ملحق کنیم.

و همچنین است اگر گفته شود کدام مکعب است که معادل عده‌ای از جزء‌های مال ضلعش باشد $\dagger\dagger$ ، این نیز محتاج مقدمه‌ی مذکور است، و لهذا حل آن بوسیله‌ی راههای ما ممکن نیست.

و بطور کلی، هر گاه مراتب اول و ششم از این هفت مرتبه در یکدیگر ضرب شود \times ، چنانکه ابوعلی ابن هیثم رحمه الله تعالی ثابت کرده است، احتیاج پیدا می‌شود به درج چهار خط بین دو خط بطوری که هر شش متوالیاً بر يك نسبت باشند.

[مثال پنجم -] اما اگر گفته شود کدام مکعب معادل شازده جزء ضلع آنست $\times\times$ ، مرتبه‌ی اول را در [مخرج] مرتبه‌ی پنجم ضرب می‌کنیم. جذر جذر

حل این معادله به معادله‌ی درجه‌ی پنجم $x^5 = a$ برمی‌گردد

($\ominus\ominus$) اگر x و y و v و w چنان تعیین شود که

$$1 : x = x : y = y : v = v : w = w : a,$$

بآسانی معلوم توان کرد که $x^2 = a/x^3$.

$$x^3 = a/x^2 \quad (\dagger\dagger) \quad \S 304506 \quad (\dagger)$$

(\times) یعنی هر گاه عمل به ضرب « مراتب اول و ششم » (رجوع شود به ذیل $\S 501503$) منجر شود؛ و این درست نیست، زیرا مرتبه‌ی اول x^3 و مرتبه‌ی ششم $1/x^2$ است. ظاهراً مقصود خیام از عبارت مذکور اینست که عمل منجر شود به ضرب مرتبه‌ای در مخرج مرتبه‌ای که، در مراتب هفتگانه (ذیل $\S 501503$) نسبت به اولی‌شعین است، و این شامل ضرب x^3 در مخرج $1/x^2$ (در معادله‌ی $x^3 = a/x^2$) و ضرب x^2 در مخرج $1/x^3$ (در معادله‌ی $x^2 = a/x^3$) می‌شود. مثال پنجم مذکور در متن شاهد صحت این توجیه است.

$$. x = \sqrt[3]{16/x} \quad (\times\times) \quad x^3 = 16/x \quad \text{حل: } x = (16/x) \quad x^3 = 16 \quad \text{یا } x^6 = 16 \quad \text{یا } x = \sqrt[6]{16}$$

حاصل همان ضلع مکعب مطلوب است. و در معادله‌ی هریک از این مراتب هفتگانه با مرتبه‌ای که از آن، در تناسب متوالی، پنجمین است به همین قیاس عمل می‌شود. [مثال ۵۰۱۵۰۶۰۲ § معادلات مرکب - مثال اول] اما در مرکبات، مثلاً جذری معادل واحد و دو جزء جذر است^۵. و آن در حکم اینست که مالی معادل جذر و دو باشد، زیرا این سه [مرتبه‌ی اخیر] با سه مرتبه‌ی مذکور متناسبند. پس آنرا [یعنی معادله‌ی اخیر را] بطریق مذکور حل می‌کنیم. مال مساوی چهار درمی‌آید، و آن معادل جذر خود با دو عدد است. پس جذر این [مال] همان مطلوب است، و جذر این مال دو است، و معادل واحد و دو جزء جذر این مال می‌باشد. [مثال دو - ۴] و نیز اگر گفته شود مالی و دو جذر آن معادل واحد و دو جزء جذر است، در حکم اینست که کعب و دو مال معادل جذر و دو باشد. پس ضلع مکعب را چنانکه بیان کردیم بوسیله‌ی قطوع مخروطی استخراج می‌کنیم. و مربع این ضلع همان مال مطلوب است.

[مثال سوم - ۴] و نیز اگر گفته شود که جذر و دو عدد و ده جزء جذر معادل بیست جزء مال است، در حکم اینست که کعب و دو مال و ده جزء معادل بیست عدد باشد. پس ضلع مکعب را از راه مخروطات استخراج می‌کنیم؛ و آن همان جذر مطلوب است.

[مثال چهارم - ۴] ملاحظاتی کلی در حل معادلات بین مراتب هفتگانه - و بطور کلی [معادلات بین] چهار مرتبه‌ی متوالی از این مراتب هفتگانه در حکم اصناف بیست و پنجگانه‌ی مذکور است.

و اما اگر معادله‌ای پنج یا شش یا هفت مرتبه را فرا گیرد⁺، حل آن بهیچوجه

(۵) معادله‌ی $x = 1 + 2/x$ معادل $x^2 = x + 2$ است، زیرا:

$$x : x^2 = 1 : x = (2/x) : 2.$$

(+) لازم نیست که هر ۵ یا ۶ یا ۷ مرتبه در معادله موجود باشد. مثلاً در مثال مذکور در متن، معادله‌ی مسئله $x^2 + 2x = 2 + 2/x^2$ است، که پنج مرتبه (از x^2 تا $2/x^2$) را فرا گرفته‌است، و به معادله‌ی درجه‌ی چهارم $2x^2 + 2x^3 = 2x^4 + 2$ بر میگردد، که بقول خیام نمی‌توان آنرا حل کرد. در این باب به § ۳۰۷۰۳ رجوع کنید.

ممکن نیست. مثال آن اینست که گفته شود مالی و دو جذر معادل دو عدد و دو جزء مال است؛ و این مسئله را نمی‌توان حل کرد، زیرا مال از مرتبه‌ی دوم و جزء مال از مرتبه‌ی ششم است، و معادله پنج مرتبه را فرا می‌گیرد. و سایر حالات را بر همین قیاس کن.

[§ ۵۰۱۵۰۷ طبقه بندی معادلات کسری^{۵۱} قابل حل -] پس جمیع اصناف معادلات مفرد بین این هفت مرتبه بیست و یک است، که دو صنف از آنها را نمی‌توان به راه ما^{۵۲} حل کرد، بلکه در حل آنها حاجت به مقدمه‌ی ابن هیثم می‌افتد. پس نوزده صنف باقی می‌ماند که بطریق ما - بعضی به خواص دایره و برخی به خواص قطوع مخروطی - قابل حل است.

جملگی معادلات مرکب از سه مرتبه‌ی متوالی پانزده است، و به خواص دایره حل می‌شود.

کلیه‌ی معادلات مرکب از سه مرتبه که چهار مرتبه‌ی متوالی را فرا گیرد بیست و چهار است، و بخواص قطوع حل می‌شود.

جملگی معادلات مرکب از چهار مرتبه از مراتب متوالی بیست و هشت است، و به خواص قطوع حل می‌شود.

پس کلیه‌ی اصناف معادلات واقع بین این هفت مرتبه که حل آنها به راههایی که بیان کردیم ممکن است هشتاد و شش می‌باشد، که از آنها فقط شش صنف^{۵۳} در کتابهای پیشینیان ذکر شده است. و هر کس در مقدمات مذکور در این رساله بدقت

(۵۱) مقصود معادلات بین هفت مرتبه است. « قابل حل » بمعنی اصطلاحی خیام استعمال شده، یعنی بمعنی قابل حل بوسیله‌ی دایره یا سایر قطوع مخروطی. ولی تشخیص خیام در این باره خطا است زیرا پیش از او بعضی معادلات درجه‌ی چهارم بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل شده است. رجوع شود به § ۳۰۷۰۳ و § ۵۰۱۵۰۶۰۳.

(۵۲) یعنی بوسیله‌ی دایره و با سایر قطوع مخروطی.

(۵۳) $a = x^2$ و $a = x^2 + bx = x^2$ و سه معادله‌ی صحیح درجه‌ی دوم.

اندیشیده باشد، و بعلاوه از استعداد طبیعی برخوردار و نیز در مسائل [ریاضی] کار آزموده باشد، هیچ چیز در مسائلی که برپیشینیان سخت دشوار بود بروی پوشیده نماند.

و اینک وقت آنست که خدای تعالی را حمد گوئیم و جمیع پیغمبران وی را درود فرستیم و این رساله را ختم کنیم.

[۵۰۱۱ § نقد کارهای ابوالجود]

[۵۰۱۱۰۱ § ملاحظات کلی در باب کارهای ابوالجود در حل معادلات درجه‌ی سوم و مقایسه‌ی آنها با کارهای مؤلف این رساله -] در حدود پنج سال پس از تألیف این رساله، شخصی که اطلاعی بس اندک از هندسه داشت برای من نقل کرد که ابوالجود محمد ابن لیث عالم هندسه را، رحمه‌الله علیه، رساله‌ایست که در آن این اصناف را برشمرده و اکثر آنها را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرده، بی اینکه حالات این اصناف و تمیزحالات ممکن از ممتنع را تمامی آورده باشد، بلکه برطبق نتایجی که از مطالعه در مسائل خاص مربوط باین اصناف بآنها رسیده است. و این دور نیست، زیرا آن دوصنفی که گفتم از یکی از پیشینیان ماست منسوب بدوست؛ و شخص مذکور آنها را در مجموعه‌ی تصنیفات ابوالجود به خط حارمی خوارزمی دیده بود.

و یکی از این دو صنف از معادلات سه‌تائی است، و آن اینست که مکعب و عدد معادل اموال باشد، و این معادله را حالاتی و حالات آنرا شرایطی است، چنانکه در این رساله مذکور شد. و اما ابوالجود شرایط آنرا تمامی نیآورده، و بعلاوه حکمی که در این صنف کرده نیز باطل است، و آن حکم اینست که اگر ضلع مکعبی که مساوی عدد است بزرگتر از نصف عدوی مالها باشد مسئله ممتنع است - و چنانکه توضیح دادیم چنین نیست - و این سخن باطل ناشی از این است که وی امکان تماس دو قطع یا تقاطع آنها را در این حالت آخر در نیافته است.

و دومی از معادلات چهارتایی است، و آن اینست که مکعب و عدد و اضلاع معادل مالها باشد، و شك نیست که وی این مسئله را، که جماعتی از علمای هندسه پس از کوشش بسیار از حلش عاجز شده بودند، نیکو حل کرد. اما مسئله‌ای که او حل کرد مسئله‌ی خاصی بود، و این صنف را حالات و شرایطی است، و بعضی از مسائل آن ممتنع می‌باشد، و وی حق این مطالب را بتمامی ادا نکرده است.

و من این سخن را فقط برای این گفتم که کسی که در دو رساله بدستش می‌رسد - اگر آنچه در باب این مرد فاضل بمن گفته شده راست باشد - بتواند رساله‌ی حاضر را بارساله‌ی منسوب باین فاضل مقایسه کند. چو گمان می‌کنم که من از هیچ کوششی برای اینکه مطالب مورد بحث را بتمامی بیاورم فروگذار نکرده‌ام، و در عین حال کوشیده‌ام که به عهد خود وفا کنم، ولی از اطناب مالال انگیز احتراز جویم. و اگر می‌خواستم، برای هر یک از این اصناف و حالات آنها مثالی می‌آوردم. لکن ترسیدم که مطلب به درازا کشد، و باین جهت، سخن را به همین قوانین کلی کوتاه نمودم، و در این امر به فهم متعلم اعتماد کردم، زیرا هر کس قودی در اگداش چنان باشد که مطالب این رساله در آن نقش بندد، در حل مسائل مخصوصی که بخواهد، و از برگردانیدن مسئله به صنفی که این مسئله حالت خاص آنست، در نمی‌ماند. و خداست که اسباب کامیابی را راست و درست گرداند، و در هر حال اعتماد بر اوست.

[§ ۵۰۱۱۰۳ توضیح خطای ابوالجود -] و بعد، یکی از دوستان ما از ما خواست که خطای ابوالجود محمد ابن لیث را در صنف پنجم از اصناف ششگانه‌ی سد تائی که بوسیله‌ی قطوع حل می‌شود ثابت کنیم، و آن صنف اینست که مکعبی و عدد معادل مالها باشد. ^۵

(۵) مقصود معادله‌ی $cx^2 + u = x^3$ است. فرض کنیم $AB = c$ و $\overline{BC} = a$. چنانکه در § ۵۰۷۰۶ ثابت شد، شرط «امکان» معادله اینست که $BC < AB$ ($|a| < c$)، و در این صورت بر حسب عظمت نسبی BC و $AB/2$ سه حالت اتفاق می‌افتد:

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

ابوالجود گفته است که عده‌ی مالها را [مساوی] خط AB می‌گیریم ، و از آن ضلع مکعبی را که مساوی عدد است جدا می‌کنیم ، و آن BC است . پس خط BC

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$(I) BC = CA, \quad (II) BC > CA, \quad (III) BC < CA;$$

یا بصورت جبری :

$$\sqrt[3]{a} = c/2, \quad \sqrt[3]{a} > c/2, \quad \sqrt[3]{a} < c/2.$$

ابوالجود مربع $BCDE$ را تمام کرده ، هذلولی متساوی القطرینی با مجانبهای AB و BE و مار بر D ، و سهمی بر رأس A و محور AB و ضلع قائم BC رسم میکند (اشکال صفحات ۲۴۴ و ۲۴۶ متن) [معادلات دو منحنی $xy = a^{2/3}$ و $(c-x)y^2 = a^{1/3}$ است] . آنگاه ، بقول خیام ، ابوالجود گوید :

(الف) در حالت (I) دو قطع در D بر یکدیگر مماس اند؛

(ب) در حالت (II) دو قطع نامتلاقی اند .

و مقصود از «خطای ابوالجود» ، که خیام در آغاز § ۵۰۱۱۰۲ از آن نام میبرد ، همین دو حکم است .

توضیح مطلب از این قرار است :

حالت (I) : $BC = CA$ (شکل صفحه‌ی ۲۴۴ متن) . سهمی از D میگذرد (رجوع شود به § ۵۰۷۰۶) ، ولی ، بشرحی که خیام توضیح میدهد ، دو منحنی در این نقطه برهم مماس نیستند .
حالت (II) : $BC > CA$ (شکل صفحه‌ی ۲۴۶ متن) . در این حالت ، خیام ، برای اثبات خطای ابوالجود ، مثالی می‌آورد ، از این قرار :

فرض کنیم $AB = c = ۱۵$ و $ZB = x = ۶$. بموجب معادله ،

$$(۱) \quad a = cx^2 - x^3 = x^2(c-x) = \overline{ZB}^2, \quad ZA = ۱۴۴ = \overline{BC}^2,$$

و لهذا $BC > ۵$ (زیرا $۱۴۴ < ۱۲۵ = ۵^3$) ، و بالتیجه $BC > CA$. پس مثال مذکور داخل در حالت (II) است .

سیس خیام باثبات متقاطع بودن دو قطع می‌پردازد :

از (۱) نتیجه میشود :

$$(۲) \quad \overline{ZB}^2 : \overline{BC}^2 = BC : ZA .$$

از طرف دیگر ، اگر H محل تلاقی عمود ZH با هذلولی باشد ، بموجب خاصیت عمومی

هذلولی ، سطوح دو مستطیل HB و CE متساوی است ؛ پس

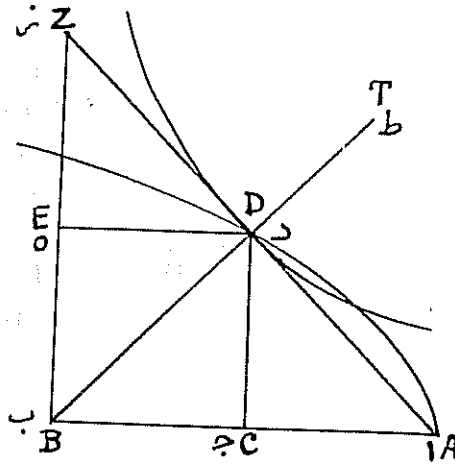
$$(۳) \quad ZB : BC = BC : ZH ,$$

$$(۴) \quad \overline{ZB}^2 : \overline{BC}^2 = ZB : ZH . \quad \text{و لهذا}$$

از (۲) و (۴) نتیجه میشود ، $ZB : ZH = BC : ZA$ ، و به تبدیل ، $BZ : BC =$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

یا مساوی CA است، یا از آن بزرگتر است، و یا از آن کوچکتر است. سپس گوید که اگر CA مساوی BC باشد، مستطیل CE را تمام می‌کنیم و بر D قطع زایدی مرور می‌دهیم که AB و BE آنرا قطع نکنند، و قطع مکافی می‌کشیم که رأس



نقطه‌ی A و سهمش AB وضع قائمش BC باشد. پس، چنانکه ثابت کردیم، این قطع ناچار از نقطه‌ی D می‌گذرد. سپس گفته است که دو قطع در نقطه‌ی D بر یکدیگر مماس‌اند، و این خطا است، زیرا دو منحنی ناچارمقاطع‌اند.

برهان آن اینست. BZ را مساوی BA می‌گیریم، و AZ را وصل می‌کنیم. پس AZ ناچار از D می‌گذرد، و در داخل قطع مکافی است^۴، و زاویه‌ی ADB قائمه

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$ZH : ZA$. پس با توجه به (۳)،

$$(۵) \quad ZB : BC = BC : ZH = ZH : ZA ,$$

و از آنجا

$$(۶) \quad \overline{ZH}^2 = \overline{BC} \cdot \overline{ZA} .$$

بموجب (۶)، نقطه‌ی H بر سهمی واقعست، و لهذا، برخلاف حکم ابوالجود، دو قطع متلاقی‌اند.

نیز رجوع کنید به ذیل ص ۲۴۶-۲۴۸.

(۴) مقصود قسمت AD از آنست.

است، و زاویه‌ی ABD مساوی زاویه‌ی ZBD می‌باشد. و معلوم است که سهم قطع زاید زاویه‌ی محیطی قطع^(*) را نصف می‌کند. پس لازمه‌ست که خط BDT سهم قطع زاید ما[†] بر D باشد. اما خط AD موازی خطوط ترتیب [قطع زاید] است، و لهذا بر قطع زاید مماس است. پس لازم است که [قطع] مکافی [قطع] زاید را قطع کند، چون بین قطع زاید و خط مماس آن نتواند بود. زیرا اگر [قطع مکافی] بر این خط مماس باشد، خطوط مرسوم از D به هر نقطه‌ی دلخواهی که بر محیط [قطع مکافی] AD فرض شود بین قطع [مکافی] و خط مماس آن واقع می‌شود، و این ممتنع است. پس ناچار قطع مکافی قطع زاید را در نقطه‌ی دیگری بین A و D قطع می‌کند، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم. چنین است و جه خطای این دانشمند در آنجا که گفت دو قطع لازمست در D بر یکدیگر مماس باشند.

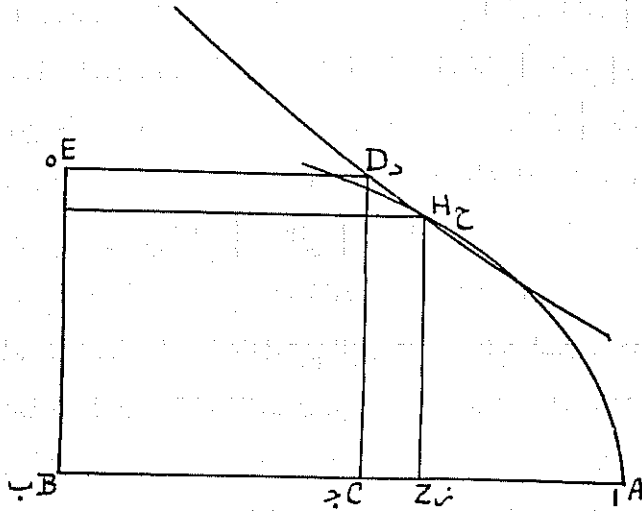
اما این گفته‌ی او: «اگر BC بلندتر از CA باشد مسئله ممتنع است، و این از آنست که دو قطع یکدیگر را تلاقی نمی‌کنند» سخنی است باطل، زیرا ممکن است دو قطع به حال تقاطع یا تماس، در يك نقطه یا دو نقطه‌ی بین A و D ، تلاقی کنند، چنانکه در آنجا ثابت کردیم. و این مطلب را برهانی است کلی تر از آنچه ذکر کردیم^(†):

فرض کنیم عده‌ی مالها AB و ضلع مکعب BC و بزرگتر از نصف AB باشد؛ و CE را تمام می‌کنیم، و دو قطع را چنانکه دانستی میکشیم. و فرض میکنیم AB ده و ZB شش باشد. پس حاصل ضرب مربع ZB در ZA صد و چهل و چهار است، و آن عدد است، و ضلع آن [یعنی ضلع مکعب مساوی آن] BC است، و BC ناچار بزرگتر از پنج است، زیرا مکعب پنج صد و بیست و پنج می‌باشد. اما مکعب مستطیلی که قاعده‌اش مربع ZH و ارتفاعش ZA است مساوی مکعب BC است. پس قاعده‌های آنها با ارتفاعاتشان متکافی‌اند، یعنی نسبت مربع ZB به مربع BC مثل نسبت

(*) مقصود زاویه‌ی دو مجانب است.

(†) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳.

BC به ZA است . حال از Z عمودی می کشیم تا قطع زاید را در نقطه H قطع کند ،
و مستطیل HB را تمام میکنیم . پس مستطیل HB مساوی CE است ، و لهذا ، اضلاع



آنها متكافی اند ، یعنی نسبت ZB به BC مثل نسبت BC به ZH است . بالنتیجه ، نسبت
مربع ZB به مربع BC مثل نسبت ZB به ZH است . ولی این نسبت مثل نسبت BC به
ZA بود . پس نسبت ZB به ZH مساوی نسبت BC به ZA است ، و به تبدیل نیز
چنین است [یعنی نسبت ZB به BC مثل نسبت ZH به ZA است] . پس ، خطوط ZB
و BC و ZH و ZA متوالیاً بزرگ نسبت اند . و لهذا ، مربع ZH مثل حاصل ضرب BC
در ZA است . اما BC ضلع قائم قطع مکافی است که سهمش AB و رأسش A است .
پس ZH از خطوط ترتیب [این قطع] می باشد . بنا بر این ، نقطه H ناچار بر محیط
قطع مکافی است ، و چون بر محیط قطع زاید نیز بود ، دو قطع متلاقی اند . پس
خطای ابوالجود درین گفته که دو قطع تلاقی نمی کنند آشکار شد ، و هوالمطلوب .
و برای اینکه مطلب آشکارتر شود ^۵ AB را مساوی هشتاد می گیریم و BC را

(۵) مقصود خیام از بقیه ۵۰۱۱۰۲ § (و در واقع ۱۰۱۱۰۲ §) ، که بقول خودش آنرا

برای مزید توضیح آورده ، معلوم نیست . ظاهراً پس از فارغ شدن از اثبات خطای ابوالجود و توضیح
بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

که ضلع مکعب مساوی عدد است چهل و يك، و آن بلندتر از AC است. پس نقطه‌ی D خارج قطع مکافی واقع می‌شود. فرض کنیم مکافی از L بگذرد. درین صورت خط

بقی‌دی ذیل صفحه‌ی قبل

اینکه در حالت (II) (رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳) ممکن است معادله دارای جواب باشد، یعنی قطوع حلال معادله متقاطع باشند، میخواهد توضیح دهد که ممکن هم هست که درحالت (II) قطوع حلال تلاقی نکنند. برای این منظور معادله‌ی

$$x^2 + 41^2 = 80x^2$$

را اختیار کرده، ولی، این معادله در جواب مثبت دارد (تقریباً $x_1 = 43,4$ و $x_2 = 62,2$)، که نظایر طولهای نقاط تقاطع دو قطع شکل صفحه‌ی ۲۴۸ متن است ابتدا از B)؛ و استنتاج خیام نا درست است. شاید منظور وی توضیح این مطلب بوده که شکل و استدلال درموضع خاص ممکن است همراه کننده باشد، و قطعه‌ها را غیرمتلاقی بنماید، و شخص را به خطا بیندازد. ولی این توجیه بسیار مستبعد است، زیرا در کلام خیام هیچگونه اشاره‌ای باین منظور و به اینکه معادله جواب دارد نیست (در این باب به ذیل صفحه‌ی ۲۴۹ نیز رجوع شود).

اینک توضیح استدلال وی.

فرض کنیم:

$$AB = c = 80,$$

$$BC = a^{1/2} = 41.$$

چون $CA = AB - BC = 39$ ، شرط $BC > CA$ برقرار است. حال مربع CE را تمام کرده قطعه‌ها را میکشیم (شکل صفحه‌ی ۲۴۸ متن). از

$$\overline{CD}^2 = CB \cdot CB > CB \cdot CA$$

معلوم میشود که D در خارج سهمی است. اگر L محل تلاقی سهمی و CD باشد، $\overline{LC}^2 =$

$$BC \cdot CA = 1599$$

$$LC = \sqrt{1599} = 40 - \epsilon \quad (\epsilon < 1/80).$$

اینک فرض کنیم $TC = BC = 41$ و $HB = BT$ و $AK = \frac{CA}{4} = 9\frac{3}{4}$. عمود KM را

میکشیم تا TH و سهمی و هذلولی را بترتیب در Z و M و N قطع کند. خط TH بر هذلولی معام است، و اولاً $LC^2 : MK^2 = CA : AK = 4 : 4$ پس

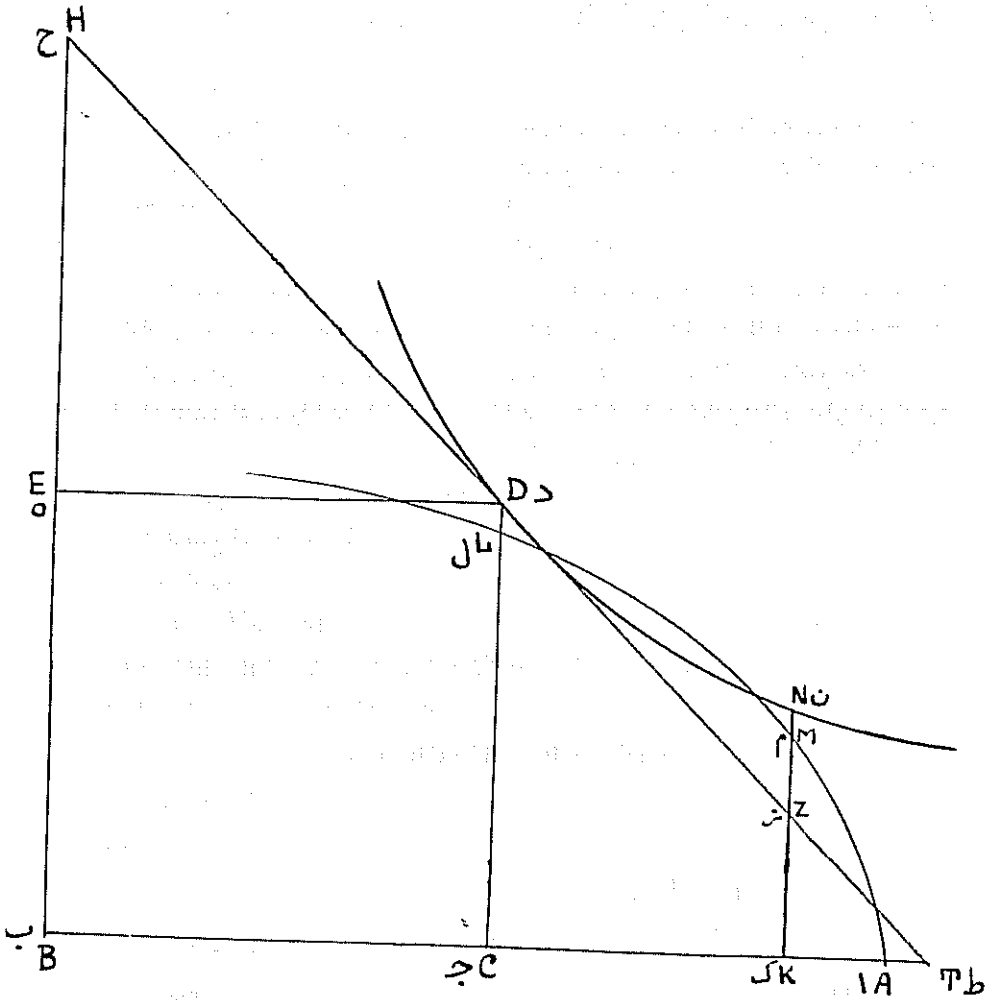
$$MK = \frac{1}{2} LC = 20 - \frac{\epsilon}{2}.$$

تایماً پس $KZ : KT = HB : BT$ ؛ پس

$$KZ = KT = KA + AT = 11\frac{3}{4},$$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

LC مساوی جذر هزار و پانصد و نود و نه می‌شود، و آن اندکی از چهل کمتر است.



بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل . $ZM = MK - KZ = ۸\frac{۱}{۴} - \frac{۴}{۳} > ۸$.

ثالثاً $KN = \overline{BC}^۲$: $BK = \overline{BC}^۲$: $(AB - AK) = ۲۳,۹۳$ ،

(خیام از KN صحبتی نمی‌کند) . پس $KN > KM$ ، و لهذا در این موضع دو قطع خارج یکدیگرند .

علت انتخاب مقدار $۹\frac{۲}{۴}$ برای AK معلوم نیست ، و اگر خیام مقداری بین $۸۵ - x_۲$ و $۸۵ - x_۱$

برای AK اختیار کرده بود ، هر يك از دو قطع را داخل دیگری مییافت .

حال TC را مساوی CB و BH را مساوی BT جدا می‌کنیم، و TH را وصل می‌کنیم. چنانکه ثابت کردیم، TH بر قطع زاید مماس است. و AK را مساوی ربع AC جدا می‌کنیم، و از آن عمودی می‌کشیم تا قطع [مکافی] را در نقطه‌ی M قطع کند. نسبت مربع LC به مربع KM مثل نسبت AC به AK خواهد بود، زیرا دو خط اول از خطوط ترتیب مکافی است. و این مطلب را آپولونیوس در شکل نوزدهم مقاله‌ی اول ثابت کرده است. پس KM نصف LC خواهد بود، و آن اندکی از بیست کمتر است. اما CT چهل و یک است، و AK نه و سه چهارم، و AT دو؛ پس خط KZ یازده و سه ربع است، زیرا نسبت KZ به KT مثل نسبت HB به BT است، و دو خط اخیر متساوی‌اند. بالنتیجه، خط ZM بزرگتر از هشت است،^(۵) و در داخل خط مماس قطع زایداست، و در این وضع ناچار در داخل قطع زاید است. آری گاهی در حالتی که BC بزرگتر از CA است دو قطع غیر متلاقی‌اند، ولی این امر در جمیع انواع [معادلاتی که تحت این حالت است] ضرورت ندارد.

(۵) رجوع شود به ذیل صص ۲۴۶-۲۴۷.

عبارت داخل { } را ما بعنوان ترجمه‌ی عبارت ذیل از متن آورده‌ایم (رجوع شود به سطور ۵ - ۸ صفحه‌ی ۵۶):

« و هو فی داخل الخط المماس للزائد فهو فی هذا الوضع یکون فی داخل القطع الزائد ، لامحاله نعم قد یکون القطعان غیر متلاقین اذا کان ب ح اعظم من ج ا لکن ذلك غیر واجب ، فی جمیع الانواع فقد ابطال ابوالجود فی هذا الحكم . »
 وپیکه در جبر عمر خیام (صص ۸۷ - ۸۸) این عبارت را چنین ترجمه و نقطه‌گذاری کرده است :

« ... و آن ابتدا از خط مماس هذلولی محسوب شده است ؛ و آن در این وضع ناچار در آنطرف هذلولی است ؛ بطوری که اسان ناچار است تصدیق کنند که وقتی BC بزرگتر از CA است دو قطع تلافی نمی‌کنند . ولی این امر در جمیع حالات ضرورت ندارد ، و ابوالجود در این حکم به خطا رفته است . »

بنظر ما این ترجمه (و سخن دیگران که از وپیکه تقلید کرده‌اند) با عبارت خیام (یا بمبارت اصح ، منسوب به خیام) موافق نیست ، و ترجمه‌ی عبارت وی احتمالاً همان است که ما در متن آورده‌ایم . استدلال خیام اینست که چون اولاً $ZM > ۸$ و ثانیاً ZM در داخل (= بالای) خط مماس است ، ناچار در داخل (= زیر) هذلولی است ، و بنابراین ، نقطه‌ی M در زیر هذلولی است.

پس حکم مذکور ابوالجود باطل است. این مطلب را بدان. و اگر بخواهی،
 مثالهای عددی توانی آورد. [۵۰۱۱۰۴۰۱ § تبصره -] و این مسئله [از جنبه‌ی هندسی] همان [مسئله‌ی]
 اضافه کردن مکعب مستطیلی است بر خط مفروض که از مکعب مستطیلی مضاف
 بر تمام خط بقدر مکعبی ناقص باشد، و مساوی مکعب مستطیل [مفروض] دیگر
 باشد. پس اگر ضلع مکعب مساوی مکعب مستطیل مفروض مساوی نصف خط یا کمتر
 از آن باشد مسئله لزوماً ممکن است، اما اگر ضلع مذکور بزرگتر از نصف این
 خط باشد، برطبق آنچه ثابت کردیم، ممکن است مسئله حالات ممتنع داشته باشد.
 و خداست که می‌تواند حل این مشکلات را به لطف و کرم خود آسان سازد.

رساله در ظهر روز یکشنبه‌ی بیست و سوم

ماه ربیع‌الاول سنه ۴۰۱ هجری قمری تمام شد، و حمد...

(۵) اگر c خط مفروض و a حجم مکعب مستطیل مفروض باشد، مکعب مستطیل
 $x^2(c-x)$ ، که مضاف بر c است، از مکعب مستطیل cx^2 (مضاف بر تمام c) بقدر مکعب
 x^2 ناقص است. حال باید x را چنان تعیین کرد که

$$(c-x)x^2 = a. \quad (۱)$$

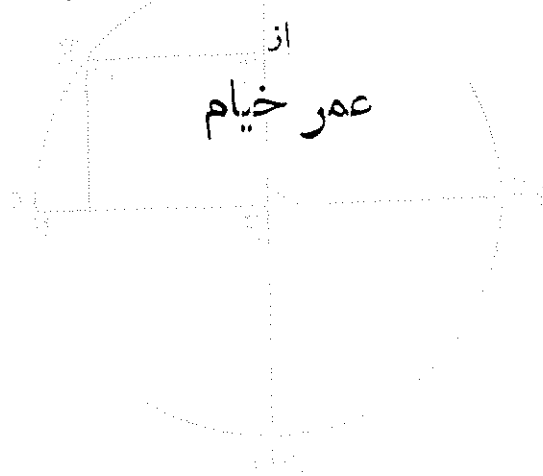
نظیر این مسئله در هندسه‌ی مسطحه مسئله‌ی اضافه کردن مستطیلی است بر خط مفروض
 که همسطح مستطیل مفروض باشد، و نقصانش نسبت به مستطیل مضاف بر تمام خط مربع باشد
 (رجوع شود به § ۳۰۲۰۳۰۱، ص ۸۵ - ۸۷).

معادله‌ی مسئله‌ی اخیر بصورت $cx - x^2 = a$ است، که بازنه $a > (c/2)^2$ یا
 $\sqrt{a} > c/2$ ممتنع است. شاید ابوالجود، به خطا، این شرط را بصورت $a^{1/3} > c/2$
 در مورد معادله‌ی (۱) تعمیم داده است (رجوع کنید به ذیل صفحه‌ی ۲۴۳).
 (†) درباب این تاریخ به ملاحظات کتاب حاضر رجوع کنید.

کتابخانه پوهنتون و انجمن استادیان په افغانستان

د افغانستان د پوهنتون د انجمن استادیان د کتابخانه
د ۱۳۸۰ ل. د ۱۰ م. د ۱۰ نېټې د ۱۰ بجې په ۱۰ بجې
قسمت نهم
رساله در تحلیل يك مسئله

به معادله درجی سوم و حل آن بوسیلهی قطوع مخروطی



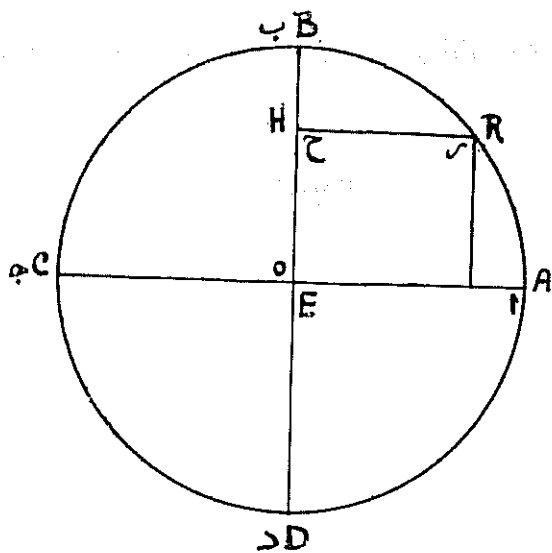
د افغانستان د پوهنتون د انجمن استادیان د کتابخانه
د ۱۳۸۰ ل. د ۱۰ م. د ۱۰ نېټې د ۱۰ بجې په ۱۰ بجې

د افغانستان د پوهنتون د انجمن استادیان د کتابخانه
د ۱۳۸۰ ل. د ۱۰ م. د ۱۰ نېټې د ۱۰ بجې په ۱۰ بجې

قسمت نهم*

این رساله ای است از ابو الفتح عمر
ابن ابراهیم خیامی

[§ ۶۰۱ طرح مسئله-] می خواهیم ربع دایره ای AB از دایره ای $ABCD$ را در نقطه ای مانند R به دو قسمت تقسیم کنیم که اگر عمود RH را بر قطر BD فرود آوریم، نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB باشد. و E مرکز دایره و AE نصف قطر آنست.

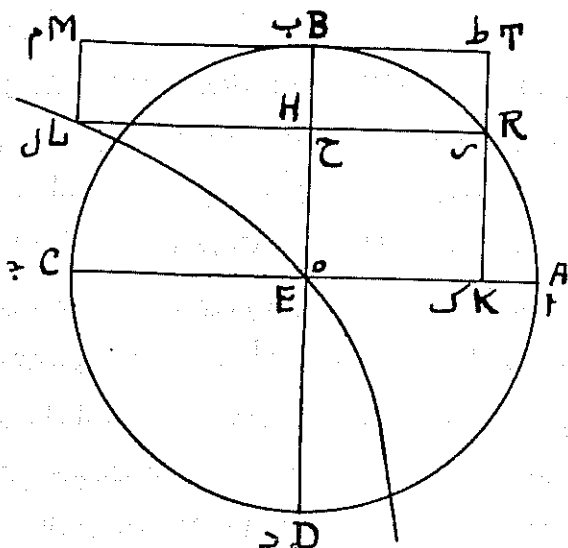


فرض می کنیم تقسیم مطلوب را بعمل آورده ایم [، و مسئله را بتدریج تحلیل میکنیم] تا تحلیل به امر معلومی منجر شود. سپس ترکیب مینمائیم تا بمطلوب برسیم.

(۵) رجوع شود به § ۴۰۴ (ص ۱۵۱ - ۱۵۵).

(۶) رجوع شود به § ۴۰۴-۲ (ص ۱۵۳ - ۱۵۴).

پس دایره‌ی $ABCD$ را دگر باره میکشیم[†]، و مرکز آن E است، و AC و BD را چنان اخراج می‌کنیم که یکدیگر را بزاویدهی قائمه قطع کنند، و عمود RH را چنان اخراج می‌کنیم که نسبت AE به آن مثل نسبت EH به HB باشد، و دو عمود KRT و TBM را اخراج می‌کنیم، و خط BM را مساوی AE جدا کرده مستطیل TL را تمام می‌کنیم. پس، چون نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB است، و BM مساوی AE است، چنانکه اقلیدس در شکل شانزدهم مقالدهی ششم اصول ثابت



کرده، حاصل ضرب BM در HB مساوی حاصل ضرب RH در EH است. ولی حاصل ضرب BM در HB مساوی سطح مستطیل BL است، و حاصل ضرب RH در EH مساوی سطح مستطیل HK است. پس سطح BL مساوی سطح HK می‌باشد، و چون سطح

([†]) فرض کنیم مسئله حل شده باشد، و $AE : RH = EH : HB$ (۱) ، و

$BM = AE$. بالنتیجه $BM \times HB = RH \times EH$ ، یا $BL = HK$ ؛ و پس از افزودن HT به طرفین، $TE = TL$. پس نقاط E و L بر هذلولی (مساوی القطرینی) با مجانبهای TK و TM واقعند. و خلاصه‌ی بحث دراز و بیفایده‌ی خیام اینست که معلومات کافی برای رسم این هذلولی در دست نیست.

HT را به هر دو بیضائیم سطح TE مساوی سطح TL خواهد بود. پس اگر، چنانکه آپولونیوس در شکل پنجاه و نهم مقاله‌ی اول کتاب مخروطات و شکل‌های ششم و پنجم از مقاله‌ی دوم این کتاب ثابت کرده است، قطع زایدی بسازیم که خطوط KT و TM آنرا قطع نکنند و بر E بگذرد - چو این عمل بوسیله‌ی آن سه شکل انجام پذیر است - بنا بر عکس شکل هشتم از مقاله‌ی دوم کتاب مخروطات، این قطع زاید ناچار بر نقطه‌ی L می‌گذرد. اما وضع نقطه‌ی E معلوم است، و خط BM از حیث وضع و مقدار معلوم می‌باشد، ولی وضع نقطه‌ی L در مرحله‌ی ترکیب غیر معلوم است، زیرا اگر وضع این نقطه معلوم بودی وضع نقطه‌ی H نیز معلوم بودی - چو مقدار خط HI معلوم است - پس BH معلوم بودی، و شکل معلوم بودی، و همچنین وضع خط TK غیر معلوم است، چو اگر وضع آن معلوم بودی وضع نقطه‌ی T معلوم بودی، و اگر وضع نقطه‌ی T معلوم بودی مقدار خط TB معلوم بودی، و اگر مقدار خط TB معلوم بودی شکل معلوم بودی، و نه چنین است، زیرا مقصود معلوم کردن شکل است. پس [- خلاصه‌ی کلام اینکده -] اگر وضع نقطه‌ی L معلوم بودی یا وضع خط TK معلوم بودی، اتمام شکل و رسیدن به مطلوب بوسیله‌ی ترکیب به آسانی ممکن شدی، و دانستن هیچیک ازین دو آسان نیست، فحسب ^۵ | هذه الطريقة للباحث المستبصر بكتاب المخروطات لا یوصل الی المطلوب بطریقه اخرى امکنه التفتن لهذه الطریقه | ^۶ و من این طریقه را، باینکه دشوار است، بعنوان تمهید گونه‌ای جهت متعلم و برای آماده ساختن وی آوردم، و چون پایان رسانیدن آن دشوار و سخت محتاج مقدمات چندی از قطوع مخروطی است، به اتمام آن و ترکیبش به طریق هندسی نمی‌پردازم، تا کسانی از دانندگان قطوع مخروطی که بخواهند، پس از فرا گرفتن طریقی که ذکر خواهم کرد، به اتمام آن بپردازند، زیرا اگر چه طریقی که گفته خواهد شد نیز محتاج مقدماتی از قطوع مخروطی است، از بسیاری

(۵) در اصل چنین بنظر می‌آید، و خواننده نشد.

(۶) ترکیب قطعی این عبارت بر مترجم و بر دوستانی که با آنان مشورت کردم معلوم نشد.

جهات از طریق اول آسانتر است ، و مقدمات آن فواید بیشتری دارد. [۶۰۴] تحلیل مسئله به مثلث معین \triangle \square

پس بیاری خدا گویم . شکل را دگر باره می کشیم ، و در طریق تحلیل ، فرض می کنیم تقسیم مطلوب انجام یافته و نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB باشد ، و بنابر آنچه اقلیدس در شکل شانزدهم مقالده سوم [اصول] ثابت کرده است \dagger ، از

(۵) خیام مسئله‌ی مورد بحث را به رسم مثلث قائم الزاویه‌ای که ما آنرا مثلث معین خوانده‌ایم باز میگرداند ، بدین طریق :

$$(۱) \quad AE : RH = EH : HB .$$

مماس RT را میکشیم . از طرفی $EH : HR = HR : HT$ ، و لهذا $EH \cdot HT = HR^2$ و از طرف دیگر $HR^2 = DH \cdot HB$. پس $EH \cdot HT = DH \cdot HB$ ، و به تفضیل نسبت ،

$$ED : EH = BT : HB ,$$

پس بموجب (۱) و با رعایت $ED = AE$ ،

$$RH : HB = BT : HB ,$$

و لهذا $RH = BT$. اما $RE = EB$. پس $RH + ER = BT + EB$ ، و یا

$$(۲) \quad RH + ER = ET .$$

پس حل مسئله بر میگردد به رسم مثلث قائم الزاویه‌ی ERT (مثلث معین) که در (۲)

صدق کند . ضمناً رابطه‌ی (۱) را میتوان بصورت

$$(۳) \quad ER : RH = EH : (ER - EH)$$

نوشت ، که فقط مربوط به اجزای مثلث ERT است ، و بدین صورت ، عکس حکم مذکور نیز صحیح است ، و بعبارت دیگر ، شرط لازم و کافی برای اینکه در مثلث قائم الزاویه‌ی ERT رابطه‌ی (۳) برقرار باشد آنست که (۲) برقرار باشد .

زیرا در مثلث قائم الزاویه‌ی ERT همواره $ER : ET = EH : ER$ ، و به تفضیل

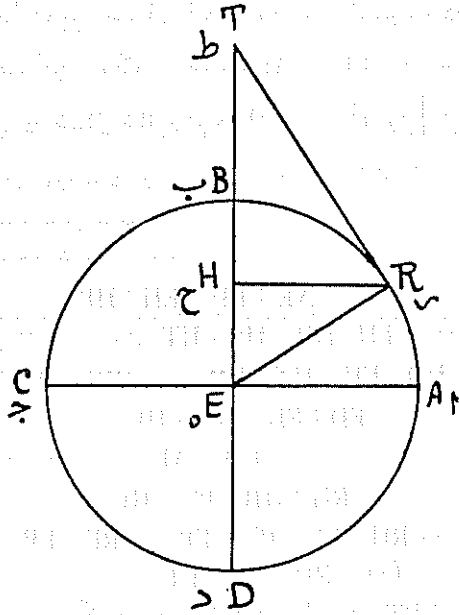
$$ER : (ET - ER) = EH : (ER - EH) .$$

حاصل اگر (۳) مفروض باشد نتیجه میشود $RH = ET - ER$ ؛ و بالعکس اگر (۲) مفروض باشد بالبداهه (۳) نیز برقرار است .

(+) شکل ۱۶ مقالده سوم تحریر اقلیدس مربوط به رسم مماس بردایره است از نقطه‌ای واقع در خارج آن . رسم مماس بردایره از نقطه‌ای واقع بر محیط آن از شکل ۱۵ همان مقاله استنباط می‌شود .

ضمناً باید دانست که ترتیب این قضایا در تحریر اقلیدس با ترتیب آنها در کتاب سیزده مقاله (از هیث) متفاوت است . برای نکته‌ی مذکور به اول صفحه‌ی ۴۴ از جلد دوم کتاب هیث رجوع شود .

نقطه‌ی R خط RT را بر دایره مماس می‌کنیم، و EB را امتداد می‌دهیم تا خط مماس را در نقطه‌ی T قطع کند، و RE را وصل می‌کنیم. پس چون زاویه‌ی R از مثلث



ERT قائمه است، و از رأس زاویه‌ی R عمود RH بر قاعده اخراج شده، بنا بر آنچه در شکل هشتم مقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده است، نسبت EH به HR مثل نسبت HR به HT است. پس مربع HR مساوی حاصل ضرب EH در HT می‌باشد. اما مربع HR مساوی حاصل ضرب DH در HB است. بالنتیجه، حاصل ضرب DH در HB برابر است با حاصل ضرب EH در HT، و لهذا - بموجب آنچه در شکل شانزدهم از مقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده - نسبت HD به EH مثل نسبت HT به HB می‌باشد، و بتفضیل نسبت ED به EH مثل نسبت BT به BH است. ولی نسبت AE به RH مثل نسبت EH به HB [فرض شده] بود؛ پس، به دو تبدیل، نسبت AE به EH برابر نسبت RH به HB است. اما نسبت DE به EH مثل نسبت BT به BH بود. پس نسبت RH به HB برابر نسبت BT به HB می‌باشد. ولی، بموجب شکل نهم از مقاله‌ی پنجم

[اصول] ، مقادیری که نسبت آنها به يك شيء مساوی باشند خود نیز مساوی‌اند . پس RH مساوی BT است . ولی RE مساوی EB است . بنابراین ، مجموع ER و RH مساوی خط ET می‌باشد . پس تحلیل منجر شد به مثلث قائم الزاویه‌ای مشروط باینکه وتر زاویه‌ی قائمه مساوی مجموع یکی از دو ضلع محیط باین زاویه با عمود خارج از رأس آن بر وتر باشد .

پس هرگاه مثلث قائم الزاویه‌ای با این وصف بسازیم ، خواهیم توانست این شکل را بطریق هندسی ترکیب کنیم . و این مقدمه ، یعنی مثلثی دارای خاصیت مذکور ، فایده‌ی بسیار در امثال این مسئله دارد ، و آنرا خواص دیگری است که بعضی از آنها را یاد میکنیم تا کسی که این رساله را مطالعه می‌کند فایده‌ی آن را در اکثر مسائل شبیه این مسئله دریابد .

[۶۰۳ § خواص مثلث معین و معادله‌ی حل آن]

[۶۰۳۰۱ §] گوئیم که این مثلث ممکن نیست متساوی الساقین باشد * . زیرا اگر ضلع ER مساوی RT باشد ، EH مساوی HT می‌شود ، و عمود [RH] مساوی هر يك از آنها می‌گردد ، و ET دو برابر عمود RH می‌شود ، و مجموع ER و عمود [RH] بزرگتر از وتر می‌گردد ، و حال آنکه آنرا مساوی وتر فرض کرده بودیم ، و این خلاف فرض است .

(*) بفرض

$$(۱) \quad RH + ER = ET .$$

گوئیم $ER \neq RT$. اثبات به برهان خلف است . اگر $ER = RT$ ، نتیجه میشود
 $EH = HT = RH$ ، و لهذا

$$(۲) \quad ET = EH + HT = ۲RH .$$

اما $ER > RH$ ، پس $RH + ER > ۲RH$ ، و با بموجب (۲) ، $RH + ER > ET$ ،
 و این با (۱) منافض است .

[§ ۶۰۳۰۲] و گویم ER کوتاهتر از RT است .^۵

چو اگر ER بلندتر از آن باشد ، EH بلندتر از HT خواهد بود ، و HR که خط واسطه‌ی [هندسی] بین EH و HT است بلندتر از HT خواهد بود . اما HR مساوی TB فرض شده بود . پس TB بزرگتر از TH است ، [یعنی] جزء بزرگتر از کل است ، و این محال است .

پس ثابت شد که در مثلثی دارای چنین خاصیت ، مجموع ضلع کوتاهتر و عمود [وارد از رأس زاویه‌ی قائمه بر وتر] مساوی بلندترین ضلع مثلث است ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[§ ۶۰۳۰۳] و از خواص چنین مثلثی اینست که از دو ضلع محیط به زاویه‌ی قائمه آنکه بلندتر است مساویست با حاصل جمع ضلع کوتاهتر و قطعه‌ای که عمود [وارد از رأس زاویه‌ی قائمه بر وتر] در طرف ضلع کوتاهتر از وتر جدا می‌کند † .

(۵) فرض : $ER + RH = ET$ (۱) . حکم : $ER < RT$.

اثبات به برهان خلف است . چون ثابت شد که $ER \neq RT$ ، کافی است ثابت کنیم که $ER > RT$ (۲) معتنع است . پس (۲) را مفروض می‌گیریم ، نتیجه می‌شود $EH > HT$ ، و لهذا $\overline{HT}^2 = \overline{EH} \times \overline{HT}$. پس $\overline{HR}^2 = \overline{EH} \times \overline{HT}$. اگر EB را مساوی ER جدا کنیم ، از (۱) حاصل میشود $RH = BT$. پس بموجب (۳) ، $TB > TH$ ، و این معتنع است . خیام در متن نقطه‌ی B را تعریف نکرده است .

(†) استدلال خیام خالی از تسامح نیست . توضیح آنکه موضوع قضیه مثلث قائم الزاویه‌ای مانند ERT است دارای خاصیت

$$(۱) \quad RH + ER = ET,$$

و میخواهیم ثابت کنیم که

$$(الف) \quad RT = ER + EH .$$

برهان . بر مرکز E و شعاع ER دایره‌ای میکشیم تا شکل صفحه‌ی ۲۵۶ پدید آید . خیام گوید :

$$(۲) \quad ED : EH = TB : BH ,$$

ولی دلیل این حکم را نمی‌گوید ، بلکه ظاهراً حکم عکسی را که در ذیل صفحه‌ی ۲۵۵ آوردیم بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

از شکل سابق مثال می آوریم . گوئیم مجموع ER و EH مساوی ضلع RT است .
 دلایل اینست که نسبت ED به EH مثل نسبت TB به BH است . پس ، به ترکیب :
 نسبت DH به HE مثل نسبت TH به HB است ؛ و به تبدیل ، نسبت DH به HT برابر
 نسبت EH به HB می باشد . و لکن نسبت EH به HB مثل نسبت ER به RH است ، و -
 بعلت تشابه دو مثلث ERH و RHT - نسبت RE به RH مثل نسبت RT به HT می باشد .
 پس نسبت RT به HT برابر نسبت DH است به HT . بالنتیجه ، RT مساوی HD
 است . ولی HD مساوی مجموع ER و RH است . پس مجموع ER و RH مساوی RT
 می باشد ، و این همانست که می خواستیم ثابت کنیم .

§ ۶۰۳۰۴ [معادله‌ی مثلث معین] و پس از ذکر این مقدمات ، مثلث

بقیدی ذیل صفحه‌ی قبل

مسلم گرفته است . بموجب آن حکم

$$(۳) \quad ER : RH = EH : (ER - EH).$$

اما بموجب (۱) و شکل ، $ER = ED$ و $RH = ET - ER = ET - EB = TB$ و $ER - EH = EB - EH = HB$
 آسان است . از (۲) به ترکیب نسبت نتیجه میشود $ER - EH = EB - EH = HB$ ، یا
 $DH : TH = EH : HB$. اما بموجب (۳) ، $ER : RH = EH : HB$. بعلاوه ، بسبب تشابه
 دو مثلث ERH و RHT ، $RE : RH = RT : HT$. پس

$$RT : HT = RE : RH = EH : HB = DH : TH .$$

بالنتیجه $RT = DH$. اما $DH = DE + EH = ER + EH$ ، و هوالمطلوب .

(۵) بشرحی که ملاحظه خواهد شد ، خیام معادله‌ای برای تعیین مثلث معین تشکیل میدهد .

اگر $AD = a$ و $BD = x$ فرض شود ، بنا بر فرض $AB + x = AC$ ، و یا

$$\sqrt{a^2 + x^2} + x = a + x^2/a .$$

$$x^2 + 2ax = 2ax^2 + 2a^3 \quad \text{یا}$$

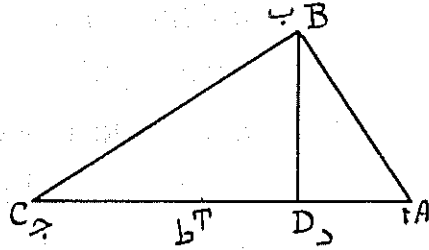
که بازاء $a = ۱۰$ همان معادله‌ی خیام است :

$$x^2 + 200x = 20x^2 + 2000 .$$

طریق خیام برای بدست آوردن معادله اینست .

فرض کنیم $AD = ۱۰$ و $BD = x$. اولاً $\overline{AB}^2 = ۱۰۰ + \overline{BD}^2$. ثانیاً بعلت تشابه دو
 مثلث ABC و ABD ، $AC : AB = AB : AD$ ، پس $AC \cdot AD = \overline{AB}^2$ ، و بالنتیجه
 بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

ABC را که زاویدی B از آن قائمه است می کشیم ، و از نقطه‌ی B عمود BD را بر AC فرود می آوریم و فرض می کنیم مجموع ضلع AB و عمود BD مساوی AC باشد ، تا



تحلیل منجر به معلومی شود . سپس ترکیب می کنیم تا مثلی با خاصیت مذکور حاصل گردد .

و چون ریاضی دانان فاضل پیشین ، در امثال این مسائل ، برای آسان کردن راههای حسی ، اصطلاحات جبریه را بکار برده اند ، ما نیز به آنان اقتداء می کنیم ، و راهی که ایشان رفته اند می رویم ، ولی استعمال اصطلاحات جبریه ضروری نیست ، و عمل یکسان است ، منتهی اگر این اصطلاحات بکار برده شود ضرب و تقسیم آسانتر خواهد بود .

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$AB = 10 + \frac{1}{10} \overline{BD}^2 \quad \text{و چون فرض } AC = AB + BD \text{ ، خواهیم داشت } + 10 = \overline{BD}^2 - BD$$

$$\overline{AB}^2 = 100 + 2 \overline{BD}^2 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \overline{BD}^4 - 20 BD - \frac{1}{10} \overline{BD}^2$$

و این مقدار معادل $100 + \overline{BD}^2$ می باشد ؛ و پس از اختصار

$$2 \overline{BD}^2 + \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \overline{BD}^4 = 20BD + \frac{1}{10} \overline{BD}^2$$

$$\frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} \overline{BD}^4 + 2 BD = \frac{1}{10} \overline{BD}^2 + 20 \quad \text{یا}$$

یا بالاخره

$$\overline{BD}^4 + 200 BD = 20 \overline{BD}^2 + 2000$$

$$(x^4 + 200x = 20x^2 + 2000) .$$

پس خط AD را با طولی منطق، مثلاً ده، می‌گیریم، و BD را شیء فرض می‌کنیم، و آنرا در مثل خودش ضرب می‌کنیم تا مال حاصل شود، و ده را در مساوی خودش ضرب می‌کنیم تا صد حاصل شود، و این دو را جمع می‌کنیم، صد و مال حاصل می‌شود، و آن - چنانکه در شکل چهل و هفتم مقاله اول [اصول] ثابت شده - مربع AB است. و چون - بعلمت تشابه دو مثلث ABC و ABD - نسبت AC به AB مثل نسبت AB به AD است، حاصل ضرب AC در AD [نیز] مساوی مربع AB است. پس اگر مربع AB را که [مساوی] صد بعلاوه‌ی مال است بر AD که ده است تقسیم کنیم، خارج قسمت مساوی ده عدد و یک دهم مال خواهد بود، و آن AC است. ولی فرض کرده بودیم که AC مساوی مجموع AB و BD است. پس مجموع AB و BD [مساوی] ده عدد و یک دهم مال می‌باشد. از آن BD را که شیء است کم می‌کنیم، باقی می‌ماند ده عدد و یک دهم مال منهای شیء، و آن AB است. چون آنرا در مثل خودش ضرب کنیم حاصل می‌شود صد عدد و سه مال و یک دهم یک دهم مال مال منهای بیست شیء و منهای یک پنجم مکعب، که معادل صد عدد و مال است. پس جبر می‌کنیم و مقابله می‌کنیم و اسقاط می‌کنیم، نتیجه می‌شود که دو مال و یک دهم یک دهم مال مال معادل بیست شیء و یک پنجم مکعب است. سپس همد را به شیء تقسیم می‌کنیم تا به کمترین چهار جنسی ^۵ که بر همین نسبت‌اند باز گردد. پس از تقسیم چنین حاصل می‌شود که یک دهم یک دهم مکعب و دو شیء معادل یک پنجم مال و بیست عدد است. سپس یک دهم یک دهم را بوسیله‌ی ضرب کردن آن در صد کامل می‌کنیم، و هم‌چنین تمام مراتب را در صد ضرب می‌کنیم، نتیجه می‌شود که مکعب و دو بیست شیء معادل بیست مال و دو هزار عدد است. پس، تحلیل منجر شد به معادله‌ی چهار جنس، و این را، بدان سبب که

$$(۵) \text{ معادله‌ای که بدست آمده } x^4 + \frac{1}{10} x^2 = 20x + \frac{1}{10} x^4 \text{ است. خیام}$$

بوسیله‌ی تناسب مراتب عدد و شیء و مال و کعب و غیره (مثلاً رجوع شود به ذیل ۵۰۱۰۳، § ۱)

$$\text{صفحه‌ی ۱۶۲} \text{ معادله را بمعادله‌ی درجه‌ی سوم } x^3 + \frac{1}{10} x^2 = 20x + \frac{1}{10} x^2 \text{ برمی‌گرداند.}$$

مکعب در آن جای دارد، نمی‌توان بوسیله‌ی هندسه‌ی مسطحه حل کرد، و در حلش احتیاج به قطوع مخروطی است.

[§ ۶۰۴ کلیاتی در باب معادلات]

[§ ۶۰۴۰۱ مقدمه -] و پیش از اینکه در آشکار ساختن مطلوب بوسیله‌ی قطوع مخروطی سخن گوئیم، نکته‌ای می‌آوریم که مطالعه‌کنندگان این رساله را بطلب دانش و استوار ساختن مطالبی که ایشان را بر آنها می‌آگاهانیم تحریر کند؛ و نعمتهائی را که خدای تعالی به بعضی بندگان خود اعطا فرموده شکرانی باشد، زیرا بزبان آوردن نعمتها شکر گذاری بزرگی نسبت به نعمت دهنده است - چنانکه در قرآن می‌فرماید و اما بنعمة ربك فحدث . پس خواننده‌ی این رساله گمان نبرد که سخن را برای خودستائی باین مرحله کشانیدیم، چو این از عادات درماندگان گزاف‌گوی خود بین است، و خودبینی دون همتان را سزد، زیرا روان آنانرا جز برای درك اندکی از علوم گنجایش نباشد، و چون آنرا دریابند چنین پندارند که همدی علوم همین و به همین محصور است، و پناه به خدا می‌بریم از اینکه نفس ما آرائی را در نظر ما خوب جلوه دهد که ما را گمراه کنند، و از رسیدن بحقایق و نیل به مقصد و رستگاری باز دارند.

[§ ۶۰۴۰۲ مراتب مجهول -] گوئیم آن چیزی را که جبریها مال مال می‌خوانند در مقادیر متصل^۵ امری موهوم است، و به‌هیچوجه وجود خارجی ندارد، و اطلاق الفاظ مال مال و مال کعب و کعب کعب و جز آنها بر مقادیر متصل از جهت اطلاق عدد بر این مقادیر است^{۵۵}؛ زیرا اعداد و مقادیر جملگی از جنس کمیت هستند، و بیان این مطلب را علمای حکمت اولی برعهده دارند.

اما چیزهائی که جبریها بکار می‌برند، و در خارج و در مقادیر متصل جود دارد

(۵) رجوع شود به ۵۰۱۰۲ § .

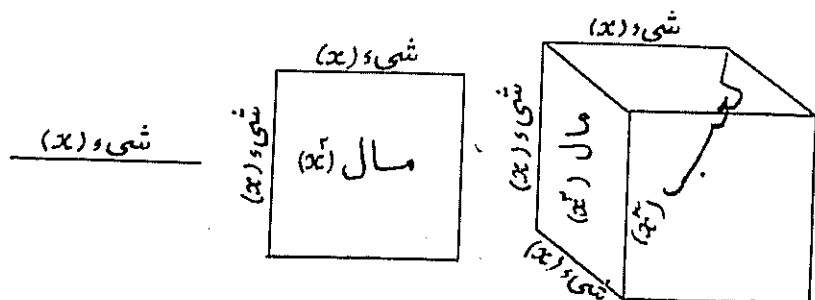
(۵۵) رجوع شود به ذیل صفحه‌ی ۱۶۴ و ۴۰۲۰۱ § (م ۱۳۸) .

چهار است: عدد و شیء و مال و مکعب. اما عدد [مطلق] آنست که عدد مجرد از همدی ماده‌ها در ذهن اندیشیده شود، و آن وجود خارجی ندارد، زیرا عدد چیزی است معقول و کلی که فقط آنگاه وجود خارجی پیدا می‌کند که بوسیله‌ی ماده متشخص شود.

اما شیء در مقادیر متصل به منزله خط مستقیم است. و اما مال بمنزله‌ی چهار ضلعی متساوی‌الاضلاع و قائم‌الزاویائی است که ضلعش مساوی خط مستقیمی باشد که نام شیء بر آن اطلاق شده است^۵. و مکعب آنچه‌ان جسمی است که شش سطح چهار ضلعی و متساوی و دارای اضلاع مساوی و زوایای قائمه بر آن محیط باشند، و ضلعش همان خط مستقیمی باشد که اسم شیء بر آن اطلاق شده، و هر سطح آن مربعی است که نام مال بر آن اطلاق شده. پس، مکعب از ضرب کردن شیء در مثل خودش، و سپس، ضرب کردن این حاصل ضرب در شیء حاصل می‌شود، و توضیح ساختن آن و برهان آنرا اقلیدس در شکل بیست و هفتم مقالده‌ی یازدهم کتاب خود در اصول [هندسه] آورده است.

و اما مال مال، که جبرها آنرا حاصل ضرب مال در مال می‌دانند، در مقادیر متصل معنی ندارد؛ زیرا چگونه می‌توان مربع را که سطح است در مثل خودش ضرب کرد⁺. چو سطح چیزی است دارای دو بُعد، و حاصل ضرب دو بعد

(۵)



(+) رجوع شود به § ۰۲۰۱: (۱۳۸).

در دو بعد چهار بعد می‌شود، و جسم را ممکن نیست بیش از دو بعد باشد. پس هر آنچه بد جبر استخراج می‌شود از همین چهار مرتبه استخراج می‌گردد، و آنکه گمان کرده است که جبر حیل‌های در استخراج اعداد مجهول است امر نامعقولی را گمان برده است، و نباید باینکه جبر و هندسه در ظاهر مختلف‌اند توجه کرد، بلکه جبر و مقابله امور است هندسی که بوسیله‌ی اشکال پنجم و ششم مقاله‌ی دوم اصول مبرهن می‌شود. *

[§ ۶۰۴۰۳۰۱ تبصره -] و اما آنکه گفته است که مال مال و سه مال معادل بیست و هشت است، و سپس عده‌ی مالها را نصف کرده، و [حاصل را] در خودش ضرب کرده، و عدد را بر آن افزوده و جذر حاصل را گرفته - و آن پنج و نیم شده - و از آن نصف عده‌ی مالها را کم کرده، و چهار مانده، و گفته است که آن مال است و مال مال شانزده است، و سپس پنداشته که مال مال از راه جبر استخراج شده، گمانش سخت ضعیف است †، چو وی مال مال را استخراج نکرده، بلکه مال را بدست آورده است، و مانند اینست که مال و سه جذر معادل بیست و هشت باشد، و سپس جذر را بر طبق مقاله‌ی دوم [کتاب اصول] استخراج کند، و اصرار ورزد که جذری که استخراج کرده جذر مال مال است. و این سری است که بوسیله‌ی آن براسراری

(*) اشکال مذکور معادل دستورهای

$$x(a-x) + \left(\frac{a}{3} - x\right)^2 = \left(\frac{a}{3}\right)^2$$

$$x(a+x) + \left(\frac{a}{3}\right)^2 = \left(\frac{a}{3} + x\right)^2$$

است. رجوع شود به حل معادله‌ی درجی دوم در § ۵۰۴.

(†) یعنی اگر در حل معادله‌ی $x^4 + 3x^2 = 28$ بگوئیم

$$x^2 = \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 28} - \left(\frac{3}{2}\right),$$

و یا $x^2 = 4$ و لهذا $x^4 = 16$ ، (بزعم خیام) x^4 را بطریق جبری استخراج نکرده‌ایم، بلکه، چون معادله‌ی مذکور قابل تحویل بصورت $z^2 + 3z = 28$ است، نباید مقدار $(z = x^2)$ را که از این معادله استخراج کرده‌ایم جذر x^4 بدانیم!

آگاه خواهی شد .

[§ ۶۰۴۰۳ طبقه بندی معادلات^۵]

و اینک باز می گردیم بموضوعی که در بحث آن بودیم .
گوئیم که معادلات سه مرتبه ای اول ، یعنی اعداد و جذرها و مالها ، به شش
شعبه باز میگردد : سه معادله ای مفرد و سه معادله ای مقترن . و مجهولات آنها را
میشود به مقالدهی دوم [اصول] استخراج کرد ، چنانکه در کتاب جبرها گفته و شرح
داده شده است . اما اگر مکعب مورد نظر قرار گیرد ، و بین آن و سایر مراتب
معادله ای قرار داده شود ، درین صورت [برای حل این معادله] احتیاج به هندسه ای
مجسمه و مخصوصاً مخروطات و قطوع مخروطی پیدا می شود ، زیرا مکعب جسم
است . اما مفردات آن^۶ سه است : مکعبی که معادل مالها باشد ، و آن [در حکم]
اینست که جذرهای معادل اعداد باشد ؛ و مکعبی که معادل جذرها باشد ، و آن
در حکم اینست که مالهایی معادل اعداد باشد ؛ مکعبی که معادل اعداد باشد ، و
برای حل [عددی] این معادله راهی نیست مگر راههای عددی که برای استخراج
کعبها آماده است^۷ ، و یا راههای هندسی که بوسیله ای آنها جسمی متوازی السطوح
مساوی جسم متوازی السطوح مفروض دیگر ساخته میشود ، و در اینگونه اعمال ناچار
به قطوع مخروطی ، و یا - برای کسانی که مخروطات نمی دانند - به آلائی^۸
احتیاج می افتد .

اما مقترنات آن^۹ دو صنف است : سه تائی و چهار تائی . سه تائی ها عبارتست
از مکعب و مالها معادل اعداد است ، و آن جز بوسیله ی قطوع حل نمی شود ؛ و
مکعب و اموال معادل جذرها است ، و حکم آن همان حکم معادله ی مال و جذرها

(۵) رجوع شود به § ۵۰۲ و § ۴۰۲ و مخصوصاً § ۳۰۶ .

(۵۵) یعنی مفردات درجه ی سوم .

(†) رجوع شود به § ۵۰۲۰۲ .

(††) در این باب به § ۴۰۴۰۲ (ص ۱۵۵) رجوع شود .

(X) یعنی مقترناتی که شامل مکعب است ، و بعبارت دیگر ، مقترنات درجه ی سوم .

با عدد است؛ و مکعب و اعداد معادل جذرها است، و آن جز بوسیله قطوع حل نمیشود؛ و مکعب و اعداد معادل مالها است، و آن جز بوسیله قطوع حل نمیشود؛ و مکعب و جذرها معادل اعداد است، و آن جز بوسیله قطوع حل نمیشود؛ و مکعب و جذرها معادل مالها است، و آن در حکم معادله‌ی مال و عدد با جذر است؛ و مالها و جذرها معادل مکعبی است، و آن در حکم معادله‌ی جذرها و اعداد با مال است؛ و مالها و عدد معادل مکعب است، و آن جز بوسیله قطوع حل نمیشود؛ و جذرها و اعداد معادل مکعب است و آن جز بوسیله قطوع حل نمیشود.

و اینها که ذکر شد نه نوع سه تائی است که سه از آنها بوسیله [مقاله‌ی] دوم اصول حل می‌شود، و شش دیگر جز بوسیله قطوع مخروطی حل نمی‌شود. و اما چهارتائی‌ها اینست که مکعب معادل مالها و جذرها و اعداد است؛ مکعب و جذرها و اعداد معادل مالها است؛ مکعب و مالها و اعداد معادل جذرها است؛ مکعب و مالها و جذرها معادل اعداد است؛ مکعب و مال معادل جذرها و اعداد است؛ مکعب و جذرها معادل مالها و اعداد است؛ مکعب و اعداد معادل مالها و جذرها است. و اینها هفت نوع چهارتائی است که هیچیک جز بوسیله قطوع مخروطی حل نمی‌شود.

پس، از معادلات مرکب [⊛] سیزده نوع حاصل شد که جزء به قطوع مخروطی حل نمی‌شود، و نوعی از مفردات هست که جز بوسیله قطوع مخروطی حل نمیشود، و آن مکعبی است که معادل عدد باشد.

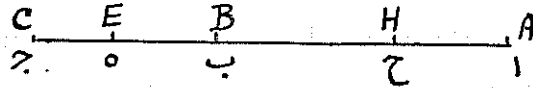
[§ ۶۰۴۰۴ نظر اجمالی به تاریخ معادلات درجه‌ی سوم و کارهای مؤلف]

اما ریاضیون قدیم از غیر اهل زبان ما ^{⊛⊛} به چیزی ازین مقوله پی نبردند، و

(⊛) یعنی مقترن، و بعبارت دیگر، دارای بیش از دو جمله.

(⊛⊛) مقصود زبان عربی است.

[یا از اطلاعات ایشان درین باب] چیزی بما نرسیده و بزبان ما نقل نشده. ولی از متأخرین از اهل زبان ما، اول کسی که به صنفی سد تائی ازین اصناف چهارده گانه دوچار شد ماهانی[†] مهندس است، که دست زد به حل مقدمه‌ای که ارشمیدس در شکل چهارم از مقالهی دوم کتاب کره و استواءه آنرا مسلم گرفته، و آنچه ذکر کرده اینست[‡]. ارشمیدس گفته است که دو خط AB و BC از حیث مقدار معلوم، و بربك امتداد متصل اند، و نسبت BC به BE معلومست. پس، بنا بر آنچه در معطیات ثابت شده، CE معلومست. سپس گفته است که نسبت HC به CE را مثل نسبت مربع AB به مربع AH قرار می‌دهیم. ولی نمی‌گوید که این مطلب چگونه دانسته می‌شود،



زیرا این مطلب ناچار محتاج به قطوع مخروطی است، و در کتاب کره و استواءه، جز درین مورد، چیزی که مبنی بر قطوع مخروطی باشد نیامده است، و باین جهت ارشمیدس این را نیز مسلم گرفته. و شکل چهارم [که بدان اشاره شد] عبارتست از تقسیم کره بوسیله‌ی سطحی مستوی به نسبت معلومی.

و ماهانی [در تحلیل مقدمه‌ی مذکور] اصطلاحات جبریه را بکار برد، و چون تحلیل منجر به معادله‌ای بین اعداد و اموال و کعب‌ها شد، و نتوانست آنرا بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کند، آنرا ممتنع شمرد، و با مقام فضل و تقدم فاضل مزبور درین فن، حل صنفی از اصناف مذکور براو پوشیده ماند؛ تا ابو جعفر خازن^{‡‡} ظاهر شد، و راهی برای حل آن یافت، و آنرا در رساله‌ای آورد.

. § ۳.۴.۰۰.۰۱ (†)

. § ۳.۰۷.۰۱ (‡)

. § ۳.۴.۰۰.۰۱ (‡‡)

و ابونصر ابن عراق مولی امیرالمؤمنین[☆]، از اهل خوارزم، پزداخت به حل مقدمه‌ای که ارشمیدس در استخراج ضلع هفت ضلعی [منتظم محاطی] در دایره آورده. و آن مربعی است دارای خاصیت مذکور [؟] - و او نیز اصطلاحات جبریها را بکار می‌برد، و بالنتیجه، تحلیل منجر شد به مکعب و مالهایی که معادل اعدادی است، و این معادله را بوسیله‌ی قطوع مخروطی حل کرد، و شك نیست که این مرد از بزرگان ریاضیون است.

و مسئله‌ای که ابو سهل کوهی[○] و ابوالوفای بوزجانی^{○○○} و ابوحامد صغانی و جماعتی از رفقای ایشان که در بغداد مقیم دربار عضدالدوله بودند از حل آن عاجز ماندند اینست که می‌خواهیم ده را به دو جزء تقسیم کنیم که مجموع مربعین آنها و خارج قسمت جزء بزرگتر بر جزء کوچکتر [معادل] هفتاد و دو شود[†]، و تحلیل [این مسئله] منجر شد به اموالی که معادل مکعب و جذرها و اعداد است. و این فضلا مدت مدیدی درین مسئله حیران ماندند تا ابوالجود^{††} آنرا حل کرد، و آنرا در کتابخانه‌های پادشاهان سامانی محزون نمودند.

پس این معادلات سه صنف از مرکبات^{†††} است، که دو از آنها سه‌تائی و یکی چهارتائی است، و یگانه صنف مفرد، یعنی معادله‌ی مکعب با اعداد. و این معادلات را فضلالی پیش ازما حل کرده‌اند، ولی از آثار آنان در ده صنف دیگر، و نه باین تفصیل

(☆) مقصود ابونصر منور ابن علی ابن عراق مولی امیرالمؤمنین، معروف به ابونصر عراق (متوفی در ۴۵۸ هـ ق)، است که از ریاضیون و منجمین معروف و معاصر ابوریحان بیرونی بوده. برای اطلاع بیشتر رجوع شود به: دکتر محمد معین، چهار مقاله‌ی عروضی سمرقندی، صص ۴۱۹ - ۲۲.

$$\begin{array}{ll} \S ۳۰۴۰۰۰۳ (○○○) & \S ۳۰۴۰۰۰۰ (○○) \\ \S ۳۰۴۰۰۰۸ (††) & \S ۵۰۸۰۴۰۱ (†) \\ \S ††† & \end{array}$$

یعنی از مقترنات. این سه صنف عبارتست از:

$$\begin{array}{ll} x^2 + a = cx^2 & (\text{معادله‌ی ماهانی}) \\ x^3 + cx^2 = a & (\text{ابونصر عراق}) \\ x^3 + bx + a = cx^2 & (\text{ابوالجود}) \end{array}$$

[که در طبقه بندی سابق مذکور شد]، چیزی به ما نرسیده است [□] و اگر فرصتی دست دهد، و توفیق رفیق شود همی این اصناف چهارده گانه را با جملگی شاخه‌ها و حالات آنها و تمیز آنچه ممکن است از آنچه ممتنع است گرد می آورم، تا رساله‌ای شامل عده‌ای از مقدمات که در اصول این فن فواید عظیم دارد پرداخته آید ^{□□}. و در این کار به رسمان توفیق الاهی چنگ میزنم، و بر او توکل می‌کنم، که در همی کارها یاری دهنده همو و توانائی و نیرومندی از اوست. جلت عظمته.

[۶۰۵ § حل معادله‌ی مثلث معین]

پس از تمهید این مقدمات به مسئله‌ی خود باز میگردیم، و آن جستجوی مکعبی است که با دوست ضلع خود معادل بیست مربع ضلع آن و دو هزار عدد باشد [†].

(□) رجوع شود به ۵۰۱۱۰۱ § در شرح کارهای منسوب به ابوالجود در این باب.

(□□) رجوع شود به ۴۰۴۰۱ § (۱۵۲ ص).

$$x^2 + 200x = 20x^2 + 2000 \quad (+)$$

§ ۵۰۹۰۳ است.

ترسیمات: $AB = 20$ ، $ER = 200$ (مستطیل طرف راست)، $EH = 1$ (همان

مستطیل)، $RH = 200$ (پس $RH = 200$)، $AC = \sqrt{200}$ ، $AC^2 = 200$ ، $AD = 2000$ ،

$$DB = 100, 200 = 10$$

نیمدایره‌ی BKD بقطر BD:

هندولوی متساوی‌القطرین NDK مار بر D با مجانبهای CE و CA.

حکم: $x = AL$.

برهان. بموجب خاصیت عمومی هندولوی، $EA = KC$ ؛ پس $EA - EM + DK = KC$

یا $AK = DT$ ، $AK = DT$ ، پس $AL : LT = DL : LK$ ، ولهذا

$$(۱) \quad \overline{AL}^2 : \overline{LT}^2 = \overline{DL}^2 : \overline{LK}^2$$

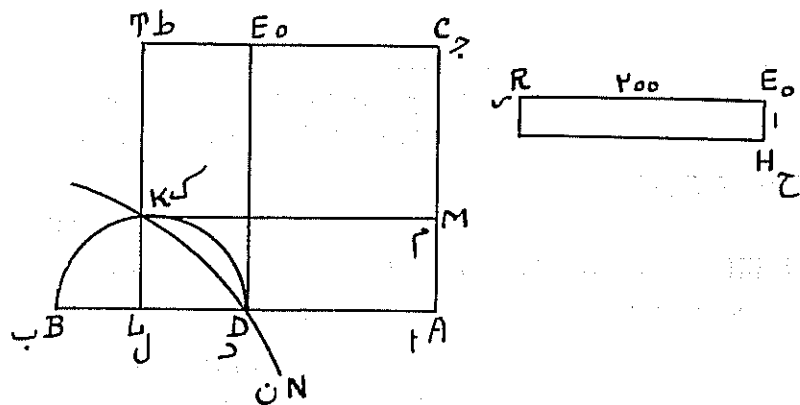
بعلت خاصیت دایره، $DL : LK = LK : LB$ ؛ پس

$$(۲) \quad \overline{DL}^2 : \overline{LK}^2 = (DL : LK)(LK : LB) = DL : LB$$

بموجب (۱) و (۲)، $AL^2 : LT^2 = DL : LB$ ، پس بترتیب،

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

خط AB را مساوی عده‌ی مربعات قرار میدهم، و آن بیست است. و خط ER را [در قسمت طرف راست، شکل] دوپست، و خط EH را [در همان قسمت شکل] واحد میگیریم. پس سطح مستطیل RH [در همان قسمت شکل] دوپست است. اینک، بنا بر آنچه در شکل چهاردهم مقاله‌ی دوم کتاب اصول ثابت شده، مربعی مساوی مستطیل RH می‌سازیم، و فرض میکنیم ضلع این مربع AC باشد، و آن بر AB عمود است، و مساوی جذر دوپست میباشد. و AD عبارتست از خارج قسمت عدد بر عده‌ی جذرها، و آن ده است، زیرا عدد دو هزار است، و عده‌ی جذرها دوپست است، و هر گاه دو هزار بر دوپست تقسیم شود ده خارج میگردد. و DB نیز ده است. اینک بر [قطر] DB نیمدایره‌ی DKB را میسازیم، و ED را موازی AC



میکشیم، و مستطیل AE را تمام میکنیم، و بطریقی که آپولونیوس فاضل در شکل

$$\begin{aligned} \overline{AL}^2 \cdot LB &= \overline{LT}^2 \cdot DL, & \text{بقیه‌ی ذیل صفحه قبل} \\ \overline{AL}^2 \cdot LB + \overline{LT}^2 \cdot AD &= \overline{LT}^2 \cdot DL + \overline{LT}^2 \cdot AD, \\ \overline{LT}^2 \cdot AL &= \overline{LT}^2 \cdot AD + \overline{AL}^2 \cdot LB, \\ 200 \cdot AL &= 2000 + \overline{AL}^2 \cdot LB, \\ \overline{AL}^2 + 200 \cdot AL &= 2000 + \overline{AL}^2 \cdot LB + \overline{AL}^2 \\ &= 2000 + \overline{AL}^2 \cdot AB \\ &= 2000 + 20 \overline{AL}^2, \end{aligned}$$

و هوالمطلوب.

پنجاه و نهم از مقاله‌ی اول کتاب مخروطات و شکل‌های پنجم و ششم این کتاب آورده ، قطع زایدی میسازیم که بر نقطه‌ی D بگذرد و خطوط AC و EC آنرا قطع نکنند ، - چو ساختن این قطع جز بوسیله‌ی این سه شکل اتمام نپذیرد - و آن قطع NDK است ، و دایره را در نقطه‌ی K قطع میکند . سپس از K عمود KL را بر AB اخراج میکنیم . حال گویم ضلع AL همان ضلع مکعبی است که با دو یست ضلع خود معادل یست مربع AL بملاوه‌ی دو هزار عدد است .

برهان آن . LK را مستقیماً امتداد میدهیم تا خط EC را در نقطه‌ی T قطع کند ، و KM را موازی AL میکشیم . چون KT موازی ED و KM موازی AD است ، سطح EA که زوایای آن قائمه‌اند مساوی سطح KC است که زوایایش قائمه‌اند ، زیرا دو نقطه‌ی K و D بر محیط قطع زایدی قرار دارند که خطوط AC و CT آنرا قطع نمیکنند ، و از هر يك از آنها دو خط به خطوطی که [قطع را] تلاقی نمیکنند کشیده شده که موازی دو خطی هستند که از نقطه‌ی دیگر کشیده شده - و برهان این مطلب را آپولونیوس فاضل در شکل چهارم مقاله‌ی دوم کتاب مخروطات آورده است . اما وضع دایره‌ی DKB معلومست (زیرا قطر آن که DB است از حیث وضع و مقدار معلومست) . و دو خط AC و CT از حیث وضع معلومند ، و وضع نقطه‌ی D معلومست ؛ پس وضع قطع NDK معلومست . و چون وضع دایره‌ی DKB [نیز] معلوم است ، وضع نقطه‌ی K معلوم است . پس وضع خط KL معلومست ؛ و لهذا ، وضع نقطه‌ی L معلوم میباشد ؛ و چون وضع A [نیز] معلومست ، مقدار خط AL معلوم است . و این مطالب از کتاب معطیات آشکار است .

اما ثابت کردیم که سطح EA مساوی سطح KC است . پس ، چون سطح EM را که مشترك است اسقاط کنیم ، دو سطح مساوی DM و EK باقی میماند ، و چون سطح DK را به هر دو بیفزائیم ، سطح AK مساوی سطح DT خواهد بود ؛ و چون زوایای این دو سطح متساوی اند - زیرا زوایای آنها قائمه‌اند - بنابراین آنچه اقلیدس در شکل

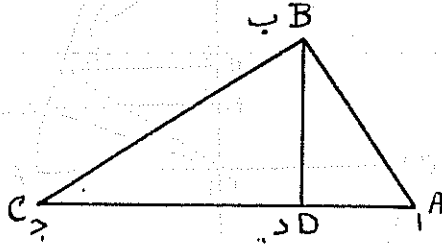
چهاردهم مقاله‌ی ششم ثابت کرده ، اضلاع آنها متکافی می‌باشند ، و نسبت AL به LT مثل نسبت DL به LK است . پس مربعات آنها نیز متناسبند ، و نسبت مربع AL به مربع LT مثل نسبت مربع DL به مربع LK است . اما نسبت DL به LK مثل نسبت LK به LB است . پس نسبت مربع DL به مربع LK مثل نسبت DL به LB است . پس لازم می‌آید که نسبت مربع AL به مربع LT مثل نسبت DL به LB باشد . بالنتیجه ، حاصل ضرب مربع AL در خط LB مساوی حاصل ضرب مربع LT در خط DL است ، و چون حاصل ضرب مربع LT در AD را به هر دو بیفزائیم حاصل ضرب مربع LT در AL مساوی حاصل ضرب مربع LT در AD بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB خواهد بود . اما مربع LT مساوی عده‌ی اضلاع یعنی دوست است ، و AL همان ضلع مکعب . پس دوست ضلع مکعب مساوی حاصل ضرب مربع LT در ضلع AD بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB است ، و چنانکه گذشت ، حاصل ضرب مربع LT در AD مساوی عدد است ، و آن دو هزار است . پس دو هزار عدد و حاصل ضرب مربع AL در LB مساوی دوست ضلع مکعب می‌باشد ، و چون مکعب AL را ، که همان حاصل ضرب مربع AL در AL است ، به هر دو بیفزائیم ، مکعب AL و دوست AL مساوی دو هزار عدد و حاصل ضرب مربع AL در AL و حاصل ضرب مربع AL در LB خواهد بود . اما حاصل ضرب مربع AL در AL بعلاوه‌ی حاصل ضرب مربع AL در LB مساوی حاصل ضرب مربع AL در AB است ، و چون AB را بیست فرض کرده بودیم ، حاصل ضرب مربع AL در AB بیست مربع AL می‌باشد . پس مکعب AL با دوست خط AL مساوی دو هزار عدد با بیست مربع ضلع مکعب است ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

[§ ۶۰۵۰۱ رسم مثلث همین]

و بعد از ذکر این مقدمات ، مثلث ABC را دگر باره می‌کشیم ، و AD را منطبق قرار می‌دهیم و آن ده است . درین صورت خط DB همان خط AL [شکل اخیر]

است که ثابت کردیم از حیث مقدار معلومست. و اینکه میگویم مقدارش معلومست مقصودم این نیست که کمیت آن معلومست - چو این دو مطلب متفاوت اند - بلکه از « معلوم بودن از حیث مقدار » همان معنی را قصد دارم که اقلیدس در کتاب معطیات قصد داشته، و آن اینست که مقداری مساوی آن توان یافت \star .

و اینک به مرحله‌ی ترکیب می‌پردازیم. خط AD را ده میگیریم، و BD را بزائویه قائمه بر آن و مساوی خط AL از شکل سابق قرار میدهم، و AB را وصل میکنیم، و از نقطه‌ی B عمود BC را $[AB]$ می‌کشیم، و AD را مستقیماً امتداد می‌دهیم تا عمود را در نقطه‌ی C قطع کند. پس ناچار لازم می‌آید که مثلث ABC



قائم الزواید باشد (یعنی زائویه B از آن قائمه است)، و خط AB با عمود BD مساوی وتر AC باشد، و خط AB با خط AD مساوی خط BC باشد، و این همانست که می‌خواستیم توضیح دهیم.

[§ ۶۰۶ حل مسئله‌ی § ۶۰۱ +]

و اینک به ربع دایره‌ی AB از دایره‌ی $ABCD$ باز میگردیم، و در آن قطرهای

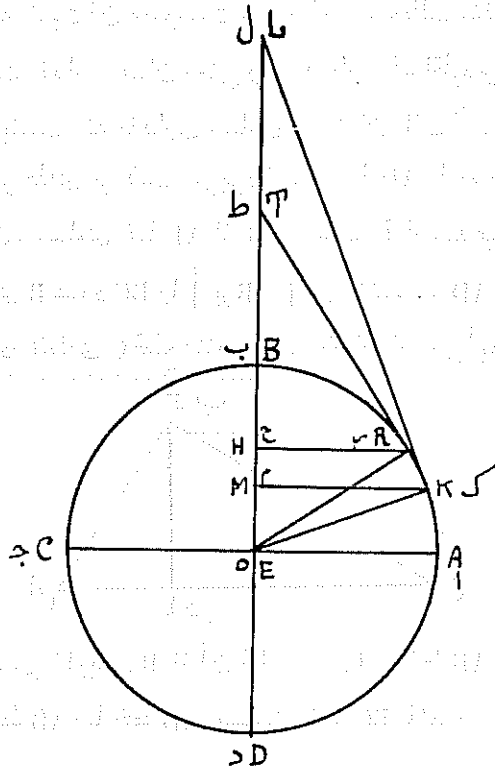
(۵) § ۳۰۲.۳۰۳.۳۰۲.

(+) پس از حل مثلث معین (۶۰۰۱) §، خیام به حل مسئله‌ی موضوع رساله (۶۰۱) § می‌پردازد، و چون در ۶۰۰۱ § و نیز در ۶۰۶ § حروف A ، B ، C ، D ، E ، F را بکار برده، برای تمیز آنها، حروف مربوط به شکل ۶۰۰۱ § را به لفظ « متقدم » مقید می‌کند. ما در این مورد حروف A ، B ، و غیره را بکار می‌بریم. اینک توضیح استدلال خیام.

چنانکه در ۶۰۰۱ § معلوم شد، مثلث قائم‌الزائویه A, B, C را واجد شرط

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

AC و BD را ، که یکدیگر را بزایدی قائمه قطع می کنند ، می کشیم . و مرکز



دایره نقطه‌ی E است . و از خط CD از مثلث ABC در شکل سابق خط CT را مساوی

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

$$(۱) \quad A,B + B,D = A,C,$$

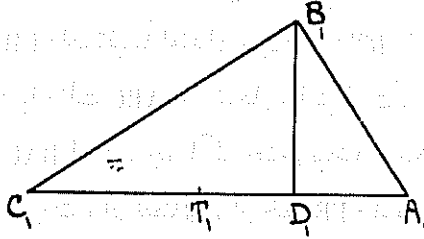
میسازیم ، و C,T را مساوی B,D جدا میکنیم . سپس در دایره‌ی مفروض نقطه‌ی H را بر شعاع EB چنان تعیین می‌کنیم که

$$(۲) \quad EH : HB = A,D : D,T ,$$

و HR و ER و مماس RT را میکشیم ، و کوئیم مثلث ERT با مثلث A,B,C متشابه است . برای این منظور کافی است ثابت کنیم که زوایای REH و B,A,C مساویند . اثبات به تشخیص حالات و برهان خلف است . اگر اولی کمتر از دومی باشد ، چون زاویه KEB را مساوی بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

عمود BD جدا می‌کنیم، و نصف قطر دایره را که خط EB در شکل حاضر است،

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل
دومی جدا کرده معاس KL را بکشیم، و مثلث EKL و A, B, C متشابه خواهند بود، و لهندا



اولا با توجه به (۱)، $EK + KM = LE$ ، و یا

$$(۳) \quad KM = BL$$

و ثانیاً

$$(۴) \quad LM : KM = C, D, : D, B,$$

$$(۵) \quad T, C, : D, A, = BL : ME.$$

از (۴) بموجب (۳) و $C, T, = B, D,$ نتیجه میشود $LM : LB = C, D, : C, T,$

و یا به تفضیل نسبت

$$(۶) \quad MB : LB = D, T, : C, T,$$

از (۵) و (۶) نتیجه میشود،

$$EM : MB = A, D, : D, T,$$

ولهندا، بموجب (۲)،

$$EM : MB = EH : HB.$$

اما $EM < EH$ ؛ پس $MB < HB$ ، و حال آنکه HB جزء MB است. پس فرض کوچکتر بودن زاویه‌ی REH از زاویه‌ی B, A, C باطل است. به همین قیاس معلوم میشود که فرض کوچکتر بودن دومی از اولی نیز باطل است. پس دو زاویه‌ی متساوی‌اند، و لهندا دو مثلث ERT و A, B, C متشابهند.

از تشابه دو مثلث معلوم میشود که $ER + RH = ET$ ، و لهندا $BT = RH$.

اینک کوئیم از طرفی $DH \cdot HB = \overline{RH}^2$ و از طرف دیگر $\overline{RH}^2 = EH \cdot HT$ پس

$$DH \cdot HB = EH \cdot HT, \text{ و لهندا } DH : EH = HT : HB$$

و یا $AE : EH = RH : HB$ ، و یا بالاخره $AE : RH = EH : HB$ و هوالمطلوب.

بطریقی که اقلیدس در شکل سیزدهم مقاله‌ی ششم ثابت کرده ، در نقطه‌ی H به نسبت AD به DT از مثلث ABC شکل سابق تقسیم می‌کنیم ، و عمود HR را می‌کشیم ، و ER را وصل می‌کنیم ، و از نقطه‌ی R خطی میکشیم که بر دایره مماس باشد ، و آن خط RT است . سپس EB را مستقیماً امتداد می‌دهیم تا RT را در نقطه‌ی T قطع کند . پس مثلث ERT متشابه با مثلث ABC از شکل سابق است . برهانش اینک زاویه‌ی REH مساوی زاویه‌ی BAC است ، چو اگر چنین نباشد ، یکی از آن دو ، مثلاً BAC بزرگتر است . در این صورت ، از نقطه‌ی E از خط EB زاویه‌ای مساوی زاویه‌ی BAC جدا می‌کنیم ، و آن زاویه‌ی KEB است ؛ و از نقطه‌ی K خطی بر دایره مماس میکشیم ، و آن خط KL است که ET را در نقطه‌ی L قطع می‌کند . پس مثلث EKL با مثلث ABC متشابه است ، زیرا زوایای آنها متساوی اند . و چون از نقطه‌ی K عمود KM را بر EB اخراج کنیم مجموع EK و KM مساوی LE خواهد بود ، و چون EB مساوی EK است ، BL مساوی KM است . اما نسبت LM به KM مثل نسبت CD به DB است ؛ پس نسبت ML به LB برابر نسبت CD است به BD ، و به تفضیل ، نسبت MB به BL مثل نسبت DT به CT خواهد بود . [از طرف دیگر] نسبت TC (که مساوی DB است) به DA برابر نسبت BL (که مساوی KM است) به ME است . پس ، در نسبت مساوات \star ، EM به MB مثل نسبت AD به DT است . ولی نسبت EH به

(۵) استدلال به قاعده‌ی نسبت مساوات اینست که اگر دو دسته از مقادیر مانند

$$a, b, c, \dots, k, l,$$

$$A, B, C, \dots, K, L,$$

اولاً از حیث عده مساوی باشند ، و ثانیاً

$$a : b = A : B, \quad b : c = B : C, \quad \dots, \quad k : l = K : L,$$

می‌توان نتیجه گرفت که

قاعده‌ی نسبت مساوات مضرباً آنست که اگر

$$a : b = B : C, \quad \dots, \quad b : c = A : B,$$

آنگاه $a : c = A : C$

بقیه در ذیل صفحه‌ی بعد

HB را مثل نسبت AD به DT قرار داده بودیم . پس نسبت EM به MB مثل نسبت EH به HB است . ولی EM ، که اولی است ، کمتر از EH است ، که سومی است ؛ پس ، بنا بر آنچه در [مقاله‌ی] پنجم اصول ، در شکل چهاردهم این مقاله ، ثابت شده ، لازم می‌آید که MB که دومی است ، کمتر از HB باشد ، که چهارمی است . ولی MB از HB بزرگتر است ، و این محال است . پس زاویه‌ی REH کمتر از زاویه‌ی BAC از مثلث ABC سابق نیست ، و [بهمین قیاس معلوم می‌شود که] بزرگتر از آن هم نمی‌باشد . پس مثلث RET با مثلث ABC سابق متشابه است ؛ و لهذا مجموع ER و RH مساوی ET است ، و بنابراین ، BT مساوی RH است . ولی حاصل ضرب DH در HB مساوی مربع HR می‌باشد ؛ و همچنین حاصل ضرب EH در HT مساوی مربع HR است . پس حاصل ضرب DH در HB مثل حاصل ضرب EH در HT است ، و لهذا ، بنا بر آنچه در شکل شانزدهم مقاله‌ی ششم [اصول] ثابت شده ، این چهار خط اربعه‌ی متناسبه هستند . پس ، نسبت DH ، که اولی است ، به HE ، که دومی است ، مثل نسبت HT است ، که سومی است ، به HB ، که چهارمی است ؛ و به تفضیل ، نسبت DE به EH مثل نسبت BT است به BH . اما DE مساوی AE و BT برابر RH است . پس نسبت AE به EH مثل نسبت RH به HB است ، و به تبدیل ، نسبت AE به RH برابر نسبت EH است به HB . پس ربع دایره را بدو قسمت در نقطه‌ی R تقسیم کردیم و از R عمود RH را [بر EB] کشیدیم بطوریکه نسبت AE ، که نصف قطر است ، به RH مثل نسبت EH به HB گردید ، و این همانست که می‌خواستیم ثابت کنیم .

بقیه‌ی ذیل صفحه‌ی قبل

برای مزید اطلاع رجوع شود به : تحریر اقلیدس ، ص ۷۲ و صص ۸۵-۸۱ (فضای ۲۲ و ۲۳)؛

هیث ، سیزده مقاله ، جلد ۲ ، صفحات ۱۱۵ و ۱۵۶-۱۵۷ و ۱۷۹-۱۸۳ .

در مورد مذکور در متن ، دو دسته مقادیر مورد بحث عبارتند از

MB, LB, ME,

DT, CT, DA.

پس بقاعده‌ی نسبت مساوات ، $MB : ME = DT : DA$ ، و لهذا $ME : MB = DA : DT$.

[۶۰۷ § در محاسبه‌ی مقدار تقریبی جواب]

و کسی که بخواهد [جواب مسئله را] به حساب بداند، چون به دقت بنگرد، راهی بدان نخواهد داشت، زیرا چیزهایی که به قطوع مخروطی استخراج می‌شود استخراج آنها به حساب ممکن نیست، و اگر جوینده به تخمین قانع باشد، براوست که به جداول اوتار مجسطی یا جداول جیبها و سهمها^{۱۵} در زیج معتمد رجوع کند، و در جدول قوسی بجوید که نسبت شصت که، بر حسب فرض، نصف قطر دایره است، به جیب آن قوس مثل جیب تمام آن باشد به سهمش^{۱۶}؛ و این قوس را قریب پنجاه و هفت درجه از تقسیماتی که بر حسب آنها دایره سبصد و شصت [درجه] است، و جیب آنرا قریب پنجاه جزء و سهمش را نزدیک بیست و هفت جزء و ثلث جزء، و جیب تمام آنرا نزدیک سی و دو جزء و دو ثلث جزء می‌یابیم. و ممکن است در دقت [محاسبه] بیش از این کوشید تا جایی که تفاوت [مقدار واقعی با نتیجه‌ی محاسبه] به اندازه‌ای تقلیل یابد که بحسب در نیاید.

(۱) سهم α یعنی $1 - \cos \alpha$.

(۲) اگر زاویه‌ی BER (شکل ۲۵۶) را به α نمایش دهیم، معادله‌ی مسئله چنین خواهد بود:

$$1 : \sin \alpha = \cos \alpha : (1 - \cos \alpha),$$

و از آن نتیجه میشود:

$$\sin \alpha = 0,8395, \quad \alpha = 57^\circ 5' 30'' \quad \text{و} \quad \cos \alpha = 0,5433.$$

باید دانست که ریاضیون اسلامی، به پیروی از یونانیان، قطر دایره را به ۱۲۵ قسمت متساوی تقسیم می‌کردند، و هر قسمت را یک جزء یا جزء قطر میخواندند، و جزء قطر را - مانند درجه - به دقیق و ثوانی و غیره تقسیم میکردند. واضحست که هر جزء قطر برابر ۳:۸ درجه و لهذا کمی از درجه کمتر است. اینک اگر α قوسی از دایره‌ی مثلثاتی و $\sin \alpha$ جیب معمولی آن و $\sin \alpha$ جیب آن بر حسب اجزای قطر باشد، واضح است که

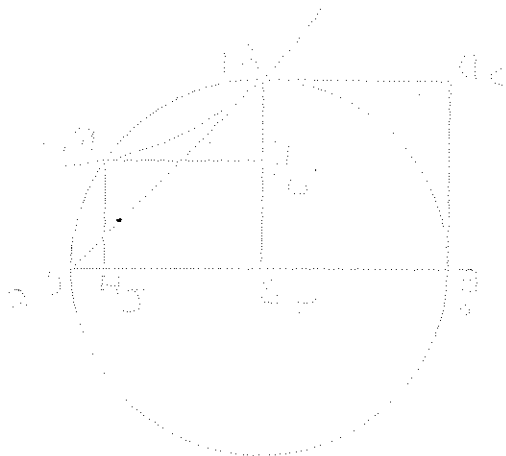
$$\sin \alpha = 60 \times \sin \alpha \quad (\text{جزء قطر})$$

پس، در مثال مورد بحث، $\sin \alpha = 50,37$ ، و این مقدار بر حسب اجزای فطراست (خیام مقدار ۵۵ را میدهد).

و در این باره در حدیثی آمده است: ******* «مَنْ سَأَلَ اللَّهَ بِحَقِّ حَقِّهِ لَمْ يَكُنْ يَسْأَلُ بِحَقِّهِ»

این بود آنچه، با پراکندگی فکر و آشفتگی خاطر و گرفتاری به کارهایی که مانع پرداختن باین قبیل جزئیات است، درین باب بر خاطر من گذشت. و اگر بلند پایگی این مجلس - که بلند پایگی آن بردوام بماند - و حق سؤال کننده‌ی این مسئله - که خداوند همواره او را مؤید بدارد - من خیلی ازین وادی دور بودم، چه کوشش من صرفاً معطوف به مطالبی است که در نزد من مهمتر از اینگونه مطالب جزئی است، و همت من مصروف آنهاست. و خدای تعالی در همه حال مورد شکر و ستایش است، و امید از او اینکه توفیق کارهای خیر عنایت فرماید که اجابت دعا در دست اوست.

باید دانست که دعا در دست خداست و در دست ما نیست. ما فقط می‌توانیم دعا کنیم و خداوند است که دعا را اجابت می‌کند. دعا را می‌توان به هر شیئی که بخواهد دعا کرد. دعا را می‌توان به هر شیئی که بخواهد دعا کرد. دعا را می‌توان به هر شیئی که بخواهد دعا کرد. دعا را می‌توان به هر شیئی که بخواهد دعا کرد.



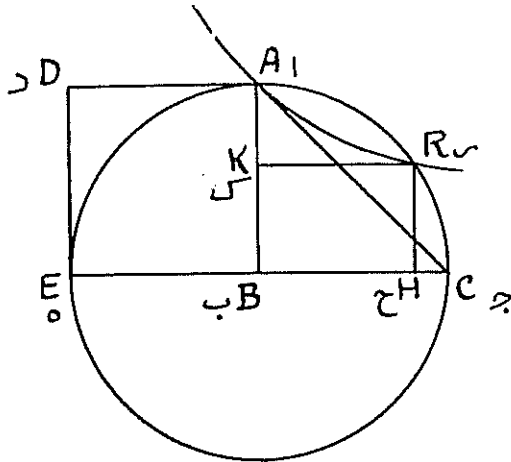
در این باره در حدیثی آمده است: «مَنْ سَأَلَ اللَّهَ بِحَقِّ حَقِّهِ لَمْ يَكُنْ يَسْأَلُ بِحَقِّهِ»

مسئله

ربع دایره‌ی AC به مرکز B مفروض است ، و میخواهیم AB را چنانکه دانستی تقسیم کنیم . *

بر AB شکلی چهارضلعی میسازیم که اضلاعش و زوایایش متساوی باشند ، و آن AE است . پس وضع خطوط BE و ED معلوم است . و وضع E معلوم می‌باشد . پس بر A قطع زایدی می‌کشیم که خطوط BE و ED آنرا قطع نکنند ، و آن قطع AR است . پس وضع این قطع معلوم می‌باشد . و اگر AC را وصل کنیم ناچار بر قطع مماس خواهد بود ، و چون AC در داخل دایره است لازم آید که قطع زاید دایره را قطع کند . فرض کنیم R نقطه‌ی تقاطع باشد . وضع R معلوم است . حال دو عمود RH و RK را می‌کشیم و گوئیم عمل تمامست .

برهانش اینکه نقاط A و R بر محیط قطع واقعند ، و از هر يك دو خط اخراج شده که موازی دو خط اخراج شده از دیگری است . پس سطح RE مساوی سطح AE است ، و چون KE را که مشترك است اسقاط کنیم نتیجه می‌شود که KH مساوی KD است ، و چون زوایای این دو شکل متساویند اضلاعشان متکافی‌اند ، و نسبت AD به KR مثل نسبت BK به KA است . تمام شد .



[در این شکل RK را تا محل تلاقی آن با ED امتداد دهید]

(*) یعنی بطوری که $BC : KR = BK : KA$

عكس

رساله‌ی خيام

در تحليل يك مسئله به معادله‌ی درجه‌ی سوم

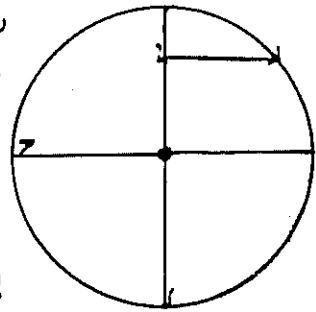
که اصل آن در

کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران

مضبوط است

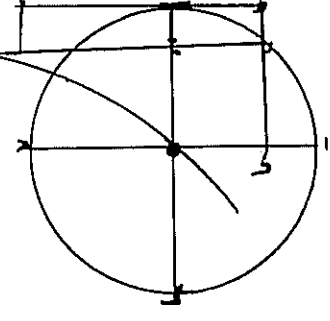
هذه مسائل في رسم الدائرة المحيطة بالقطر والزاوية المقابلة لها
 في دائرة تقسم بضع دوائر من اربع اقسام وتقسيم على نقطة مثل ان يخرج عمود
 على نقطة فيكون نسبة اولى الى اربعة الى اربعة الى اربعة مركز الدائرة واه نصف القطر

نصف القطر فانما نزلنا فعدنا حتى نردى التعليل الى امر معلوم
 تركيب على ذلك الصفة فبعد اربع اقسام ودمر كرهاة ونخرج اذ
 ربعا طمان على ذوايا فانه ونخرج عمود فيكون نسبة
 اليه كنسبة اربعة الى اربعة ونخرج عمود في وسطه ونقسم على طمان
 بعد ان جعلنا خط اربعة مثل اربعة فلان نسبة اربعة الى اربعة كنسبة اربعة



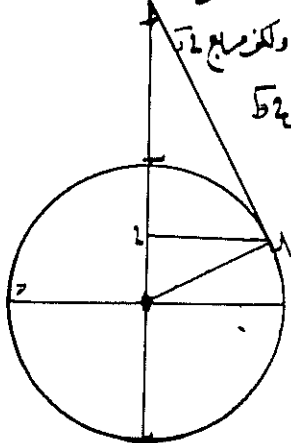
لا اربعة الى اربعة كنسبة اربعة الى اربعة ضرب اربعة في اربعة مساويا لضرب اربعة في اربعة كما
 بينه الهندس في توفيق الاصول وضرب اربعة في اربعة مثل اربعة الى اربعة وضرب اربعة في اربعة مثل اربعة

اربعة في اربعة فيكون اربعة مساويا لاطرفه فيكون اربعة في اربعة
 اربعة فيكون اربعة مساويا لاطرفه فان عملنا قطعا اربعة
 لا يطاق ونخطاه طمان فير على نقطة كما بينه الهندس
 في نظرية المقالة الاولى من كتاب المخروطات والشكل
 وة من المقالة الثانية من هذا الكتاب اذ هذا العمل يتم به



الاشكال المتضمنة فان ذلك القطع الزايد يمر على نقطة لا اربعة كما بينت في الشكل الثامن
 المقالة الثانية من كتاب المخروطات ونقطة معلومة الوضع وخط اربعة معلوم الوضع والعدد لا
 ان نقطة اربعة عند التركيب غير معلومة الوضع لانها كانت معلومة الوضع لكانت نقطة معلومة
 الوضع لانه خط اربعة معلوم العدد فيكون خط اربعة معلوم العدد ولما كان الشكل معلوما وكذا

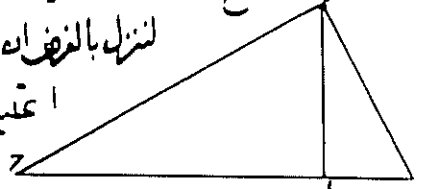
خط طه غير معلوم الوضع لانه لو كان معلوم الوضع لكات نقطة معلومة الوضع ولوكات نقطة معلومة الوضع لكات خط طه معلوم القدر ولوكان خط طه معلوم القدر لكات الشكل ليس كذلك اذ المقصود علم الشكل فلوكات نقطة معلومة الوضع او خط طه معلوم الوضع لكات يمكن ان يعلم الشكل ومثال المقصود عند التركيب بسهولة وليس المعرفه بها هي سهولة بحيث هذه الطريقة للباحث السبصر ككتاب المخروطات لا يوصل الى المطلوب بطريقه اخرى لكنه كمنظور لهذه الطريقة واما اوردت هذه الطريقة مع صعوبتها ليكون شبه تمهيد للمتعلم وترطبه له ولم اتمها ولم اتركها على الوجه الهندسي لصعوبتها وكثرة افتقارها الى عدة معدات وغيره من القطوع المخروطية والعيون منشا من العالمين بقطع المخروط بعد ما حصلت له الطريقة التي اذكرها فانها ان كانت ايضا معتقده المعدات المخروطية فهي سهل بكثير من الاول وسدتها اعم منصفه فاقول بمرتب الله بنسب الشكل بعينه ونزل بالتحليل اننا قد فعلنا ما اردنا وصارت نسبة آه الى الارب كسنة ٥ الى ٤ وتخرج من نقطة خط تماس الارب وهو خط على ابيته المماس في مركزه ويخرج ه على استقامته حتى ينقطع للخط التماس على نقطة ط ونصل رة نلون مثلث ه ر ط راد بترسنة قائمه وخرج فراد بترسنة الى القاعدة فخط ما بين ه في شكله من ه يكون نسبة



لادركسنة ه ر الى ط فيكون مربع ح مساويا لضرب ه ح في ح ولكن مربع ح في ح مساو لضرب ه ح في ح فيكون ح ضرب ه ح في ح مساويا لضرب ه ح في ح فيكون نسبة ه ر الى ه ح كسنة ٤ الى ٥ على ما بين ه بوتر ه ر فالتفصيل يكون نسبة ه ر الى ه ح كسنة ٤ الى ٥ وقد كانا نسبة آه الى الارب كسنة ٥ الى ٤ فالتسوية يكون نسبة آه الى الارب كسنة ٥ الى ٤ وقد كانت نسبة رة الى ه كسنة ٤ الى ٥ فيكون نسبة رة الى الارب كسنة ٤ الى ٥ والعايد

التي نسبتها الارب الى ه واحد بعينه متساوية فانها ايضا متساوية كما بين في شكل طه مربعه فمما فيكون ح مساويا لخط طه وقد اوردت التحليل الى الثلث قائم الزاوية بشرط ان يكون وتر الزاوية القائمة مساويا لاه الضلعين المحيطين

بالرأية مجموعا لا العود الخارج منها لا وترها نكلما عدنا مثلنا قائم الزاوية هذه الصفة المتكافئة
 الشكل على الصفة المذكورة وان هذه العندما عن هذا المثلث هذه الصفة عظيمة المنفعة في اشارة
 هذه الاشكال ولها خواص اخرى يذكر بعضها في سنن المناظر لمنفعةها في اكثر اشياء هذه
 اقرب ان هذا المثلث لا يمكن ان يكون متساوي الساقين لانه لو كان ضلع هـ ر مثل د ر لكان
 د هـ مثل د ط و لكان العود ساريا لكل واحد منهما و لكان هـ ط ضعف العود و لكان مجموع هـ ر
 والعود اعظم من الوتر و في حقه ساريا به هـ ف و اقرب ان هذا المثلث هـ ر اصغر من هـ ط
 لانه لو كان اعظم منه لكان هـ د اعظم من هـ ط لكان د ر اذن هو الخط الوسط في خطي هـ ر و د
 اعظم من هـ ط وقد فرض هـ ر مثل ط ت فيكون ط ت اعظم من ط هـ الخ اعظم من الكل لهذا تخلف
 بين ان اسفل على هذه الصفة يكون الضلع الاصغر مع العود ساريا بضلع الاعظم وذلك
 اردنا ان نبين خواصه ان الضلع الاعظم من الضلعين المتعينين بالزاوية القائمة ساريا مجموع
 الاصغر مع القطعة التي يتردها العود من الوتر من جانب الضلع الاصغر ولكن شامنا من الشكل
 المتقدم اقرب ان مجموع هـ ر هـ ساريا لضلع ر د ب هـ ان نسبة هـ ر الى هـ ك نسبة ط ت
 الى سح فبا التركيب يكون نسبة هـ ر الى هـ ك نسبة هـ ط الى د ت وبالعكس يكون نسبة هـ ر الى
 هـ ط ك نسبة هـ ر الى د ت ولكن نسبة هـ ر الى د ت ك نسبة هـ ر الى هـ ط ك نسبة هـ ر الى
 الى ط لثا بثلثي هـ ر هـ ط فيكون نسبة ر ط الى هـ ط ك نسبة هـ ر الى هـ ط فيكون هـ ط ساريا
 الى د هـ و هـ ر مثل مجموع هـ ر هـ ط فيكون هـ ر هـ ط مثل د ر و ذلك ما اردنا ان نبين ومن بعد ما
 قدمه هنا فاننا نضع مثلث اسد و زاوية ر منه قائمة ونخرج من نقطة عود سـ و على آد و



لنزل بالفرق ان ضلع اس مع عود سـ و جميعا مثل آد حتى يرد
 اعلى الى معلوم ثم يركب حتى يجعل لنا مثلث بضعة
 المذكورة ولكن نكتب اثنين بالتقريب الا اذا

ر اصحاب الضامة في سهد نظرت الحية باستقام المناظر اهل الجبر ان مثل هذه المثلث
 فسنهج سبيلهم في ذلك وان لم السهد الفاظ الجبرين جاز ويكون العود احدا الا ان هذه
 الا الفاظ اذا السهد كان الضرب والسمه اسهد ونضع خط آد نطلقا في القرد ولكن عظمة

و نضجه $\frac{1}{10}$ و نضجه $\frac{1}{10}$ يكون ما لو و بصير عشرة في مثلها يكون سابع و نضجهما يكون $\frac{1}{10}$
 و مال و هو مربع $\frac{1}{10}$ كائين في قمر $\frac{1}{10}$ و من ان نضجه $\frac{1}{10}$ الى ان كنبته $\frac{1}{10}$ الى ان نضجه $\frac{1}{10}$
 $\frac{1}{10}$ و يكون ضرب $\frac{1}{10}$ في $\frac{1}{10}$ و بالمرج $\frac{1}{10}$ فانما قسمنا مربع $\frac{1}{10}$ الذي هو بالعدد مال
 على $\frac{1}{10}$ الذي هو عشرة يخرج من القسمة عشرة عدد و عشروا مال و هو $\frac{1}{10}$ و قد كنا فرضنا ان $\frac{1}{10}$ مثل
 مجموع $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{10}$ فيكون مجموع $\frac{1}{10}$ و عشرة عدد و عشروا مال نقصنا منه $\frac{1}{10}$ الذي هو $\frac{1}{10}$
 عشرة عدد و عشروا مال الاشارة هو ان نضجه $\frac{1}{10}$ في مثلها يحصل ما من العدد و ثلثة احوال و $\frac{1}{10}$
 مال الا عشرة شيئا و الاخر كعب يعادل ما من العدد و لا ينجبر و يبادل و يقاوم بقوا لاون $\frac{1}{10}$
 عشروا مال بيد عشرة شيئا و هم كعب فيقسم الجميع على الشيء ليرجع الى القسمة انما على
 النضجه يخرج من القسمة عشرة كعب شيئا بيد $\frac{1}{10}$ و $\frac{1}{10}$ عشرة عدد و يكمل عشرة
 عشرة كعب $\frac{1}{10}$ بضرب في ثمانية و كذا في جميع احوال نضجه $\frac{1}{10}$ في ثمانية فيحصل كعب و ثمانية
 عشرون مالا و النضج من العدد قد ادى التحليل الى عبارات اخرى اجناس و هذا لا يمكن ان
 بالهندسة يمكن الكعب و يحتاج فيها الى قطع المخروطات و من قبل ان نخوض في ابانة
 حلها بنا بالقطع نقدم مضمون تعريفنا لناظر في هذه الرسالة على طلب العلوم و اتقانها انما
 النونية به يشكر نعم مرفقة على بعض عماله فان التحدث بالعلم شكر عظيم للنعم كما نزل في
 بقدرتك فحدث فلا يفتن الناظر ان هذا كلام جرح الا هذا القاء جاسما هاء فان فلتت
 عادات الفجرة المتصلة همهم و حق السفلة لا يحجاب فان نفوسهم لا تسع الا لفظ شي ^{العلم} زور
 فلما ادر كره طورا ان ذلك القدر هو الفرض المعلوم و جمعها و نفوسه من ان يسوق لنا ^{العلم} اننا
 لراه ^{العلم} تحتظار تحتظار عن درن الخاتين ^{العلم} الفون فانها اذ ^{العلم} ان هذا الذي يسمى الجبر
 $\frac{1}{10}$ مال اربعمائة في الزاد و المتصلة و لا وجود لها في الاعيان و وجه من وجهه و انما يطلق على
 اعتماد المتصلة لفظه بالمال $\frac{1}{10}$ الكعب و كعب الكعب و عمدها حيث ^{العلم} الخلافة العدد
 اذا استد و اعتماد يشترك في جنس الكمية على ما يتولد ما تارة صاحب العلم الا ^{العلم} انما الاستد
 نسخبه الجبريون و لها وجود في الاعيان و اعتماد المتصلة اربعة اعداد ^{العلم} الاش و المال ^{العلم} الكعب
 اما العدد فمران ^{العلم} و هذا العدد مجرد عن ^{العلم} المراد في العدد و لا يكون له وجود في الاعيان او العدد

معقول كل لا يوجد الا مستحصا بالمراد واما الشيء فنزله من القادير المصنعه نزله الخط المستقيم واما
 المال فنزله الميه المتساوي الاضلاع القائم الزوايا الذي ضلعه ذلك الخط المستقيم المطلق
 لفظ الشيء والمكعب هو الجسم الذي يحيط بستة سطح مربعه وثمانية متساوية الاضلاع
 قائمه الزوايا الذي ضلعه الخط المستقيم المطلق عليه اسم الشيء واحده طرفه المربع المطلق عليه اسم
 المال فهو المحاصل من ضرب الشيء في الشيء ثم ضرب السطح في الشيء وقد بين علمه قليلا من غير
 في ترجمته في كتابه في الاصول واما مال المال الذي هو عند الجبرين حاصل ضرب المال
 في مثله فله معنى له في المقادير المتصلة لان الميه الذي هو على كيف يمكن ان يضرب في شيء اذا سطر
 بعدات بعدات في بعدين امر جبر ابعاد والجسم لا يمكن ان يكون له اكثر من ثلثة ابعاد فجميع الاشياء
 التي تخرج بالجبر اما تخرج من هذه الاربعة الاجناس ومن غير الناس ان الجبر حيلة في استخراج
 الاعداد الجبرية فقد فرغ مما لا فلا تمتفت الالظواهر من المختلفين بل الجبر والتقابل هو هذ
 برهن عليها في مقاله من الاصول في محله ودمته واسما قال مال مال وثلثة اموال
 ثمانية وعشرين من العدد فخصف الاموال وضرب في مثله فذاد العدد واخذ جذر السطح فكا
 عشرة وسبع ونقص منه نصف الاموال فبقى اربعة وهو المال ومال المال ستة عشر ثم قل ان مال
 المال استنبط بطري الجبر فهو ضيق الظن جدا لان لم يستنبط مال المال بل استنبط المال
 فكان مال وثلثة اجزاء بعد ثمانية وعشرين ثم استخراج الجذر القائله ثمانية وصا على
 ان ذلك الجذر مال وثمانية تطلع منه على اسرار ونرجح المال كما فيه تقول ان الثلثة
 الاجناس الاول اعني الاعداد والجذر والاقول عند الحاد لترجع الى ثلثه ثلثة فوه
 ثلثة عشر ويمكن ان يعلم بحر لانه القائله ثمانية على ما هو مذكور مشروح في كتب الجبرين
 واما اذا نظر في المكعب عمود جنه وبنهاية وايضا في الحجابات وهانسة المخروطات و
 وقولها لكون التكعب محبا اما نرذانه ثلثيه كعب بعد الاموال وهو الجذر بعد الا
 وكعب بعد الجذر وهو اموال بعد الاعداد وكعب بعد الاعداد ولا سيما في استنباط
 الالاطرف العددية المدة لاستخراج الكعاب واما بالطرق الهندسية التي عمل بها محمد شراي
 السطح مسادا بالجسم آخر شراي الى طح مؤلفه وتيقن ان اشاعته الاعمال الى المظهر الى المظهر

اضواء

باضطراد الی آلات عند من ایضا المخرطات واما تقریباته فیه صنفان اما ثلاثی و اما رباعی
 فالثلثی و تکب و اموال بیدل اعداد و لا یخرج الا بالقطع و تکب و اموال بیدل چند و اکثر
 حکم حکم مال و چند بیدل اعداد و تکب و اعداد بیدل چند و لا یخرج الا بالقطع و
 تکب و اعداد بیدل اموال و لا یخرج الا بالقطع و تکب و چند بیدل اعداد و لا یخرج
 الا بالقطع و تکب و چند بیدل اموال و اکثر حکم حکم مال و عدد بیدل چند و اموال
 چند بیدل تکب و اکثر حکم حکم چند و اعداد بیدل مال و اموال و اعداد بیدل تکب و
 لا یخرج الا بالقطع و چند و اعداد بیدل تکب و لا یخرج الا بالقطع هذه ستة انواع ثلاثی
 ثلثه منها یخرج ثانیة الاسطوانات وستة منها لا یخرج الا بقطع المخرط و اما الرباعی تکب
 بیدل اموال و چند و اعداد تکب و چند و اعداد بیدل اموال و تکب و اموال و اعداد
 بیدل چند و تکب و اموال و چند بیدل اعداد تکب و اعداد بیدل اموال و چند و اعداد
 تکب و چند بیدل اموال و اعداد تکب و اعداد بیدل اموال و چند و اعداد هذه سبعة
 انواع رباعیة لا یخرج ثلثه منها الا بقطع المخرطات فقد جعلت من المركبات ثلثة عشر نوعا
 لا یخرج الا بقطع المخرط و نوع من الفروقات الا بقطع المخرط و هو تکب بیدل اعداد و ان
 اما المقدور ان الرایضون من غیر اهل سائنات لم یفهموا علی شئ من هذا ولم یصل الی انوار
 الیسانا و اما المتأخرون من اهل سائنات فاول من اضطر الی وصف ثلاثی من هذه الاضافات
 الاربعة عشر هو الماهان المنسب فانه كان علی المذنبه التي اخذها ارشمیدس سکل
 در مقاله تـ من کتاب اکثره فالاسطرانز و هو هذا الذي اذکره قال ارشمیدس ان خطی
 اتـ ح معلوما القدر و متصلان علی استقامة و نسبة الی الـ ح معلومة فیکون حـ م
 حلوما علی ما بین فی اسیات مشرقا و یجعل نسبة الی الـ ح ک نسبة مربع الـ ح الی الـ ح
 ا ب ح د ه
 محتاج الی تطوع المخرط باضطراد لم یزد فی الکتاب شیئا سببا علی القطوع الاضغافا
 عندنا ایضا سلبا و الشكل الرابع هو فی نسبة الكرة بطح مستوی علی نسبة معلومة و کان انما هما
 یستقل الفاظ الجبرین للتعهد علی ادس التحلیل او اعداد و اموال و کتاب شعاعه ولم یکنه

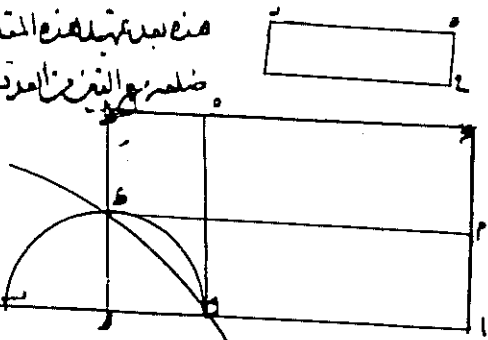
در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است
 در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است
 در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است
 در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است

این در بیان اصول و الفکر و تفسیر و تفسیر
 در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است

در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است
 در هر دو سوره در ابتدا و بنسبت به هم برابر است

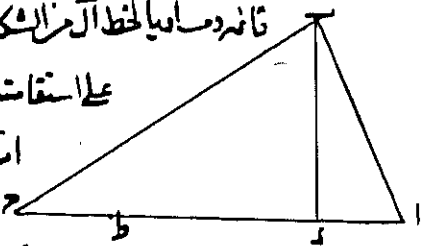
تفسیر

که استخراج منقطع المخری و طاق حرم العدل بان هذا متفق لهذا الفاضل مع نظره و تشنه و هذه
 الصاعقة استهیه علیه حل صف من هذه الاضافه حتى یخرج اوجع الخادون و جنبه على طر فیه
 ان فی رسالة و ان یصغر من طاق و لما یر المیزان من هذا خرازم کان بحمد العذبة
 التي اخذها الشیخ فی استخراج ضلع المسحوق في الدایره و هو المربع متحد الاضلاع المذكور
 و كان یستعمل الفاظ الجبریت فاد و التحدید الى كعبه اموال بعد اعدادها فاستخرج
 بالقطع و هذا الرجل المعری كان فرتم الى الطبقة فی ارباضیات و المسئلة التي تحتها
 الكوه و بالرفاه البورجانی و ابا حامد الصفاق و طاعة الصحابة الذين كانوا یستعملون
 الاحیاء عضد الدولة بمدينة السلمة هذه عشرة فتمت تسین فكان مجموعها
 مع الحاقه فتمت اكثر على القليلاتین و سبب عدد امكن و بدی التحدید الى اموال بعد
 كعبه بعد اعدادها و هو الافاضل كالأحیاء و هذه المسئلة من سده حتى
 استخراجها البره و غيرها فی و اكتب الملوك السامانية هذه ككعبه اضاف اثنان منها
 ثلاثیان و واحد باقى من الرکبات و المعززة الواحدة اثنی الكعب الذي بعد الاعداد
 قد استخرجها من بعد من الافاضل و لم یصل اليها منهم كلهم فی العشر البرانی و لا فی هذا
 التفصیل فان تراخت المد و صحیحه الترفیق اودت هذه الاضافه الاربعه عشر فجمعها
 و هو عباد تین المكن منها من التسع فان بعض ما قد حققه الشرایط حتى یصح سائر شأنة
 على عدة سدقات لها عظیمة النعمة فی اصل هذه الصاعقة حقا بحمد الترفیق فی سده
 ثم كلا علیة ان المسقان على جميع الامور و به الخول و القوة جلت عظمتة و سرجه الى
 هذه بعد تمهید هذه المتدات و هو طلب كعب يكون مع ما من ضلعه عدلا لعشرین
 ضلعه مع البیض من العدد نضع خط آه سار بالعدد المربعات و هو عشرون و خطه آه
 المان و خطه آه واحد فیکون سطح آه مائین و یجعل باسأه
 سطح آه على ما بین فی شكل آه من ثلثة و یکون ضلع ذلک
 المربع مثل آه و آه و على آه و هو جند مائین و آه و خارج
 المسئلة ان اقم العدد على عدد الجند و هو عشرة لان العدد المان



و عدد الجذور ثمان و اذا قسم الاعداد على ما نخرج عشره وبت ايضا عشره و عند على
 نصف دايه و كذا و نخرج وده وراى آد و قسم على آه و نعمل خطها زاويا على نقطه و لا على
 خط آده كما بينه الجوريسر الفاضل في اشكاله من المقالة الاولي من كتاب المخروطات
 و اشكاله و من المقالة الثامن من ذلك الكتاب اذ عند العمل لا يتم الا بهذه الاشكال الثلثه
 هو قطع د و يتصل الدايه على نقطه و نخرج من نقطه عمودا على آه فاقر بان ضلع آه
 هو ضلع مكعب يكون مع ما في ضلعه عدليه لعشرين ربع آد مع النيز من العدد برهله اسما
 نخرج آد على استقامه حتى يتصل خطه على نقطه و نخرج د م وراى ان فلان و خط وراى
 د م و د م وراى آه يمكن على آه القائم الزوايا مساويا لسطح و القائم الزوايا لان تقصير
 على محيط ضلع زاويا لبقاه خط آد و قد خرج من كل واحد منها خطان الى المخطان
 اللذين لا يقيان من اربعين نظيرها الخارجين من النقطه الاضرب و تدبر من عليه الجوريسر
 الفاضل في شكله من مقاله من كتاب المخروطات و دايه و د م معلومه الوضع لان
 نظرها الذي هو م معلوم الوضع و عند و خط آد م معلوم الوضع و نقطه معلومه الوضع
 فيكون قطع د م معلوم الوضع و دايه و د م معلومه الوضع فيكون تقصير معلومه الوضع
 و خط د م يكون معلوم الوضع فيكون نقطه معلومه الوضع و نقطه معلومه الوضع فيكون
 ال معلوم القدر و هذه اشياء ظاهره من كتاب المعطيات و قد بينا ان سطح آه مثل سطح د م
 هم المشترك في سطح د م مثل سطح حه و يجعل سطح حه مشترك فيكون سطح آه مساويا لسطح حه
 و هما متاديا الزوايا لان زواياها قائم فيكون اضلاعها متكافئه في النسبه كما بينه الجوريسر
 في شكله من مقاله و يكون نسبة آه الى د م كنسبه د م الى حه فيكون مرجاها البعائنه
 و نسبة مربع آه الى مربع د م كنسبه مربع د م الى مربع حه و نسبة د م الى حه كنسبه د م الى حه
 فيكون نسبة مربع د م الى مربع حه كنسبه د م الى حه فيكون ان يكون نسبة مربع آه الى مربع
 كنسبه د م الى حه فيكون ضرب مربع آه و خط د م مساويا لضرب مربع د م و خط د م و جعل
 ضرب مربع د م في د مشتركا فيكون ضرب مربع د م في آه مساويا لضرب مربع د م في حه
 ال ال لكن مربع د م هو مثل عدد الاضلاع اعني ما تبين و آه هو ضلع المكعب فيكون ما نأمنه

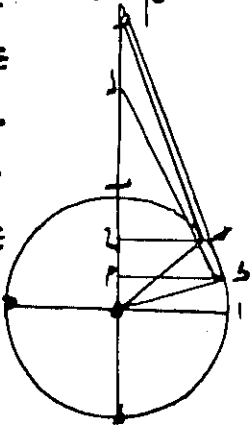
المكعب مساويا لضرب مربع لظ في آء وضرب مربع آل في لء وضرب مربع لظ في آء مساويا للعدد
 كما قد بنا وهو الفان فيكون الفان من العدد وضرب مربع لظ في لء مساويا للمالتي ضلع المكعب
 بجعل مكعب آل الذي هو ضرب مربع آل في آل مشتركا فيكون مكعب آل مساويا للثلاثين من العدد مع
 ضرب مربع آل في آل وضرب مربع آل في لء وضرب مربع آل في آل في آل مع ضرب مربع آل في لء هو
 مساو لضرب مربع آل في آء وآء قد فرضناه عشرين فمربع مربع آل في آء هو عشرين مربع
 آل فيكون مكعب آل مع ما في خط الآساويا للثلاثين من العدد مع عشرين مربع آل ضلع المكعب و
 ما اردنا ان نثبت ونجهدنا تقدم هنا فاننا ننسب مثلث اء ح وضع آء منقطا وهو عشرة يكون
 دت هو خط آل الذي هو هنا على انه معلوم القدر وسنستعمله بقول معلوم القدر انه معلوم الكمية
 فان بينهما فرق قابل على يقين معلوم القدر ما في برانقليدس في كتاب العظيما وهو الذي يمكن
 ان يوجد متساويا مساوية وبالتركيب يضع خط آء عشر ونضع دء قانما على خط آء على رؤيا
 قائمه مساويا لخط آل من الشكل المتقدم ونصل آء ونقسم على نقطة عمود دء ونخرج آء



على استقامته حتى ينقطع العمود على نقطة قباضط ارجبان يكون مثلث
 اء ح قائم الزاوية اذ زاوية دء منه قائمه ويكون خط آء ح
 عمودا مساويا لوتر آء وخط آء ح مع خط آء مساويا لخط

دء وذلك ما اردنا ان نبين ونجهدنا مع اربعة آء من اربع اء ح ونخرج منها نظريا آء
 وتقاطعان على رؤيا قائمه مركز الدائرة نقطة ونصل من خط ح دء مثلث اء ح في الشكل
 المتقدم خط ح دء مساويا للعمود دء ونقسم نصف قطر الدائرة الذي هو خط ح دء من هذا الشكل

على نسبة آء الى دء مثلث اء ح المتقدم كما بينه اقليدس في شكله من
 معادلة على نقطة دء ونخرج عمود دء ونصله ونخرج من نقطة ح خطا
 ماسا للدائرة وهو خط ح ط ونخرج دء على استقامة الى ان يتقاطع خط ح ط
 على نقطة ط فيكون مثلث ه ر ط شبيها مثلث اء ح من الشكل المتقدم برها
 ان زاوية دء ح مساوية لزاوية دء ح فان لم يكن فليكن احداهما اعظم
 مثل اء ح فنقسم على نقطة ح ر خط ه ر زاوية مثل زاوية دء ح ونخرج



ونخرج

قخرج من قطعه خطا يماس الدايه و يقطع ^{بنت} على نقطه لا فيكون مثلث ه و لا ليها
 اسع لان زواياها مساويه و يخرج من نقطه ق عمود ^{بنت} على ه فيكون ه و ق م جميعا مسادا بالخط
 ه و د ه و ثله و يكون ^{بنت} ك مثل ق م و نسبة ل م الى ق م ك نسبة د ه الى ه و فيكون نسبة م ك الى
 د ه ك نسبة ق م الى ج ه و بالتفصيل يكون نسبة م الى د ه ك نسبة د ه الى ه و نسبة د ه الى ه
 مثل د ه الى ا ك نسبة د ا الى ه من مثل ق م الى ه و في نسبة المساواة يكون نسبة ق م الى م ك نسبة
 ا و ا د ه و ثله كما جعلنا نسبة د ه الى ج ه ك نسبة ا و ا الى د ه فيكون نسبة ق م الى ه ك نسبة د ه الى
 ه و م الاول اسفرون ه و الثالث يلزم ان يكون م ت الثالث اسفرون ق م الرابع على ما بيننا و ثله
 الاصول في شكلها الاثر اعظم هذا في ثلث زاوية د ه باصفرو زاوية م ا د في مثلث ا ب ج
 الخدم و لا اكبر منها ايضا فيكون مثلث د ه ج فيها مثلث ا ب ج المتقدم فيكون ه و ج ^{مثل} جميعا
 و ط فيكون ^{مثل} ط مثل د ه و ضرب ه و ج في ج ت مثل م ب ج و ت فلك ذلك ضرب ه و ج في ه ط مساويا ل م ب ج
 و فيكون ضرب ه و ج في ج ت مثل ضرب ه و ج في م ت فيكون الخط ^{بنت} الا شبه فمنا نسبة على ما بيننا في
 شكلها بينهما و ثله فثبت ه و ج الاول الى ج ه الثالث في نسبة ه و ط الثالث الى ج الرابع ^{بالتفصيل}
 يكون نسبة د ه الى ه ك نسبة ط الى د ه و ثله و ط مثل د ه فيكون نسبة ا ه الى ج ك نسبة
 و ج الى ا و بالتدريج يكون نسبة ا ه الى ج ك نسبة ه و ا و ج ^{بنت} فقد مما يبع اربع نسبته على
 نقطه د و اخرجنا منها عمود ه و ج هي صارت نسبة ا ه الى ج ك نسبة ا ه الى ج ك نسبة ه و ا
 الى د ه و ه ط م ا و د ا ان بين م و ا اراد ان يعلم بالحاسب فلا سبيل له الا حاد ^{بالتحقيق}
 فان الاشياء التي يستخرج بتطوع الخروطات لا يمكن فيها ان يحلها الى الحاسب وان تنج ^{بالتحقيق}
 فليس عيادك الاوتار في كتاب المحطى او جدول الحبوب والسهام من ربح مهند و يطلب فيه فيها
 يكون نسبة م تين الذي هو نصف قطر الدايه فرضا الى جميعها كنسبة حبيب تامها الى سهمها و احد
 ذلت العيون فربما من نوره حبه بالاجزاء التي ها الدايه تسه و حبهها تره من نوره حبه
 سهمها تره من نوره حبه و حبهها تره من نوره حبه و ثلثين جزها و ثلثين جزها
 ان يان في الدقيق هي تبدل القوادت بحج ^{بنت} الا الحس لها هو الذي سنخ في هذا النسبة
 العكس و توزع الحاطر و اقتنات الاشغال اصابتها عن اشغال هذه الجوانت و ولا شرف الحاسب

دام شرفه وحقان سالدا دام اسه نايدك لكت منها في خوف واسع از عبايتم بمصره على ما هتم
 من امثال هذه عندهم وهم في مصر فتر المير والله مع المحرور والشكر على كل حال والملازم لغيره ان
 يعرف المخرجات انزول الاجازة تمت الرسالة والصلوة على حاكم الرسالة مسكنا
 سبع دابرة آد مزوفى على مركزه وزيديان نفسهم آد بنهين كما قد عرفتم فانما الفعل على آد رجايات آد
 الاضلاع والزوايا وهواه فيكون خطاه. واد معلوم الرضع ونقطه آ
 معلومة الرضع فنقل على نقطه آقطعا والدا لا يلقاه خطاه. واد وضع
 آد فيكون معلوم الرضع ونصل آد فهو لا محتم يكون ما سالت القطع وروى
 داخل الدايه بيلزم ان يقطع القطع الرايد الرايد فليقطعها على نقطة
 فيكون معلوم الرضع ونخرج عمودي آد في فاقول قد تم العمل بها
 ان نقطه آد على محيط القطع وقد اخرج من كل واحد منها خطان الى
 القطع من رايان للاخرين فيكون - طره ساد بالسطح وملتقى كونه المشترك بقدره مثلها واد
 هاهنا ان مساويا الزوايا فيكون اضلاهما متكافيه نسبة آد الحاد اكبره خطه آد الى كانه تمت

ملحقات

(I) مخروطات و قطوع مخروطی

(صفحات ۸۹ - ۹۲ و ۱۵۶ - ۱۵۷)

چون ترجمه‌ها و تحریرهای مخروطات آپولونیوس بوسیله‌ی ریاضیون اسلامی، تا حدی که نگارنده اطلاع دارد، هیچ‌یک تا کنون چاپ نشده، و از خوانندگان کمتر کسی ممکن است به آنها دسترس داشته باشد، و از طرف دیگر بعضی اشخاص بی اطلاع سخنانی یاوه در تسمیه‌ی قطوع یافته‌اند^(۶) که ممکن است سبب گمراهی کسانی که اهل فن نیستند بشود، مناسب دیدیم که برای تمهید فایده توضیحات مختصری در مبادی مخروطات بیاوریم. در آنچه گفته میشود از کتاب تلخیص المخروطات ابوالفتح اصفهانی (قرن چهارم هـ ق) و کتاب مخروطات ابوالحسین عبدالملک ابن محمد شیرازی (قرن ششم هـ ق) و آثار سرت. هیث (مخصوصاً کتاب او در تاریخ ریاضیات در یونان) استفاده شده است.

آپولونیوس مخروط مستدیر، و به عبارت اصح، دو پرده‌ی سطح مخروطی مستدیر را بطور کلی مکان هندسی خطی مار بر نقطه‌ای ثابت (رأس مخروط) و متکی

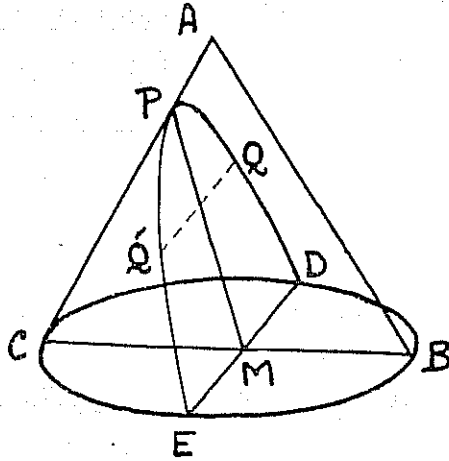
(۶) رجوع شود به: جلال همایی، کتاب التفهیم، تهران (۱۳۱۶ - ۱۸)، ذیل شماری ۴ صفحه‌ی ۲۸، که در آن گفته شده است: «دوم قطع مکافی . . . و آنرا مکافی خوانند از این جهت که برای بدست آوردن مخروط از سهمی نباید چیزی کم کرد و نه چیزی افزود [۱]. . . سوم قطع زاویه آنست که قاطع یک ضلع با قاعده‌ی مخروط باشد [۱]. . . این قسم را زاویه گویند برای آنکه باید چیزی افزود تا تبدیل به مخروط شود [۱]. . . چهارم قطع ناقص آنست که قاطع دو ضلع باشد بدون قاعده [۱]، و اینجا شکل بیضی پیدا میشود، و از او چیزی باید کاست تا مخروط بدست آید [۱]».

معدّلک، نویسنده‌ی این اراجیف «مخروطات ابولونیوس»، را جزء «مآخذ نگارنده در تصحیح و توضیحات» قلمداد کرده است (صفحه‌ی «فکح» در مقدمه‌ی همان کتاب).

بر دایره‌ای مفروض (قاعده) تعریف میکنند. سهم یا محور مخروط خط واصل بین رأس و مرکز قاعده است، و اگر این خط بر صفحه‌ی قاعده عمود باشد مخروط قائم و الا مایل است.

فصل مشترك مخروط با صفحه‌ای مار بر محور آن مثلثی است که قاعده‌اش قطری از قاعده‌ی مخروط است، و چنین مثلثی مثلث محوری مخروط است.

سپس، آپولونیوس در هر مخروط مستدیر دو رشته صفحه‌ی قاطع مشخص میکند که مقاطع آنها با مخروط دایره است: یکی صفحات موازی قاعده، و دیگر صفحاتی که نسبت به صفحه‌ی قاعده متقابل اند. آنگاه به تعریف سهمی و هذلولی و بیضی بوسیله‌ی مقاطع مخروط مستدیر میپردازد، و برای این منظور، صفحه‌ی قاطع را چنان میگیرد که فصل مشترك آن با قاعده‌ی مخروط بر قاعده‌ی مثلث محوری عمود باشد^۵. و مقدمه^۶ ثابت می‌کند که در این صورت، فصل مشترك صفحه‌ی قاطع با مثلث محوری قطری است از مقطع نظیر امتداد فصل مشترك



صفحه‌ی قاطع با قاعده‌ی مخروط. بعبارت دیگر، اگر A رأس مخروط، ABC مثلث محوری آن، DE (که بر BC عمود فرض می‌شود) فصل مشترك صفحه‌ی قاطع

(۵) این قید خلتی در کلیت احکام وارد نمیکند، چو هر گاه مخروط و صفحه‌ی قاطعی مفروض باشد، همواره میتوان مثلث محوری را چنان انتخاب کرد که شرط مورد بحث برقرار شود.

با قاعده‌ی مخروط، و PM فصل مشترك صفحه‌ی قاطع با مثلث محوری باشد، خط PM هر وتری از مقطع را مانند QQ' که موازی DE باشد نصف می‌کند. ضمناً آپولونیوس تذکر می‌دهد که اگر مخروط قائم باشد DE بر PM عمود است، ولی اگر مخروط مایل باشد، فقط وقتی DE بر PM عمود است که صفحه‌ی مثلث محوری بر قاعده‌ی مخروط عمود باشد.

اینک پرده‌ی ABC از مخروط مستدیری به رأس A و قاعده‌ی BC را اختیار کرده سایر حروف را نیز بهمان طریق که ذکر شد تعریف می‌کنیم، و مانند گذشته، ED را عمود بر BC می‌گیریم. سه حالت ممکن است اتفاق افتد:

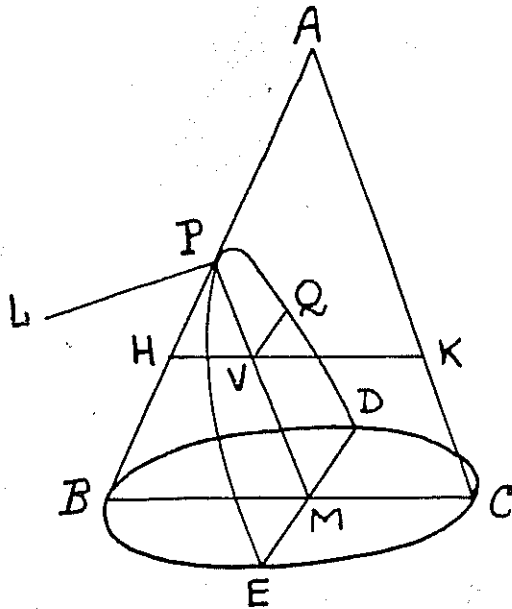
(I) موازی AC است:

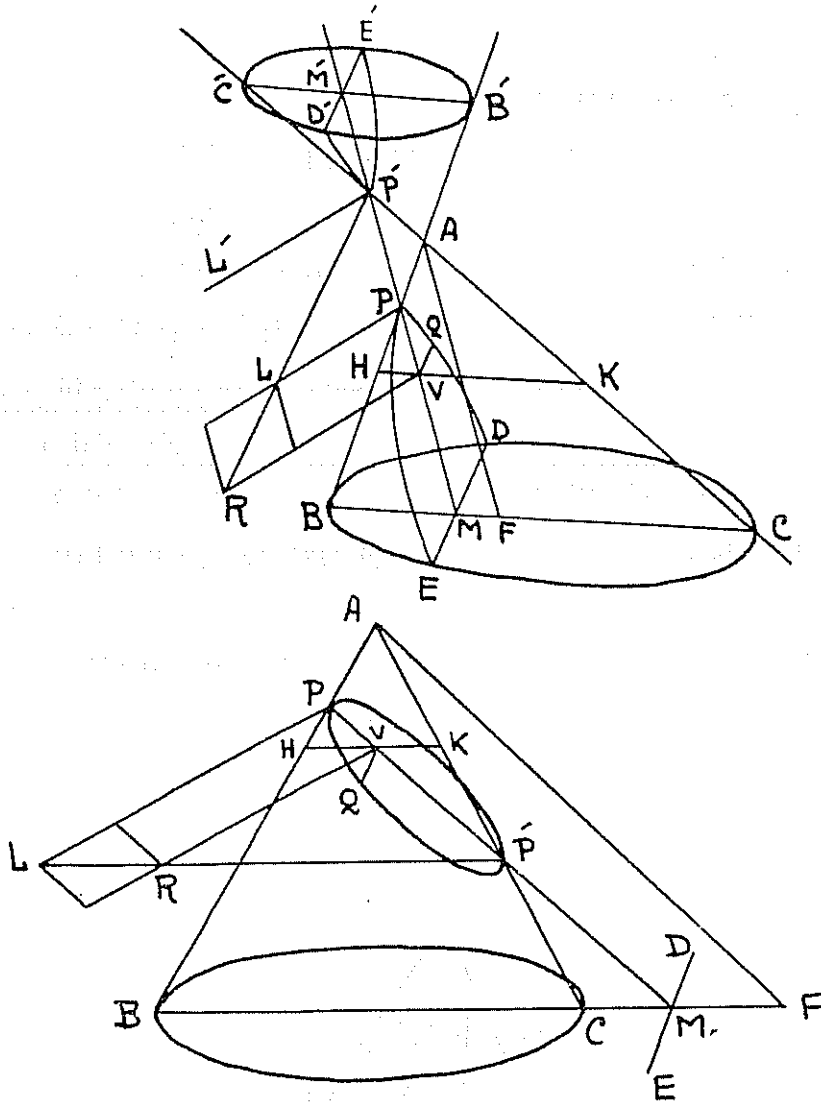
(II) پرده‌ی دیگر مخروط را در نقطه‌ای مانند P' قطع می‌کند.

(III) همین پرده‌ی ABC از مخروط را در نقطه‌ی دیگری مانند P' قطع

می‌کند.

در حالات II و III، خط AF را بموازات PM میکشیم، و در هر سه حالت از





نقطه‌ی P خط PL را در صفحه‌ی مقطع بر PM عمود می‌کنیم، و بر آن طول PL را در حالت I از روی

$$(الف) \quad PL : PA = \overline{BC}^2 : (BA \cdot AC),$$

و در حالات II و III از روی

$$(ب) \quad PL : PP' = (BF \cdot FC) : \overline{AF}^2$$

جدا می‌کنیم .

اینک فرض کنیم Q نقطه‌ی دلخواهی از مقطع باشد . QV را موازی DE میکشیم تا قطر PM را در V قطع کند . در حالات II و III ، خط VR را موازی PL میکشیم تا P'L را در R قطع کند . در هر حال ، اگر از V خط HK را بموازات BC بکشیم ، HK قطر مقطع مستدیر مخروط بوسیله‌ی صفحه‌ی OHK است ، و لهذا

$$(ج) \quad \overline{QV}^2 = HV \cdot VK .$$

پس از ذکر این مقدمات گوئیم *

در حالت I ، $\overline{QV}^2 = PL \cdot PV$.

در حالات II و III ، $\overline{QV}^2 = PV \cdot VR$.

برهان حالت I . بالبداهه

$$HV : PV = BC : CA ,$$

$$VK : PA = BC : BA .$$

پس بموجب (ج) و (الف) .

$$\overline{QV}^2 : (PV \cdot PA) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot PA)$$

(*) بیان و استدلال آپولونیوس بسیار طولانی است . مثلاً در حالت I ، که ساده‌ترین

حالات است ، حکم را چنین بیان میکند :

« فرض کنیم مخروطی را صفحه‌ای مار بر محور آن قطع کند ، و فرض کنیم صفحه‌ی دیگری نیز مخروط را قطع کند بطوری که این صفحه قاعده‌ی مخروط را بر خط مستقیم عمود بر قاعده‌ی مثلث محوری قطع کند ، و علاوه فرض کنیم قطر مقطع موازی یکی از اضلاع مثلث محوری باشد . درین صورت ، اگر خطی از مقطع مخروط به موازات فصل مشترک صفحه‌ی قاطع و قاعده‌ی مخروط تا قطر مقطع رسم شود ، مربع آن مساوی خواهد بود با مستطیل محدود به قطعه‌ای که این خط در طرف رأس مقطع [P] از قطر جدا میکند و خط مستقیم دیگری ؛ نسبت این خط مستقیم به قطعه‌ی مفروض بین رأس مخروط و رأس مقطع همان نسبتی است که مربع ساخته شده بر قاعده‌ی مثلث محوری به مستطیل محدود به دو ضلع دیگر مثلث دارد . و چنین مقطعی « مکافی » خوانده

میشود . »

$$= \overline{BC}^x : (CA \cdot BA)$$

$$= PL : PA$$

$$= (PL \cdot PV) : (PV \cdot PA)$$

بالتیجه $\overline{QV}^x = PL \cdot PV$ ، و هوالمطلوب .

برهان حالات II و III . از

$$HV : PV = BF : FA ,$$

$$VK : P'V = FC : AF ,$$

با توجه به (ج) و (ب) ، خواهیم داشت :

$$\overline{QV}^x : (PV \cdot P'V) = (HV \cdot VK) : (PV \cdot P'V)$$

$$= (BF \cdot FC) : \overline{AF}^x$$

$$= PL : PP'$$

$$= RV : P'V$$

$$= (PV \cdot VR) : (PV \cdot P'V) .$$

پس $\overline{QV}^x = PV \cdot VR$ ، و هوالمطلوب .

چنانکه ملاحظه می شود ، در حالت I مربع QV مساوی مستطیلی است مضاف \square بر PL که ضلع دیگرش PV باشد ، و چنانکه سابقاً گفتیم ، یونانیان از این نوع اضافه به لفظ پارابوله تعبیر می کرده اند .

در حالت II ، مستطیل مضاف بر PL و مساوی \overline{QV}^x بقدر مستطیل LR - که متشابه و مشابه الوضع با مستطیل $PL \times PP'$ است - بر مستطیل مضاف بر تمام خط PL زاید است . پس در این حالت ، اضافه از نوع هورپروه است .

بالاخره ، در حالت III ، اضافه از نوع ایپیس می باشد .

چنانکه سابقاً گفته شد ، اسامی قطوع مخروطی ناشی از نوع اضافه ای است که در تعریف آنها پیش می آید ، و الفاظ قطع مکافی ، قطع زاید ، و قطع ناقص که ریاضیون

اسلامی بر این منحنیات نهاده‌اند ترجمه‌ی دقیقی از اصطلاحات یونانی است [☆] .
 در هر حال ، خط PL ضلع قائم قطع نامیده می‌شود . بعلاوه ، در قطوع زاید و ناقص ، PP' ضلع مایل و PL ضلع مُنْتَصِب نیز خوانده میشود .
 بالاخره ، اگر p ضلع قائم و d قطر نظیر آن باشد ، معادلات سابق الذکر
 قطوع سه گانه نسبت به محورهای PL و PM چنین خواهد بود :

$$y^2 = px \quad \text{قطع مکافی}$$

$$y^2 = px + \frac{p}{d} x^2 \quad \text{قطع زاید}$$

$$y^2 = px - \frac{p}{d} x^2 \quad \text{قطع ناقص}$$

(III) عرب ، ریاضیون عرب ، منجمین عرب ، و غیره .

(ذیل † صفحه‌ی ۱۲۵)

نگارنده با اینکه همواره کوشش داشته‌ام است که ، مخصوصاً در طریق کسب علم ، روان خود را به تعصبات باب روز نیالاید ، از ذکر این نکته ناگزیر است که توجیه محققین فرنگی برای استعمال لفظ عرب بمعنی عربی لویس یا کسی که اغلب آثار علمی او بر زبان عربی است غیر موجه بنظر می‌رسد . بعنوان نمونه استدلال وپکه و نالینو را در این باب نقل می‌کنیم .

وپکه در مقاله‌ی خود ، تحت عنوان « بحث در دو روش عربی [☆] در تعیین مقداری تقریبی برای Sin ^۱ » ، که در صفحات ۱۵۳-۱۷۶ جلد نوزدهم مجله‌ی ریاضیات خالص

(☆) ابوالفتح اصفهانی در تعریفات مذکور در اوایل مقاله‌ی اول تلخیص المخروطات گوید :

« فان كان محور القطع [PM] موازیا لاحد اضلاع مثلث المخروط [= مثلث محوری] فالقطع یسمى بارابولئی ای المكافی فان كان محور القطع والضلع الآخر من مثلث المخروط يلتقيان اذا اخرجنا داخل زاوية مثلث المخروط فالقطع یسمى الیبسیس ای الناقص . . . وان كان التقاؤهما خارج زاوية المثلث فان السطح القاطع یقطع المخروطین معا و یحدث فی کل واحد منهما قطعاً یسمى کل واحد منهما بانفرادہ او بربولئی ای الزائد . »

(☆) méthodes arabes . البته مقصود روش « ریاضیون عرب » است ، ولی نگارنده

نهواست هیچگونه تصرفی در گفته‌ی وپکه بکنند .

و آئی [⊛] (مورخ ۱۸۵۴) در صفحه‌ی ۱۵۴ آن مندرج است، چنین می‌نویسد:

« این روشها، که در شرح چلبی [†] بسط داده شده، از خود این ریاضیدان نیست، بلکه از الغ بیگ یا از دیگر ریاضیون ایرانی است، و من در این باب [خواننده را] به تفصیلاتی که چلبی خود آورده است حواله می‌کنم. برای احتراز از تکرار، بدون تمیز آنها را روشهای چلبی می‌خوانم، بدین معنی که این ریاضیدان آنها را عرضه نموده است. همچنین، این روشها را عربی مینامم، زیرا نجوم و ریاضیات نزد ایرانیان بااصاله جزء همان بسط عظیم علوم دقیقه است که از امپراطوری عربی خلفا سرچشمه گرفته است. » [۱]

و اما نالینو، در « محاضره‌ی دوم » از کتاب معروف خود، بنام علم الفلك، در صفحات ۱۶-۱۷ آن کتاب، گوید:

« ولی هرگاه از عصرهای بعد از قرن اول هجری سخن گفته شود، این لفظ [یعنی لفظ عرب] را بمعنی اصطلاحی آن گرفته به تمام ملل و اقوام ساکن ممالک اسلامی اطلاق می‌کنیم که در بیشتر تألیفات علمی خود زبان عربی بکار برده‌اند. پس ایرانیان و هندیان و ترکها و مردم سوریه و مصرها و بربرها و اندلسیها و غیره - که در زبان علمی و در تابع دولتهای اسلامی بودن وجه مشترك داشته‌اند - تحت اسم عرب می‌آیند. و اگر بر اینها لفظ عرب اطلاق نکنیم، تقریباً نمی‌توانیم از علم هیئت در نزد عرب سخن گوئیم، زیرا عده‌ی کسانی از اولاد قحطان و عدنان که درین علم مهارت داشته‌اند اندک است. » [۱]

(III) تاریخ وفات غیاث الدین جمشید کاشانی

(ذیل [⊞] صفحه‌ی ۱۳۴)

تاریخ مذکور درموضع فوق‌الذکر بغلط ۸۳۵ چاپ شده، و ۸۳۲ صحیح است.

(⊛) Journal de Mathématiques pure et appliquées.

(†) مقصود کتاب دستور العمل و تصحیح الجدول است در شرح زیج الغ بیگ، از محمود

ابن محمد قاضی زاده، معروف به میرم چلبی (متوفی در ۹۳۱ هـ ق).

در جزء کتابهای خطی کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران مجموعه‌ای است از رسائل و یادداشتهای ریاضی، به شماره‌ی ۱۷۹۵، که قست اول آن مفتاح الحساب غیاث الدین است، و در صفحہ‌ی آخر این قسمت عبارت ذیل مشاهده می‌شود: «وفات مولانای اعظم مولانا غیاث الدین طیب الله مضجعه در اول روز چهارشنبه نوزدهم شهر رمضان المبارک سنه ۸۳۲ هجریه خارج بلده سمرقند بموضع رصد».

(IV) تحلیل و ترکیب

(ذیل صفحہ‌ی ۱۵۳)

در جزء عکسهای از بعضی رسائل ریاضی دوره‌ی اسلامی که به همت دانشمند ارجمند آقای مهندس صفی اصفیا از کتابخانه‌ی مدیچنا لاورتسیانا^۵، در شهر فلورانس ایتالیا، بدست نگارنده رسیده رسالہ‌ی جالبی است به زبان فارسی تحت عنوان رسالہ الشیخ الرئیس شرف الدین تاج الزمان الحسین بن حسن السمرقندی^۶ فی طریق المسائل العددیہ. این رسالہ، چنانکه از اسمش نیز استنباط می‌شود، در روشهای حل مسائل عددی است، و مؤلف طرق مختلف را به اجمال شرح میدهد، و امثلهای در توضیح آنها می‌آورد. درباب «تحلیل و ترکیب» گوید:

«طریق تحلیل و ترکیب. اما طریق آنست که مطلوب را بر غایت و کمال فرض کنند و نگاه دارند و اگر حاجت آید واسطه‌ای در میان می‌فکنند تا آنگاه که به لازمی رسد یا به لوازم که ایشان معلوم باشند؛ پس این لوازم را عکس کنند مطلوب حاصل آید. و مران طلب کردن لوازم را تحلیل گویند، و مرین عکس

(۵) Biblioteca Medicea Laurenziana

مجموعه‌های مذکور در متن مجموعه‌های شرقی شماره‌های ۲۲، ۳۸، و ۱۱۸ این کتابخانه است.

(۶) شرف الدین حسین ابن حسن سمرقندی این رسالہ را در ۶۳۲ هـ ق بیابان رسانیده است. مثلاً رجوع شود به: ستوری، تألیفات فارسی (Persian Literature)، جلد دوم، جزء اول، لندن ۱۹۵۸، ص ۵-۶.

کردن را ترکیب گویند، و اگر تحلیل به لازمی رسد که آن لازم محال باشد مسئله را ممتنع گویند، و اگر هیچ لازم محال نباشد مسئله را ممکن گویند.

(V) استقراء

(ذیل \times صفحہ ۱۶۶)

در باب استعمال این لفظ در ریاضیات، شاید ذکر این مطلب خالی از فایده نباشد که در کتاب فخری (۳۰۴۰۵۰۷ §، ص ۱۵۷) فصلی تحت عنوان ذکر الاستقراء هست بدین مضمون \star :

«الاستقراء فی الحساب ان تردّ علیک جملة من نوع او من نوعین او ثلثة انواع متوالیة و تكون تلك الجملة غیر مربعة من جهة ما یدلّ علیہ اللفظ و تكون فی المعنی و القوه مربعة و انت ترید ان تعرف جذرها».

و در توضیح این مطلب مسئله‌ی تعیین عددی را می‌آورد که مجموع مربع آن با چهار برابرش مجذور کامل باشد. این مسئله به معادله‌ی $x^2 + 4x = y^2$ بر میگردد، که در آن، اگر چه $x^2 + 4x$ صورت مجذور کامل نیست، از حیث مقدار مربع کامل فرض می‌شود. کرخ، برای حل مسئله، مقداری برای y جستجو میکند که چون آنرا در معادله قرار دهیم معادله‌ای بین دو مرتبه‌ی متوالی حاصل شود. بازاء $y = 2x$ خواهیم داشت $4x = 3x^2$ ؛ پس $x = 4/3$. بازاء این مقدار، $x^2 + 4x = 64/9$ ، و آن مجذور کامل است، و جذرش $8/3$ است. نیز بازاء $y = x - 1$ مقدار $x = 1/6$ حاصل

(\star) ویکه، فخری، ص ۷۲ - ۷۳.

و نیز برک ۹۵ نسخه‌ی عکسی مجموعه‌ای از رسائل ریاضی (از جمله کتاب فخری) که فیلم آن به شماره‌ی ۳۶۱ در کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران موجود است. این فیلم جزء مجموعه‌ی گرانبهای فیلمهایی است که به کوشش استاد علامه، آقای مجتبی مینوی، از کتابخانه‌های مختلف ترکیه برای دانشگاه تهران تهیه شده، و در کتابخانه‌ی مرکزی آن دانشگاه مخزون است. اینکه آقای مینوی، در انتخاب نسخ، آثار علمی را از نظر دور نداشته‌اند حاکی از وسعت نظر ایشان و درخور ستایش است. همچنین، کوشش اولیاء محترم کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه در برآوردن حاجت طلاب علم و فراهم آوردن تسهیلات برای ایشان در استفاده از آثار گرانبهایی که در آن کتابخانه مخزون است از هر جهت درخور تقدیر است.

می‌گردد که بازاء آن $x^2 + 4x = 20/36$.

بطوری که دیده میشود، حل معادله بوسیله‌ی تجسس و امتحان مقدار مناسبی برای y انجام گرفته است، و مقصود از استقرار همین جستجوی مقداری مناسب است.

(VI) ۱۰۰۰

(صفحه‌ی ۲۵۵ و نیز صفحه‌ی ۵۹)

سالهای هجری قمری از سنه‌ی ۵۰۰ تا ۶۰۰ که در آنها بیست و سوم ربیع الاول بر طبق حساب (و نه بر حسب رؤیت هلال) یکشنبه است عبارتست از سنوات

۵۲۸، ۵۲۵، ۵۱۲، ۵۰۷، ۵۰۴،
 ۵۶۸، ۵۶۵، ۵۵۲، ۵۴۴، ۵۳۶،
 ۶۰۰، ۵۹۲، ۵۸۴، ۵۷۶.

تاریخ مذکور در پایان رساله‌ی جبرخیام، یعنی علامتی که بجای تاریخ گذاشته شده، و ظاهراً به شمار سیاق نوشته شده، بظن قوی «۵۲۴» است، و اسی جزء اول علامت مذکور با هیچیک از ارقام ۵ و ۸ که در رشته‌ی اعداد فوق آمده ظاهراً مطابقت ندارد. از طرف دیگر، ۲۳ ربیع‌الاول سال ۵۲۳ هـ ق، به حساب رؤیت، یکشنبه است و بنابراین، بظن قوی، تاریخ مذکور ۵۲۳ است. بخصوص که در رسم الخط قدیم سیاق، بسیاری از کتاب رقم ۳ را بشکل جزء اول علامت مورد بحث می‌نوشته‌اند. ارقام و مطالب مذکور از افادات دوست فاضل آقای احمد منشی زاده است، که یک تقویم دائمی و تطبیقی در پنج ورق بر اساس نوموگرافی اختراع کرده است، که مشتمل است بر (۱) تقویم مسیحی از ابتدای میلاد الی سال ۲۷۸۵ میلادی؛ (۲) تقویم هجری قمری از ابتدای هجرت تا سنه‌ی ۲۵۹۵ هـ ق؛ (۳) تقویم هجری شمسی از ابتدای هجرت تا سال ۲۱۵۵ هـ ش. بعلاوه، بوسیله‌ی همین پنج ورق با کمال آسانی می‌توان تواریخ را از تقویمی به تقویم دیگر تبدیل کرد.

ماخذ*

ابن الندیم ، الفهرست ، مصر ، ۱۳۴۸ هـ ق .
ابن خلدون ، مقدمه ، طبع م . کاترمر ، جلد اول ، قسمت سوم ، پاریس ، ۱۸۵۸ .
اقبال آشتیانی ، عباس ، راجع به احوال حکیم عمر خیام نیشابوری ، مجلدهی شرق ،
دوره‌ی اول ، شماره‌ی ۸ ، مرداد ۱۳۱۵ هـ ش .
بروکلمان (جوع کنید به Brockelmann) .

تاریخ الحکماء [عنوان اصلی : کتاب اخبار العلماء باخبار الحکماء ، للوزیر جمال
الدین ابی الحسن علی ابن القاضی الاشراف یوسف القفطی] ، مصر ، ۱۳۲۶ هـ ق .
تحریر اقلیدس (تحریر کتاب اقلیدس در اصول هندسه ، بتوسط خواجه نصیر
الدین طوسی) ، تهران ۱۲۹۸ هـ ق .

تقی زاده ، سید حسن ، تاریخ علوم در اسلام ، چاپ دوم ، تهران . این کتاب دروس
دانشکده‌ی معقول و منقول است ، و چاپ اول آن دروس «ماه‌های آخر سال ۱۳۳۱
هجری شمسی . . . و دنباله آن دروس در سال ۱۳۳۲» است (صفحه‌ی اول چاپ اول) .
از این کتاب در کتاب حاضر به عنوان دروس یاد شده است .

دانش پژوه ، محمد تقی ، فهرست کتابخانه‌ی ده‌الی آقای سید محمد مشکوة به کتابخانه‌ی
دانشگاه تهران ، جلد سوم ، بخش دوم ، تهران ۱۳۳۲ هـ ق .

دائرة المعارف اسلام (انگلیسی ؛ عنوان اصلی The Encyclopaedia of Islam) ،
چاپ اول ، چهار مجلد (ویک جلد ضمیمه) ، ۱۹۱۳ - ۱۹۳۴ ، لندن و لندن ؛ چاپ
جدید ، جلد اول (فقط تا کنون چاپ شده است) ، لندن ، ۱۹۶۰ .

(۵) اسامی مهم کتابها و نشریاتی که بمناسبتی نام آنها در کتاب حاضر آمده در آخر کتاب
در فهرست عمومی الفبائی مندرج است ، و چون اسامی مذکور در این فهرست با حروف ۸ میاه چاپ
شده به آسانی میتوان آنها را یافت .

روزنفلد ، ب. ا. ، سگال ، و. س. ، و یوشکویچ ، ا. پ. ، مفتاح الحساب و الرسالة المحيطیه ، از غیاث الدین جمشید کاشانی ، متون و ترجمه‌ی روسی بسا حواشی و مشتمل بر ترجمه‌ی روسی رساله‌ی دستور العمل و تصحیح الجدول (از میرم چلبی) ، مسکو ، ۱۹۵۶ .

سارتن ، مدخل (رجوع کنید به Sarton) .

سمیث ، تاریخ (رجوع کنید به Smith) .

فرهاد میرزا ، معتمد الدوله ، کنز الحساب (ترجمه‌ی فارسی و شرح خلاصه الحساب شیخ بهائی) ، تهران ، ۱۲۷۹ هـ ق .

کاشانی ، غیاث الدین جمشید ، مفتاح الحساب ، تهران ۱۳۵۶ هـ ق ؛ مشتمل بر بعضی آثار دیگر غیاث الدین جمشید .

محمد بن موسی الخوارزمی ، کتاب الجبر والمقابله ، باهتمام علی مصطفی مشرفه و محمد مرسی احمد ، مصر ، ۱۹۳۷ .

مصاحب ، غلامحسین ، جبر و مقابله‌ی خیام ، تهران ۱۳۱۷ هـ ش .

معطیان ، تهران ، ظاهراً حدود ۱۳۵۴ هـ ق . (قسمت آخر مجموعه‌ای از رسائل ریاضی که با « اُکر ناووزوسیوس » آغاز میشود) .

معین ، دکتر محمد ، چهارمقاله عروضی سمرقندی ، تهران ۱۳۳۳ - ۳۵ هـ ش .

نالینو (Alfonso Carlo Nallino) ، علم الفلك ، تاریخه عند العرب فی القرون الوسطی ، رم ، ۱۹۱۱ . (اسم مؤلف در آن « کرلو نالینو » ضبط شده است) .

و پککه ، جبر عمر خیام (رجوع کنید به Woepcke) .

و پککه ، فخری (رجوع کنید به Woepcke) .

هیث ، تاریخ (رجوع کنید به Heath) .

هیث ، سیزده مقاله (رجوع کنید به Heath) .



Brockelmann, Carl, *Geschichte der arabischen Literatur*, Vol I, 1943; Vol II, 1949. Leiden.

Eecke, Paul Ver, *Diophante d'Alexandrie*, Paris, 1959.

Heath, Sir Thomas, *A History of Greek Mathematics*, 2 vols. Oxford, 1921.

(در کتاب حاضر بعنوان « هیث ، تاریخ » از آن نام برده ایم).

Heath, Sir Thomas L., *The Thirteen Books of Euclid's Elements*, 3 vols. New York, 1956.

(در کتاب حاضر بعنوان « هیث ، سیزده مقاله » از آن اسم برده ایم).

Heath, T. L. (Sir Thomas L. Heath), *The Works of Archimedes*, New York.

Karpinski, Louis C., *Robert of Chester's Latin Translation of the Algebra of al-Khowarizmi*, New York, 1915.

Kasir, Daoud S., *The Algebra of Omar Khayyam*, New York City, 1931.

Montucla, J. E., *Histoire des Mathématiques*, tome premier, Paris, 1758.

Newman, James R., *The World of Mathematics*, vol. I, New York, 1956.

Sarton, Georges, *Introduction to the History of Science*, vol I, 1950; vol II & III (each in 2 parts), 1953. Baltimore.

Sédillot, L., *De l'algèbre chez les Arabes*, Journal asiatique, Sième série, tome II, 1853, p. 323-356.

Smith, D. E., *History of Mathematics*, 2 vols. Vol I, 1951; Vol II, 1953. U. S. A.

(در کتاب حاضر بعنوان « سمیث ، تاریخ » از آن نام برده ایم).

Storey, C. A., *Persian Literature*, Vol II, part I, London, 1958.

Story, W. E., *Omar Khayyam as a Mathematician*, Boston, 1918.

Suter, H., *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke*, Leipzig, 1900.

Tirtha, Swami Govinda, *The Nectar of Grace*, Omar Khayyam's life and works, Allahabad, 1941.

Woepcke, F., *L'Algèbre d' Omar Alkhayyami*, Paris, 1851.

(در این کتاب بعنوان « وپکه ، جبر عمر خیام » از آن نام برده ایم) .

Woepcke, F., *Discussion de deux méthodes arabes pour déterminer une valeur approchée de \sin°* . Journal de mathématiques pures et appliquées, Tome XIX, 1854, p. 153 - 176.

Woepcke, F., *Extrait du Fakhri*, Paris, 1853.

(در کتاب حاضر بعنوان « وپکه ، فخری » از آن نام برده ایم) .



1. The first part of the document
describes the general situation
of the country and the
state of the economy.
It also mentions the
main problems that
the government is facing.

2. The second part of the document
describes the specific
measures that the
government is taking
to solve these problems.

فهرست

عمومی الفبائی

(۱) برای اینکه عناوین مورد نظر را به آسانی بتوان در این فهرست یافت ، عناوین مختلف با حروف مختلف چاپ شده است : مطالب و اصطلاحات با حروف درشت سیاه ؛ اعلام و امکنه و مؤسسات با حروف متن کتاب ؛ اسامی کتابها و رسالات و غیره با حروف ریز سیاه .

(۲) ← علامت ارجاع است .

(۳) ارقام شماره‌ی صفحات است (برای تسهیل چاپ ، رقم صفر مطابق معمول با نقطه نمایش داده است ، چنانکه در شماره گذاری صفحات کتاب نیز بهمین نحو عمل شده) . حرف « ن » اشاره به ذیل صفحات است . علامت « + » حاکی از اینست که عنوان مورد نظرهم در متن و هم در ذیل صفحه آمده است .

در ارقام کسری ، منخرج اشاره به متون آثار خیام (قسمتهای اول و دوم کتاب حاضر) و صورت اشاره به ترجمه‌ی فارسی آنهاست . وقتی عین لفظی که در متن آمده در ترجمه تکرار نشده (بلکه نقل بمعنی شده است) ، رقم مربوط به ترجمه را در پراکنش قرار داده‌ایم ، و بالعکس . بالاخره ، مطالب عکس رساله‌ی تحلیل خیام (صص ۲۸۲ - ۲۹۲) ، که قبلاً در جزء مطالب قسمت دوم در این فهرست آمده ، در فهرست مکرر نشده است .

(۴) معمولاً در مواردی که عنوانی نسبتاً زیاد تکرار شده ، مواضعی را که اهمیت بیشتری دارد یا مطالب آن جامعتر است با ارقام سیاه متمایز کرده‌ایم .

(۵) اصطلاحات خارجی (تقریباً همه یونانی یا لاتینی) با علامت « * » متمایز شده‌است . این علامت در مورد اعلام بکار نرفته است .



محدود دیتها و خطاهای ابوالجود در
بحث معادله‌ی درجه‌ی سوم (بقول خیام):

$$\frac{200-241}{56-52}, \frac{219}{40}, \frac{206}{33}$$

ابوالحسین عبدالملک ابن محمد
شیرازی: — عبدالملک ابن محمد شیرازی.
ابوالفتح اصفهانی: ۹۰، ۹۹-۱۰۰،

۲۹۳، ۲۹۹ ذ.

ابوالوفای بوزجانی: — بوزجانی.

ابوتراب ابن احمد: ۱۵۲ ذ.

ابو جعفر خازن: — خازن.

ابو جعفر منصور: — منصور.

ابو حامد صفانی: — صفانی.

ابوریحان بیرونی: — بیرونی.

ابو سعید سجزی: — سجزی.

ابوسهل کوهی (یا قوهی): — کوهی.

ابوطاهر: ۱۳۱، $\frac{160}{8}$.

ابوعلی ابن الهیثم: — ابن هیثم.

ابوعلی سینا: ۱۳۰.

ابو کامل [ابو کامل شجاع ابن اسلم]:

۱۰۴.

ابو نصر عراق [ابونصر ابن عراق]:

۲۶۸، $\frac{268}{77}$ ذ.

آپولون (Apollon): ۱۲۲ ذ.

آپولونیوس (Apollonios) [در مآخذ

اوتوکیوس (Eutocios) [در مآخذ اسلامی

اوطوقیوس و اطقیس]: ۱۲۳ ذ.

اودوکسوس (Eudoxos): ۸۱، ۸۵.

ابراهیم ابن حبیب فزاری: —

فزاری.

ابراهیم ابن سنان: ۱۰۱.

ابرخس [به یونانی هیپارخوس

(Hipparchos)]: ۱۰۵ +.

ابلونیسوس [به یونانی آپولونیوس

(Apollonios)]: ۸۴ ذ (— آپولونیوس).

ابن اثیر: ۱۳۲.

ابن الندیم یا ابن ندیم [مولف الفهرست]:

۱۰۵ ذ، ۳۰۴.

ابن خلدون: ۱۳۳ ذ، ۳۰۴.

ابن لیث، ابوالجود محمد: —

ابوالجود.

ابن هیثم [ابوعلی حسن... ابن

الهیثم]: ۹۶، ۱۰۶، ۱۲۸، ۱۴۰،

$$\frac{240}{51}, \frac{238}{50}$$

ابوالجود [ابوالجود محمد ابن لیث]:

۵۱ ذ، ۱۰۷، ۱۲۶، ۱۲۷، ۱۴۱، ۱۴۴،

۱۴۵، $\frac{216}{38}$ ، $\frac{241}{52}$ ، $\frac{268}{78}$ ذ، ۲۶۹ ذ.

آریتموس : ۷۹ ذ .
 آریستایوس (Aristaeos) : ۹۰ .
 اژده، دریای (Egée) : ۸۰ ذ، ۸۱ ذ .
 اساس الاقباس : ۱۶۴ ذ .
 استخراج (یا درج) دو یا چهار
 واسطه : ← درج .
 استخراج ریشه : ← ریشه .
 استعمال جبر در هندسه : ←
 جبر، استعمال هندسی .
 استعمال حروف و علامات : ←
 علامات .
 استقرار : $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، ۱۶۶ ذ ، $\frac{۱۷۰}{۱۲}$ ، $\frac{۱۷۲}{۱۳}$ ،
 $\frac{(۲۱۸)}{۳۶}$ ، ۳۰۲ - ۳۰۳ .
 اسحاق ابن حنین : ۸۸ ، ۹۹ .
 اسطقس و اسطقسات : $\frac{۱۷۱}{۱۳}$ ، ۱۷۱ ذ ،
 $\frac{(۱۸۰)}{۱۸}$.
 اسکندر مقدونی : ۹۳ .
 اسکندریه : ۷۸ ، ۸۱ ، ۸۲ ، ۸۴ .
 اشکال متکافیه الاضلاع : ۱۵۶ ذ .
 آشوکا : ۹۳ .
 اشیاء : ← شیء .
 اصطلاحات جبر : ← جبر ،
 اصطلاحات .
 اصفیا، صفی : ۳۰۱ .
 اصل موضوع اقلیدس : ۸۴ ، ۱۳۲ .
 اصناف بیست و پنجگانه‌ی معادلات :
 ۱۳۴ ، $\frac{۱۷۰}{۱۲}$ ، ۱۷۰ ذ ، $\frac{۲۳۲}{۴۸}$ (نیز ← معادلات،

اسلامی ابلونیوس] : ۸۴ ، ۸۹ ، ۹۰ ، ۹۱ ،
 ۹۹ ، ۱۰۱ ، ۱۲۳ ذ ، ۱۳۷ ، $\frac{۱۶۲}{۴}$ ، ۲۹۳ ،
 ۲۹۴ (نیز ← مخروطات) .
 آحاد : ۱۱۳ .
 احمد ابن عبدالجلیل سجزی : ←
 سجزی .
 احمد ابن عبدالله مروزی (معروف به
 حبش حاسب) : ← حبش حاسب .
 احمد ابن موسی ابن شاکر : ۱۰۰ .
 آحمس : ۷۹ ، ۱۱۲ ، ۱۱۵ .
 ادوار و مراحل جبر : ← جبر، ادوار؛
 جبر علامتی ؛ جبر لفظی ؛ جبر هندسی .
 ارانی ، دکتر تقی : ۱۳۲ .
 ارثماطیقی : ۷۹ ذ .
 ارجبهد و ارجبهر : ۹۴ .
 اردها جیا (ardhā - jyā) : ۹۳ ذ .
 ارشمیدس : ۸۴ ، ۹۰ ، ۹۹ ، ۱۰۱ ،
 ۱۰۳ ، ۱۰۴ ، ۱۲۳ ، ۱۵۲ ذ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۲۶۷}{۶۷}$ ، $\frac{۲۶۸}{۶۷}$.
 نیز ← ارشمیدس، مسئله‌ی کره و استوانه) .
 ارشمیدس، مسئله‌ی : ۱۰۴ ، ۱۰۶ ،
 ۱۲۳ - ۱۲۴ ، ۱۲۵ ، $\frac{۲۶۷}{۶۷}$ ، $\frac{۲۶۸}{۶۷}$.
 ارفاقا : ۹۳ ، ۹۷ ، ۹۸ .
 آریبهد : ۹۳ ذ ، ۹۴ .
 آریتمیکه : ۷۹ .

طبقه بندی).

اصناف ششگانه‌ی معادلات : ۱۴۵،

$$\frac{۲۴۰}{۵۱} ، \frac{۱۶۶}{۱۱-۱۰}$$

اصول (هندسه) : ۸۱ ، ۸۴-۸۸ ، ۹۸،

۹۹ ، ۱۰۰ ، ۱۳۷ ، ۱۵۲ ، ۱۵۶ ، ۱۶۲ ،

$$\frac{۱۶۵}{۱۰} ، ۱۷۱ ، ۱۸۷ ، \frac{۱۸۷}{۲۱} ، \frac{۲۶۵}{۶۶} ، \frac{۲۶۶}{۶۶}$$

اضافه کردن سطح بر خط : ۸۰ + ،

۸۵ - ۸۷ ، ۹۰ ، ۹۱ ، ۱۵۶ ، ۱۷۷ ،

$$\frac{۱۷۹}{۱۷} ، \frac{۱۷۷}{۱۶} ، ۲۹۸ ، ۲۵۰$$

اضافه کردن مجسم بر خط : $\frac{۲۵۰}{۵۶}$.

اضلاع : ← ضلع .

اطوقیس : ← اثوتوکیوس .

اعداد : ← عدد .

افلاطون : ۸۱ ، ۱۲۱ ، ۱۲۲ ، ۱۲۳ ،

اقبال آشتیانی ، عباس : ۱۳۰ ، ۱۵۱ + ،

۱۵۲ ، ۳۰۴ .

اقلیدس : ۸۱ ، ۸۲ ، ۸۴ ، ۸۸ ، ۹۰ ،

۹۹ ، ۱۰۳ ، ۱۲۱ ، ۱۳۷ ، ۱۵۲ ، ۱۵۶ ،

۱۶۲ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، ۱۷۱ ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$. نیز ← اصول؛

معطیات .

اگ ، پول ور (Paul Ver Eecke) : ۸۲ ،

۸۳ ، ۲۳۴ ، ۳۰۶ .

الفهم : ۲۹۳ ، ۳۰۶ .

الدراسات الادبیه : ۱۰۶ ، ۱۰۷ ،

الخ بیك : ۳۰۰ .

الفهرست : ← ابن الندیم .

آلگوریتم (algorism) : ۱۰۳ ، ۱۰۴ ،

الیسیس : ۸۶ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۲۹۸ ،

امتحان و تصحیح در حل معادلات :

← معادلات ، حل .

اموال : ← مال .

انجمن آثار ملی : ۱۴۳ .

اوتوقیوس : ← اثوتوکیوس .

آه : ۱۱۲ .

ایرون اسکندرانی : ۸۲ ، ۸۳ ، ۸۴ ،

☆☆☆

بحث در معادلات : ← معادلات ،

بحث و شرایط امکان .

بحر الجزایر : ۸۰ ، ۸۱ ، ۸۲ ،

براهمیپهت سدهات : ۹۴ ، ۹۷ ،

بر کارتاق در بر کار قطوع : ۱۵۵ ، ۱۵۶ ،

نیز ← بر شمار .

برو کلمان ، کارل (C. Brockelmann) :

۱۰۱ ، ۱۵۵ ، ۳۰۴ ، ۳۰۶ .

بر همکیت : ۹۴ ، ۹۷ ،

بطلمیوس : ۹۹ .

بطلمیوس I : ۸۱ ، ۸۲ ،

بعد : $\frac{۱۶۳}{۹}$ ، $\frac{۱۶۳}{۱۰}$ ، $\frac{۲۶۳}{۶۵}$ ، ۲۶۴ .

بغداد : ۸۴ ، ۹۳ ، ۹۶ ، ۹۷ ، ۹۸ ،

۱۰۹ .

پرگار تام یا پرگار قطع :
۱۰۶ ، + ۱۵۵ (نیز ← بر کار) .

پلطوس : ۱۱۳ .

پلوتارک (Plutarque) : ۱۰۵ ن .

پنج سدهائیکا : ۹۲ .

پول وراک : ← اک ، پول ورا .

پیس ، لئوناردو دا : ← فیوناتچی .

☆☆☆

تاریخ الحکماء : ۹۶ ن ، ۱۴۰ ، ۳۰۴ .

تثلیث زاویه : ۱۰۰ ، ۱۰۷ ، ۱۲۱ -

۱۲۲ ، ۱۲۴ ، ۱۲۵ .

تحریر اقلیدس : ۸۶ ن ، ۸۷ ن ، ۸۸ ،

۱۵۶ ن ، ۱۶۲ ن ، ۱۹۲ ن ، ۲۳۴ ن ، ۲۵۵ ن ،

۲۷۷ ن .

تحلیل و ترکیب : ۸۹ ، ۱۵۳ ، +

۳۰۱ - ۳۰۲ .

تربیع دایره : ۱۲۲ .

ترکیب : ← تحلیل .

تسمیهی جبر : جبر ، تسمیهی .

تسمیهی مجهول : مجهول .

تضعیف مکعب : ۸۱ ، ۱۲۱ ، ۱۲۲ -

۱۲۴ ، + ۱۲۳

تقسیم ده ، مسئلهی : $\frac{218 - 219}{40 - 39}$ ،

$\frac{268}{78}$

تقسیم خط به نسبت ذات وسط و

طرفین : ۸۰ ن ، ۸۱ ، ۸۵ .

بقراط] به یونانی هیپوکراتس
(Hippocrates) : ۸۱ ، + ۱۲۴ .

بلینوس : ۸۴ ن .

بنوموسی : ۹۹ ، + ۱۰۰ .

بوزجانی ، ابوالوفای : ۸۳ ، ۱۰۴ - ۱۰۵ ،

۱۲۶ ، $\frac{268}{78}$.

بهاءالدولهی دیلمی : ۱۰۷ .

بهاء الدین عاملی : ۱۲۲ ن .

بهاسکر : ۹۴ ، ۹۵ .

بیان معادلات : ← معادلات ، بیان .

بیت الحکمه : ۹۷ ، ۱۰۱ .

بیرونی ، ابوریحان : ۱۰۷ ، ۱۲۶ ،

۲۶۸ ن .

☆☆☆

پاپوس (Pappos) : ۸۸ ن .

پایروس : ۷۹ ، ۱۱۶ ، ۱۲۰ .

* پارابوله : ۸۵ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۲۹۸ .

* پارامتر : ۹۱ ن .

پاریس ، کتابخانهی ملی : ۱۳۹ ، ۱۴۱ .

پاولوس اسکندرانی : ۹۳ ن .

پاولیاسدهانت : ۹۲ ، ۹۳ ن .

پیتامه سدهانت : ۹۲ .

پرگا (Perga) : ۸۴ ن .

- تقی زاده ، سید حسن : ۹۴ ز ، ۹۶ ز ،
۱۳۰ ز ، ۱۳۱ ز ، ۳۰۴ .
- تلخیص المعروضات : ۹۹ ، ۲۹۳ ، ۲۹۹ ز .
تمیز حل عددی و هندسی معادلات :
← معادلات ، تمیز ...
- تیرتهه ، سوامی گوویندا : ۱۳۰ ز ،
۱۳۱ ز ، ۳۰۶ .
- ثابت ابن قره : ۸۸ ، ۹۰ ، ۹۹ ، ۱۰۰ -
۱۰۱ ز ، ۱۱۰ .
- جبر (عمل) : ۱۰۲ + ، ۱۰۸ ، ۱۱۱ ،
۱۱۶ .
- جبر و جبر و مقابله (کلیات ، تعریف ،
فایده) : ۷۷ + ، ۷۸ - ۷۹ ، ۱۱۰ ، ۱۳۶ ،
۱۴۵ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۱۶۱}{۸}$ ، $\frac{۱۶۰}{۳}$ ، $\frac{۲۶۴}{۶۵}$. ادوار -
۷۷ - ۷۸ (نیز ← جبر علامتی ؛ جبر
لفظی) . استعمال هندسی - : ۱۰۹ ،
۱۲۵ . اصطلاحات - : ۱۴۵ ، ۱۵۵ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ،
 $\frac{۲۶۲-۲۶۳}{۶۵}$ (نیز ← معادلات ، جمل ؛
معادلات ، بیان) . تسمیه - : ۱۰۲ .
- خیام (تحت عنوان جداگانه آمده است) .
- در چین : ۸۰ ، ۱۱۱ . - در دوره ی
اسلامی : ۹۵ ، ۹۹ ، ۱۰۱ - ۱۰۷ ، ۱۰۷ -
۱۱۰ ، ۱۱۱ - ۱۱۲ ، ۱۲۴ - ۱۲۵ (نیز ←
ریاضیات هندی ؛ ریاضیات یونانی) .
- در مصر : ۷۹ - ۸۰ ، ۱۱۱ . - در هند :
- ۹۲ - ۹۵ . - در یونان : ۷۹ ب بعد تا ۸۷ ،
۱۲۴ - ۱۲۵ . - علامتی : ۷۸ ، ۸۲ ، ۱۰۹ .
- لفظی : ۷۸ ، ۸۰ ، ۸۲ ، ۱۰۹ ، ۱۱۴ ،
۱۸۱ ز . - هندسی : ۸۰ + ، ۸۴ ، ۱۱۲ ،
۱۱۶ ، ۱۲۴ .
- جبر خیام : ۱۳۱ - ۱۳۲ ، ۱۳۳ ، ۱۳۵ ،
۳۰۳ . تحلیل - : ۱۴۴ - ۱۵۰ . ترجمه -
های - : ۱۴۰ ، ۱۴۲ ، ۱۴۴ . کشف - :
۱۳۸ - ۱۳۹ . متن - : ۱۴۰ ، ۱۴۱ - ۱۴۲ .
جبر و مقابله : ← جبر .
- جزر : ۱۱۲ ، ۱۱۳ ، ۱۱۴ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ،
 $\frac{۱۶۳}{۹}$.
- جزور : ← جزر .
جزء : ۱۶۴ ز ، $\frac{۲۳۴}{۴۸}$.
جزء (قطر) : ۲۷۸ ز .
جمل معادله : ← معادلات ، جمل .
جمله ی معلوم (معادله) : ۱۱۳ .
۱۸۱ ز .
جواب یا ریشه ی معادله : ←
معادلات ، جواب یا ریشه ی .
جیا (jyâ) : ۹۳ ز .
جیا اردها (jyâ - ardhâ) : ۹۳ ز .
جیب : ۹۳ + ، ۱۰۴ ز ، ۱۲۲ ، $\frac{۲۷۸}{۷۲}$ ،
۲۷۸ ز .

دیوفنطس : ۸۲ ز (← دیوفانتوس).

☆☆☆

دیوفنطس : ۸۲ ز ، ۱۰۵ (← دیوفانتوس).

☆☆☆

☆ رادیکس (radix) : ۱۱۲ .

☆ رأس (قطع مخروطی) : ۱۵۶ ، ۱۵۷ .

☆ رس (res) : ۱۱۲ .

رسالة في استخراج جيب الدرجة الواحده : ۱۳۴ ز .

رساله در تحليل (از خيام) : ۱۳۲ ، ۱۳۶ ، ۱۵۱-۱۵۰ ، ۱۶۴ ز .

رفينه : ۱۰۵ ز .

روزنفلد، ب. آ. : ۱۳۴ ز ، ۱۴۳ ، ۳۰۵ .
رومك سدهات : ۹۲ .

رياضي و رياضيات : ۷۷ ، ۷۸ ، ۷۹ ، ۸۴ ، ۸۸ ، ۹۲ ، ۹۵ ، ۹۷ ، ۹۸ ، ۱۰۸ ، ۱۱۰ ، ۱۲۵ ، ۱۳۳ ، $\frac{۱۵۹}{۷}$ ، $\frac{۱۶۱}{۸}$.

رياضيات هندی (از جهت تأثیر در رياضیون اسلامی) : ۷۷ ، ۹۲ ، ۹۶ ، ۹۸ ، ۱۰۱ ، ۱۰۸ .

رياضيات يوناني (از جهت نفوذ در رياضیون اسلامی) : ۷۷ ، ۸۱ ، ۸۴ ، ۹۸ ، ۱۰۱ ، ۱۰۷ بعد تا ۱۱۱ ، ۱۳۷-۱۳۸ .

خیوس (Chios) : ۸۱ ز .

دایره : ۱۵۷ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۸۷}{۲۱}$ ، $\frac{۲۴۰}{۵۱}$.

دایره المعارف اسلام : ۸۴ ز ، ۱۰۲ ز ، ۱۳۰ ز ، ۱۳۲ ز ، ۳۰۴ .

دانش پژوه ، محمد تقی : ۱۳۴ ز ، ۱۵۱ ز ، ۱۵۲ + ، ۳۰۴ .

درج (با استخراج) دو واسطه : ۸۱ ، ۸۷ ز ، ۱۰۰ ، ۱۲۳-۱۲۲ ، ۱۲۴ ، ۱۲۵ .

درج (با استخراج) چهار واسطه : $\frac{۱۸۹-۱۸۷}{۲۳-۲۱}$ ، ۱۴۸ ، ۱۴۰ ، ۱۲۵ .

درج (با استخراج) چهار واسطه : $\frac{۲۲۸}{۵}$ ، ۱۰۶ ز .

درهم و دراهم : ۱۱۳ .

دستگاههای معادلات : ← معادلات ، دستگاههای .

دکارت (R. Descartes) : ۱۰۶ ، ۱۳۸ ز .

دلوس (Delos) : ۱۲۲ ز .

دو رساله دربارهی آثار علوی : ۱۳۴ ز .
دو نامو دو نامیس ، دو نامو کو بوس ،

و دو نامیس : ۱۱۲ .

دیوفانتوس (Diophantos) [در مآخذ

اسلامی دیوفنطس و دیوفنطس] : ۷۷ بعد تا ۸۰ ، ۸۳-۸۳ ، ۹۹ ، ۱۰۵ ، ۱۰۷ ، ۱۰۹ ، ۱۱۳ بعد تا ۱۲۰ ، ۱۲۱ ، ۱۳۸ .

۱۹۰
۲۳

سکال ، و. س. : ۳۰۵ .

سلسله : ۷۹ ، ۱۱۰ .

سلطان الدوله دیلمی : ۱۰۷ .

سمرقندی [شرف الدین حسین ابن
حسن سمرقندی] : ۳۰۱ + .

سمیث، دیوید یوجین (D. E. Smith):
۷۸ ن، ۹۳ ن، ۱۰۲ ن، ۱۰۳ ن، ۱۰۴ ن،
۱۰۹ ن، ۱۱۵ ن، ۱۱۶ ن، ۱۲۰ ن، ۱۲۴ ن،
۱۴۳ ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .

سند هند : ۹۷ ، ۹۸ .

سوامی کوویندا تیرتهه : ← تیرتهه .

سوتر، هاینریش (H. Suter) : ۱۳۳ ،
۲۱۹ ن، ۳۰۶ .

سوری سدهات : ۹۲ ، ۹۴ ، ۹۷ .

سهام (قطوع مخروطی) : ۱۵۶ ،
۱۵۷ .

سهام (قوس) : ۲۷۸ ن .

سهام (مخروط) : ۲۹۴ .

سیال ، معادلات : ← معادلات
سیال .

سزده مقاله : ← هیث .

سینوس (sinus) : ۹۳ ن .

☆☆☆

شرایط امکان معادلات : ←

۱۹۲ ن، ۲۳۴ ن، ۲۷۸ ن .

ریاضیون عرب : ← عرب .

ریشه ، استخراج و علامت : ۱۱۲ ،
۱۳۲ + ، ۱۵۵ ، $\frac{۱۶۶}{۱۱}$ ، $\frac{۱۷۰-۱۷۲}{۱۲-۱۳}$.

ریشه یا جواب معادله : ←
معادلات ، جواب یا ریشهی .

☆☆☆

زاویه ی ترتیب : ۱۵۷ .

زاید : ۸۶ ، ۹۰ ببعده تا ۹۲ ، ۲۹۳
ن، ۲۹۸ ، ۲۹۹ ن .

☆☆☆

سارتن، جورج (G. Sarton) : ۹۲ + ،
۹۳ ن، ۹۶ ن، ۱۰۱ + ، ۱۰۴ ، ۱۳۳ ،
۱۳۴ ن، ۱۳۵ ، ۱۵۵ ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .

ساموس (Samos) : ۸۰ ن .

سبخت ، سوروس (Severus Sebokht):
۹۳ ن .

سبوحی ، نصرالله : ۱۴۳ .

سیجزی، ابوسعید احمد ابن عبدالجلیل:
۱۴۱ + ، ۱۵۲ ن .

سدهات : ۹۲ ، ۹۳ ، ۹۴ ، ۹۷ .

سدیو، لوئی (L. P. E. A. Sédillot):
۱۳۹ ، ۱۴۱ ، ۳۰۶ .

سطح (بمعنی مستطیل) : ۱۴۷ ، ۱۵۶ ،

مُعَادلات ، بحث و شرایط امکان .
 شرف الدوله دیلمی : ۱۰۵ .
 شتی [ابو عبدالله محمد ابن احمد
 الشتی] : ۲۱۹ ذ ، $\frac{۲۱۹}{۴}$.
 شیء : ۱۱۲ ، ۱۱۳ ، ۱۱۴ ، $\frac{۱۶۲}{۹}$ ،
 $\frac{۲۶۳}{۶۵}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$.
 ☆☆☆
 صفانی ، ابو حامد : $\frac{۲۶۸}{۶۸}$.
 صفر : ۱۳۷ .
 صلاح الدین یوسف I ابن ایوب : ۱۵۵ ذ .
 ☆☆☆
 ضریب : ۱۱۳ ، ۱۴۸ ، ۱۴۹ ، ۱۸۱ ذ ،
 ۱۸۲ ذ .
 ضلع : ۱۱۲ ، ۱۱۳ ، ۱۱۴ ، $\frac{۱۶۳}{۹}$.
 ضلع قائم : ۹۱ ، ۱۵۶ ، ۲۹۹ .
 ضلع مایل : ۱۵۶ ، ۲۹۹ .
 ضلع منتصب : ۲۹۹ .
 ☆☆☆
 طبقه بندی معادلات : ← معادلات ،
 طبقه بندی .
 طوسی ، خواجه نصیر الدین : ←
 نصیر الدین طوسی .
 ☆☆☆

ظل : ۹۸ ذ .
 ☆☆☆
 عادل انبویا : ۱۰۶ ذ .
 عبارت جبری : ۱۱۳ ذ .
 عباس اقبال : ← اقبال آشتیانی .
 عبدالله ابن محمد الخدام العراقی
 البغدادی : ۱۳۴ ذ .
 عبدالملك ابن محمد شیرازی ،
 ابوالحسین : ۹۰ ، ۲۹۳ .
 عدد : ۸۰ ذ ، ۱۰۸ ، ۱۱۴ ، ۱۳۷ ،
 $\frac{۱۶۴}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۸}{۱۱}$ ، $\frac{۲۶۲-۲۶۳}{۶۵}$ ؛ (بمعنی جمله
 معلوم معادله) ۱۱۳ ؛ (بمعنی عبارت جبری)
 ۱۱۳ ذ . نمایش - : ۱۴۷ (← عدد
 مجسم ؛ عدد مسطح) . عدد مثبت : ۸۳ .
 عدد مجسم : ۱۴۷ ، $\frac{۱۷۲}{۱۴}$ ، $\frac{۱۹۲}{۲۵}$. عدد
 مسطح : ۱۴۷ ، $\frac{۱۷۱}{۱۳}$. عدد مطلق : ۱۳۷ ،
 $\frac{۱۶۱}{۸}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۰}$. عدد منفی : ۸۳ ، ۱۰۲ ذ ،
 ۱۱۱-۱۱۳ ، ۱۵۰ .
 عدد : ۱۱۳ + ، ۱۸۱ ذ - ۱۸۲ ذ .
 عرب ، ریاضیون و منجمین : ۱۲۱ + ،
 ۱۲۵ ذ ، ۳۹۹ - ۴۰۰ .
 عسقلان : ۱۲۳ ذ .
 عضد الدوله دیلمی : ۱۰۵ ، $\frac{۲۶۸}{۶۸}$.
 عکس يك عدد : ۱۶۴ ذ ، ۲۳۴ ذ ،

فیتزجرالد ، ادوارد (E. Fitzgerald):

+ ۱۳۱

فیثاغورس: ۷۷، ۸۰، + ۱۲۱.

فیثاغوربان: ۷۷، ۸۰، +

☆☆☆

قائم، ضلع: ← ضلع قائم.

قاضی زاده‌ی رومی: ۱۳۴ ذ.

قسطا ابن لوقا، ۸۳، ۸۸، ۹۹.

قطع زاید: ← قطوع مخروطی:

زاید.

قطع مخروطی: ← قطوع

مخروطی.

قطع مکافی: ← قطوع مخروطی:

مکافی.

قطع ناقص: ← قطوع مخروطی:

ناقص.

قطوع مخروطی یا مخروطات

(کلیات): ۸۹، ۱۰۱، ۱۰۶، + ۱۰۵،

$\frac{278}{73}$ ، $\frac{266}{67}$ ، $\frac{265}{66}$ ، ۲۹۳ بعد تا ۲۹۹ (نیز

← مخروطات). تسمیه‌ی-: ۹۰-۹۲،

۲۹۳، ۲۹۸. کشف-: ۸۱، ۹۰.

- در حل معادلات درجات بالاتر از

دو: ۹۰، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۲۴، ۱۲۵،

۱۲۶، ۱۳۵، ۱۴۹، ۱۵۰، ۱۵۷، $\frac{159}{7}$ ،

$\frac{165}{10}$ ، $\frac{166}{11}$ ، $\frac{168}{12}$ ، $\frac{169}{13}$ ، $\frac{171}{14}$ ، $\frac{240}{51}$ ، $\frac{187}{21}$ ،

$\frac{266}{66}$ ، $\frac{265}{66}$ ، $\frac{241}{52}$

علاءالدوله ابو کالیجار: ۹۹.

علامات: ۷۷، ۷۸، ۷۹، ۸۳، ۱۰۹،

۱۱۱، ۱۱۲، ۱۱۳.

علم الفک: ← نالینو.

علی ابن احمد عمرانی: ۱۰۴.

علی محمد اصفهانی: ۱۲۵ ذ.

عمرانی، علی ابن احمد. ← علی ابن

احمد عمرانی.

عمر خیام: ← خیام.

عیون الحساب: ۱۳۵ ذ.

☆☆☆

غیاث الدین جمشید کاشانی: ←

کاشانی.

☆☆☆

فارسی، کمال الدین: ۱۳۴ ذ.

فخرالدوله دیلمی: ۱۰۵.

فخرالملک واسطی: ۱۰۷.

فخری: ۱۰۷، ۱۰۹، ۱۱۰، ۱۱۳ ذ،

۱۲۱، ۲۳۴ ذ، ۳۰۲+ (نیز ← ویکه).

فزاری، ابراهیم ابن حبیب: ۹۶،

۹۸، ۹۷.

فیوناتچی، لئوناردو (L. Fibonacci)

یا لئوناردو دا پیسا (L. da Pisa):

۱۰۷.

کندی [ابویوسف یعقوب کندی] :

. ۱۰۰، ۹۶

کنز الحساب : ۱۰۲، ۳۰۵ .

✧ کنسوس (censos) : ۱۱۲ .

کنکه یا منکه : ۹۶، ۹۷ .

کنیدوس (Cnidos) : ۸۱ ذ .

✧ کوبوس و کوبو کوبوس : ۱۱۲ .

کوچ، ویلهلم (W. Kutsch) : ۱۰۱ ذ .

کونون (Conon) : ۹۰ .

کوهی، ابوسهل [ابوسهل و بجن

(= بیژن) ابن رستم قوهی (= کوهی) :

۱۰۵ - ۱۰۶، ۱۴۰، ۱۵۲، ۱۵۵ ذ .

. $\frac{218}{77}$ ، $\frac{211}{40}$

✧ ✧ ✧

گراردوس کرموننسیس (Gerardus

Cremonensis) : ۹۳، ۱۰۰ ذ .

گولیوس (Golius) : ۱۴۲ + .

✧ ✧ ✧

✧ لاتوس ترانسورسوم (latus

transversum) : ۱۵۶ ذ .

✧ لاتوس رکتوم (l. rectum) :

ذ ۹۱ .

لئوی ارمنی (Leo) : ۹۷ .

قنسرین : ۹۳ ذ .

قوای مجهول : ← مجهول .

قوهی : ← کوهی .

✧ ✧ ✧

کاشانی (یا کاشی یا قاسانی)، غیاث

الدین جمشید : ۱۳۴، ۱۳۵، ۳۰۰، ۳۰۱ ذ .

. ۳۰۵

کتابخانه‌ی مرکزی دانشگاه تهران :

۱۵۱ ذ، ۳۰۱، ۳۰۲ ذ .

کرجی : ۱۰۶ ذ .

کرخی [ابوبکر محمد کرخی] :

۸۳، ۱۰۴، ۱۰۶ - ۱۰۷، ۱۲۱، ۲۳۴ ذ،

. + ۳۰۲

کروتونا (Crotona) : ۸۰ ذ .

کره و استوانه (یا استوانه) : ۱۰۱،

. $\frac{267}{77}$ ، $\frac{159}{7}$ ، + ۱۲۳، ۱۰۶

کشف الظنون : ۱۳۴ ذ .

کشکول : ۱۲۲ ذ .

کعب : ۱۱۲، ۱۱۳، $\frac{162}{9}$ ، $\frac{160}{11}$ (نیز

← مکعب) .

کعب کعب : ۱۱۳، $\frac{162}{9}$ ، $\frac{230}{48}$ ، $\frac{262}{70}$.

کم (و کمیت) : ۸۰ ذ، ۱۰۸، ۱۳۷،

. $\frac{262}{70}$ ذ، ۱۶۴، $\frac{161}{9}$

کمال الدین فارسی : ← فارسی .

مثنایة: (۱۹۲) ، $\frac{192}{20}$ ، ۱۹۲ ن .
 مجانب : ۱۵۷ + .
 مجسطی : ۹۹ + ، $\frac{278}{73}$.
 مجسم : ۱۴۷ ، ۱۵۶ ، $\frac{190}{13}$.
 مجله شرق : ۱۳۰ ن .
 مجهول : ۱۱۲-۱۱۳ ، ۱۱۴ ، ۱۲۰ ،
 ۱۲۱ ، ۱۳۷ ، $\frac{109}{7}$ ، $\frac{161}{9}$ ، ۱۶۳ ن ، $\frac{265}{76}$.
 محمد ابن ابانراب : ۱۵۱ ن .
 محمد ابن الحسين ابن محمد ابن
 الحسين : ۱۵۵ ن .
 محمد ابن لیث ، ابوالجود : ←
 ابوالجود .
 محمد ابن موسی ابن شاکر : ۱۰۰ .
 محمد ابن موسی خوارزمی : ←
 خوارزمی .
 محمد باقر یزدی : ۱۳۵ ن .
 محمود ابن محمد قاضی زاده : ←
 چلبی .
 محور کانونی : ۱۵۶ .
 مخروط : ۲۹۳ ، ۲۹۴ ، ۲۹۵ .
 مخروطات و مخروطات آبولویوس :
 ۸۴ ، ۸۹-۹۲ ، ۹۹ ، ۱۰۰ ، ۱۰۱ ،
 ۱۰۶ ن ، ۱۳۷ ، ۱۵۵ ، ۱۵۶ ، $\frac{163}{9}$ ، $\frac{165}{10}$ ،
 $\frac{210}{76}$ ، $\frac{187}{21}$ ، ۲۹۳-۲۹۹ . (نیز ←

لوکی ، پاول (P. Luckey) : ۱۳۲ ن .
 لیبری ، گویلیمو (G. Libri) :
 ۱۳۹ ، ۱۴۱ .
 لیدن (Leyden) : ۸ ن ، ۱۳۲ ، ۱۳۸ ،
 ۱۳۹ ، ۱۴۲ ، ۱۴۳ .
 ☆☆☆
 مال : ۱۱۲ ، ۱۱۳ + ، $\frac{167}{9}$ ، $\frac{167}{10}$ ،
 $\frac{263}{75}$ ، $\frac{165}{10}$.
 مال کعب : ۱۱۳ ، $\frac{167}{9}$ ، $\frac{220}{48}$ ، $\frac{262}{75}$.
 مال مال : ۱۱۳ ، ۱۳۸ ، ۱۴۵ ،
 $\frac{167}{9}$ ، $\frac{163}{9}$ ، $\frac{164}{10}$ ، ۱۶۴ ن ، $\frac{220}{48}$ ، $\frac{262}{76}$ ، $\frac{263}{75}$ ،
 $\frac{264}{75}$.
 مال مکعب : $\frac{174}{10}$ ، ۱۷۴ ن .
 مأمون : ۹۶ بیعد تا ۱۰۲ .
 ماهانی [ابو عبدالله محمد ماهانی] :
 ۱۰۳-۱۰۴ ، ۱۰۴ ، $\frac{109}{7}$ ، $\frac{206}{23}$ ، $\frac{267}{77}$ ،
 ۲۶۸ ن . معادله ی - : ۱۰۴ ، ۱۲۴ .
 مایل ، ضلع : ← ضلع مایل .
 متجانس کردن معادلات : ←
 معادلات ، متجانس کردن .
 متکافی یا مکافی (در نسبت) : ۱۵۶ .
 مثبت : ← عدد منفی ؛ معادلات ،
 جواب یاریشه ی ،
 مثنیات : ۹۳ ، ۹۸ ن ، ۱۰۳ ن ، ۱۰۴ ،
 ۱۰۵ .

قطوع مخروطی

مراتب هفتگانه: $\frac{239}{51}$ ، ۲۳۶، $\frac{235}{48}$

مرکب و مرکبات: $\frac{277}{77}$ ، ۱۱۴ (نیز

← مقترن).

مسائل ثلاثه: ۱۲۲، ۱۴۳.

مسائل چند مجهولی: ← معادلات

چند مجهولی.

مسئله‌ی ارشمیدس: ← ارشمیدس،

مسئله‌ی.

مسعودی، شرف‌الدین محمد: ۱۳۴،

۱۳۵

مصاحب، غلامحسین: ۱۰۶، ۱۲۲،

۱۲۴، ۱۲۵، ۱۳۱، ۳۰۵.

معادلات (و معادله) (کلیات):

۱۱۰، ۱۱۱، ۱۵۳، $\frac{159}{7}$ ، $\frac{162}{9}$ ، ۱۶۳،

$\frac{174}{10}$. بحث و شرایط امکان: ۱۰۹،

۱۱۸، ۱۳۶، ۱۳۸، ۱۴۷، ۱۴۸، ۱۴۹،

۱۵۰، ۲۰۲، ۲۰۳، ۲۱۴، ۲۱۷،

۲۲۵، ۲۲۷، ۲۳۳، ۲۳۴، ۲۳۵،

۱۱۳-۱۱۴. تمیز حل عددی و هندسی:

۱۳۷، ۱۳۸، ۱۴۵، $\frac{165}{10}$ ، $\frac{166}{11}$ ، $\frac{167}{11}$ ،

$\frac{168}{11}$ ، $\frac{168}{12}$ ، $\frac{187}{21}$ ، ۱۱۲-جمله معادلات:

۱۱۳. جواب یا ریشه‌ی: ۱۱۱، ۱۱۷،

۱۳۷، ۱۲۱، ۱۴۹، ۱۵۰. حل:

۱۳۷. حل-بوسیله‌ی امتحان و تصحیح:

۱۱۵، ۷۹. حل تقریبی: ۱۲۵، $\frac{278}{73}$.

حل عددی: ۱۲۵، ۱۳۶، ۱۴۵، ۱۵۴.

$\frac{165}{10}$ ، ۱۶۵، $\frac{166}{11}$ ، $\frac{165}{11}$. حل هندسی:

۸۰، ۱۰۶، ۱۴۵، $\frac{165}{10}$ ، $\frac{166}{11}$ ، $\frac{165}{11}$.

دستگاه‌های: ۸۳، ۸۹، ۱۱۰، ۱۴۰.

۱۴۱. طبقه بندی: ۱۰۸، ۱۱۱، ۱۱۲،

۱۱۴-۱۱۵، ۱۳۵، ۱۳۶، ۱۴۵-۱۴۷

۱۵۴، $\frac{166-165}{12-10}$ ، $\frac{277-265}{77-76}$ طبقه بندی-

برحسب درجه: ۱۱۵، ۱۵۴. متجانس

کردن: ۱۴۷، ۱۴۸.

معادلات درجات بالاتر از سوم،

۱۰۵، ۱۰۶، ۱۰۷، ۱۴۶-۱۴۸، ۱۵۰،

$\frac{235}{48}$ ، ۲۴۰، ۲۴۱.

معادلات درجه‌ی اول: ۷۹، ۹۴،

۹۵، ۱۰۳، ۱۱۰، ۱۱۵، $\frac{170}{11}$.

معادلات درجه‌ی دوم: ۷۹، ۷۹،

۸۳، ۸۵، ۸۶، ۹۴، ۹۵، ۱۰۳، ۱۱۰،

۱۴۷. حل: ۱۱۵-۱۱۶: (طریق خوارزمی)

۱۱۶-۱۲۰: (طریق خیام) $\frac{171-170}{13-12}$ ،

$\frac{172-174}{19-15}$ (نیز ← معادلات کسری).

معادلات درجه‌ی سوم: ۱۰۴،

۱۰۵، ۱۰۷، ۱۲۱، ۱۲۳، ۱۲۴-۱۲۵،

۱۳۵، ۱۴۶، ۱۵۰، ۱۵۳، ۱۵۴.

حل و بحث - در آثار خیام: $\frac{172}{14-13}$ ،

$\frac{222-221}{20-18}$ ، $\frac{223-113}{48-25}$ (نیز ← معادلات

کسری).

$\frac{171}{1}$ ، $\frac{114}{10}$ ، $\frac{165}{10}$ ، $\frac{262}{65}$.
 مقدمه‌ی ابن خلدون : ۱۳۳ ن .
 مکافی : ۹۰ بعد تا ۹۲ ، ۲۹۳ ن ،
 ۲۹۸ ، ۲۹۹ ن .
 مکافی (در نسب) : ← متکافی .
 مکعب : ۱۱۲ ، $\frac{112}{10}$ ، $\frac{262}{65}$ ، $\frac{265}{66}$ (نیز
 ← کعب) .
 ملک‌شاه سلجوقی : ۱۳۰ ، ۱۳۱ .
 منایخموس (Menachmos) : ۸۱ ،
 ۹۰ ، ۱۲۴ .
 منشی زاده ، احمد : ۳۰۳ .
 منتصب ، ضلع : ← ضلع منتصب .
 منصور ، ابوجعفر : ۹۶ ، ۹۷ .
 منکه : ← کنکه .
 منقی : ← عدد : معادلات ،
 جواب یا ریشه‌ی .
 موسی ابن شاکر : ۱۰۰ .
 مونداس : ۱۱۳ .
 موتو کلا ، ژان اتین (J. E.)
 (Montucla) : ۱۳۸ ، ۱۴۲ ، ۳۰۶ .
 مونتر ، گاسپار (G. Monge) : ۱۳۹ .
 مهاوریر : ۹۴ ، ۹۵ .
 میرم چلبی : ← چلبی
 مینورسکی ، ولادیمیر (V. Minorsky):
 ۱۳۰ ن ، ۱۳۲ ن .

معادلات دیوفانتی : ۸۳ ن .
 معادلات سیال : ۸۳ + ، ۹۲ ، ۹۴ ،
 ۹۵ ، ۱۰۷ ، ۱۱۰ ، ۱۲۱ .
 معادلات قابل تحویل بدرجات
 پایینتر (خاصه بدرجه‌ی دوم) : ۱۴۶ .
 (در جبر خیام) $\frac{174-173}{15-14}$ ، $\frac{187-183}{20-19}$.
 معادلات کسری : ۱۵۰ ، $\frac{272}{48}$ ،
 $\frac{240-235}{51-49}$.
 معادله : ← معادلات .
 معادله‌ی ماهانی : ← ماهانی .
 معطیات : ۸۱ ، ۸۴ ، ۸۷ ن ، ۸۸-۸۹ ،
 ۱۰۱ ، ۱۳۷ ، $\frac{162}{9}$ ، $\frac{165}{10}$ ، $\frac{187}{21}$ ، $\frac{272}{70}$ ، ۳۰۵ .
 « معلوم بودن » : ۸۸-۸۹ ، $\frac{272}{70}$.
 معین ، دکتر محمد : ۱۰۰ ن ، ۱۳۰ ن ،
 ۱۳۱ ن ، ۱۴۱ ن ، ۲۶۸ ن ، ۳۰۵ .
 مفتاح الحساب : ۱۳۴ + ، ۳۰۱ ، ۳۰۵ .
 مفرد و مفردات : ۱۱۴ ، ۱۳۶ ، ۱۴۵ ،
 $\frac{265}{66}$ ، $\frac{177}{10}$.
 مقابله (عمل) : ۱۰۴ + ، ۱۱۱ ، ۱۰۸ ،
 ۱۱۶ .
 مقادیر : ← مقدار .
 مقترن (یا مرکب) و مقترنات (یا
 مرکبات) : ۱۱۴ ، ۱۳۶ ، ۱۴۵ ، ۱۴۶ ،
 $\frac{265}{66}$ ، $\frac{177-171}{11-10}$.
 مقدار : ۱۳۷ ، ۱۳۸ ، ۱۴۵ ، ۱۴۷ ،

وراهمیپیر : ۹۲ .
 ویت ، فرانسوا (F. Viète) : ۱۰۳ + .
 ☆☆☆
 هاتو : ۱۱۲ .
 هارون الرشید : ۹۶ ، ۹۸ .
 هرون (Heron) [در مآخذ اسلامی
 ایرون اسکندرانی] : ۸۲ ، ۹۹ .
 هلال ابن هلال حمصی : ۹۰ ، ۹۹ :
 هندسه : ۸۱ ، ۱۱۰ ، ۱۲۵ ، $\frac{۲۶۴}{۶۵}$.
 هندسه‌ی تحلیلی : ۱۰۹ .
 هوپربوئه : ۸۶ ، ۹۱ ، ۹۲ ، ۹۸ .
 هوپسیکلس (Hypsicles) : ۸۷ ن .
 هیپارخوس (Hipparchos) [نام
 یونانی ابرخس] ← ابرخس .
 هیث ، سر تامس لیتل (Sir T. L. Heath):
 ۱۲۳ ن ، ۲۹۳ . کتاب او بنام تاریخ ریاضیات
 یونانی : ۸۶ ، ۱۲۴ ن ، ۲۹۳ ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .
 کتاب او بنام سیزده مقاله‌ی اصول اقلیدس :
 ۸۷ ن ، ۸۸ ن ، ۱۵۳ ن ، ۱۵۶ ن ، ۲۳۴ ن ،
 ۲۵۵ ن ، ۲۷۷ ن ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ .
 ☆☆☆
 یعقوب ابن طاروق : ۹۶ ، ۹۸ .
 یوشکویچ ، ا. پ. : ۱۳۴ ن ، ۱۴۴ ،
 ۳۰۵ .

مینوی ، مجتبی : ۳۰۲ ن .
 ☆☆☆
 ناقص : ۸۶ ، ۹۰ ، ۹۲ ، ۲۹۳ ن ،
 ۲۹۸ ، ۲۹۹ ن .
 نالینو ، کارلو آلفونسو (C. A. Nallino):
 ۹۴ ن ، ۹۶ ن ، ۲۹۹ ، ۳۰۰ ، ۳۰۵ .
 نسبت و نسب : ۸۵ ، ۱۳۲ ، ۱۵۶ ،
 $\frac{۱۶۵}{۱۰}$ ، $\frac{۱۶۵}{۱۱}$ ، ۱۹۲ ن ، $\frac{۲۳۵}{۲۸}$. نسبت
 مساوات و نسبت مساوات مضطرب :
 $\frac{۲۷۶}{۷۲}$ ، ۲۷۶ ن ، ۲۷۷ ن .
 نصیر الدین طوسی : ۸۷ ن ، ۸۸ ، ۱۳۴ ن .
 نهضت علمی اسلامی : ۹۵ ، ۹۶ ، ۹۸ .
 نیکوماخوس (Nicomachos) [در مآخذ
 اسلامی نیکوماخوس] : ۱۰۱ ن .
 ☆☆☆
 واسیظه سدهات : ۹۲ .
 ویکه ، فرانتس (F. Woepcke) : ۸۰ ن ،
 ۹۲ ، ۱۰۶ ، ۱۰۷ ، ۱۰۹ ، ۱۲۱ ،
 ۱۲۴ ، ۱۲۵ ، ۱۲۶ ، ۱۳۳ ، ۱۳۹ +
 ۱۴۲ ، ۱۴۳ ، ۱۵۰ ن ، ۲۹۹ ؛ جبر
 عمر خیامی (از ویکه) : ۸ ن ، ۱۰۵ ن ، ۱۰۶ ،
 ۱۲۵ ن ، ۱۲۶ ، ۱۳۸ ن ، ۱۳۹ ، ۱۴۲
 ، ۱۵۵ ن ، ۲۴۹ ن ، ۳۰۵ ، ۳۰۶ ؛ ملخص
 فخری (از ویکه) : ۹۲ ن ، ۱۰۷ ، ۱۲۱ ن ،
 ۳۰۲ ن ، ۳۰۵ ، ۳۰۷ .

1. The first part of the document discusses the importance of maintaining accurate records of all transactions and activities. It emphasizes that proper record-keeping is essential for ensuring transparency and accountability in financial operations. This section also outlines the various methods and tools used to collect and analyze data, highlighting the need for consistency and precision in data entry and reporting.

2. The second part of the document focuses on the implementation of internal controls and risk management strategies. It details how these measures are designed to prevent fraud, reduce errors, and protect the organization's assets. The text provides a comprehensive overview of the internal control framework, including the roles and responsibilities of different departments and individuals involved in the process.

3. The third part of the document addresses the challenges and opportunities associated with digital transformation in the financial sector. It explores how emerging technologies such as artificial intelligence, blockchain, and cloud computing are reshaping the industry landscape. The text discusses the benefits of digitalization, such as improved efficiency and data security, while also acknowledging the risks and challenges that must be managed to ensure a successful transition.

4. The fourth part of the document provides a detailed analysis of the current market conditions and trends. It examines the impact of global economic factors, regulatory changes, and technological advancements on the financial industry. The text offers insights into the opportunities for growth and innovation, as well as the potential risks and challenges that may arise in the future.

5. The fifth part of the document concludes with a summary of the key findings and recommendations. It reiterates the importance of maintaining high standards of accuracy and integrity in financial reporting and internal controls. The text also provides a clear roadmap for the organization to follow, outlining the steps and actions required to implement the proposed strategies and achieve the desired outcomes.

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۱	فهرست مختصری از آثار و ابنیه تاریخی ایران	شهریور ماه ۱۳۰۴
۲	آثار ملی ایران (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	مهر ماه
۳	شاهنامه و تاریخ (کنفرانس پرفسور هرتسفلد)	شهریور ماه ۱۳۰۵
۴	کشف دواوح تاریخی در همدان تحقیق (پرفسور هرتسفلد) ترجمه آقای مجتبی مینوی	اسفند ماه
۵	سه خطابه در باره آثار ملی و تاریخی ایران (از آقایان فروغی ، هرتسفلد و هانی بال)	مهر ماه ۱۳۰۶
۶	کشف الواح تاریخی تخت جمشید (پرفسور هرتسفلد)	بهمن ماه ۱۳۱۲
۷	کنفرانس آقای فروغی راجع بفردوسی	بهمن ماه ۱۳۱۳
۸	تحقیق مختصر در احوال و زندگانی فردوسی (بقلم فاطمه خانم سیاح)	۱۳۱۳
۹	تجلیل ابوعلی سینا در پنجمین دره اجلاسید یونسکو در فاورانس	اسفند ماه ۱۳۲۹
۱۰	رساله جودیه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمود نجم آبادی)	۱۳۳۰
۱۱	رساله نبض ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	۱۳۳۰
۱۲	منطق دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقایان دکتر محمد معین و سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۳	طبیعیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای سید محمد مشکوه استاد دانشگاه)	۱۳۳۰
۱۴	ریاضیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای مجتبی مینوی استاد دانشگاه)	
۱۵	الهیات دانشنامه علائی ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر محمد معین استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۶	رساله نفس ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	
۱۷	رساله در حقیقت و کیفیت سلسله موجودات (بتصحیح آقای دکتر موسی عمید استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۱۸	ترجمه رساله سرگذشت ابن سینا (از آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-
۱۹	معراج نامه ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی)	-
۲۰	رساله تشریح اعضاء ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-

شماره	فهرست انتشارات انجمن آثار ملی	تاریخ انتشار
۲۱	رساله قراشه طبیمیات منسوب بابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	۱۳۳۲
۲۲	ظفرنامه منسوب بابن سینا (بتصحیح آقای دکتر غلامحسین صدیقی استاد دانشگاه)	-
۲۳	رساله کنوزالمعربین ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	۱۳۳۱
۲۴	رساله معیارالمقول - جرثقیل - ابن سینا (بتصحیح آقای جلال الدین همائی استاد دانشگاه)	«
۲۵	رساله حی بن یقطان ابن سینا با ترجمه و شرح فارسی آن از یکی از معاصران ابن سینا (بتصحیح آقای هانری کرین)	«
۲۶	جشن نامه ابن سینا (مجلد اول - سرگذشت و تألیفات و اشعار و آراء ابن سینا) تألیف آقای دکتر ذبیح الله صفا استاد دانشگاه	۱۳۳۲
۲۷	ترجمه مجلد اول جشن نامه بقرآنسه (بوسیله آقای سعید نفیسی استاد دانشگاه)	«
۲۸	ترجمه اشارات و تنبیهات (بتصحیح آقای دکتر احسان یار شاطر استاد دانشگاه)	«
۲۹	پنج رساله فارسی و عربی از ابن سینا (بتصحیح آقای دکتر احسان یار شاطر استاد دانشگاه)	۱۳۳۳
۳۰	آثار تاریخی کلات و سرخس (تألیف آقای مهدی بامداد)	
۳۱	جشن نامه ابن سینا مجلد دوم (حاوی نطقهای فارسی اعضاء کنکره ابن سینا)	۱۳۳۴
۳۲	جشن نامه ابن سینا مجلد سوم (کتاب المهرجان لابن سینا) حاوی نطقهای عربی اعضاء کنکره ابن سینا	۱۳۳۵ شمسی
۳۳	جشن نامه ابن سینا مجلد چهارم (شامل خطابههای اعضاء کنکره ابن سینا بزبانهای آلمانی و انگلیسی و فرانسوی)	« ۱۳۳۴
۳۴	بردهای نادر تألیف تیمسار سرلشکر غلامحسین مقتدر	« ۱۳۳۹
۳۵	جبر و مقابله خیام (بتصحیح و تحشیه آقای دکتر جلال مصطفوی)	« ۱۳۳۹
۳۶	شاهنامه نادری تألیف مولانا محمدعلی فردوسی ثانی (بتصحیح و تحشیه آقای احمد سهیلی خوانساری)	« ۱۳۳۹
۳۷	اشتر نامه شیخ فریدالدین عطار (بتصحیح و تحشیه آقای دکتر مهدی محقق)	« ۱۳۳۹
۳۸	حکیم عمر خیام بعنوان عالم جبر تألیف آقای دکتر غلامحسین مصاحب	« ۱۳۳۹

Anjomane Asare Melli Publications, No. 38

Khayyam Commemorative Series

HAKIM OMAR KHAYYAM

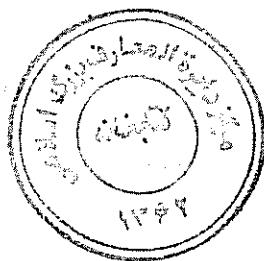
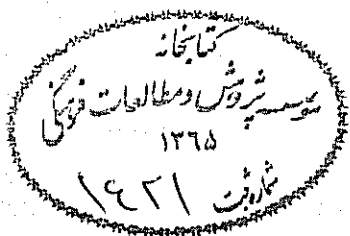
AS AN

ALGEBRAIST

*Texts and Persian translation of
Khayyam's Works on Algebra, with
introductory chapters and commentaries*

by

G. H. Mossaheb



Bahman Printing
Teheran, 1960