# Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Alchwarazmi.

Von H. Wieleitner in Augsburg.

Nachdem M. Cantor im I. Bande seiner *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* die allgemeineren Teile der *Algebra* des Muhammed ibn Musa Alchwarazmi[1]) (verf. um 825 n. Chr.) besprochen hat, führt er weiter[2]): „Nun kommt ein letzter wieder ganz verschieden gearteter Abschnitt, an Länge ziemlich genau die Hälfte des ganzen Buches ausmachend und dadurch den Beweis liefernd, daß in den Augen des Verfassers hier wohl der Schwerpunkt seiner Aufgabe liegen mochte. Es handelt sich um die ungemein verwickelten, um nicht zu sagen verworrenen Bestimmungen über Erbrecht, über Freimachung von Sklaven und dergleichen .... Dieser Abschnitt der Algebra ist also arabisch durch und durch und ist als Grundlage zahlreicher späterer besonderer Schriften zu betrachten, welche geradezu von den Erbteilungen und den dabei vorkommenden Rechnungen ausschließlich handeln."

Trotz der Wichtigkeit, die dem bezeichneten Abschnitt hienach doch nicht bloß vom erbrechtlichen, sondern auch vom mathematisch-historischen Standpunkt zukommt, hat Cantor ihn überhaupt nicht durchgesehen und auch sonst ist bis vor kurzem[3]) nirgends etwas darüber gesagt worden. Der Grund hiefür leuchtet ein, sobald man sich an das Studium dieser Rechnungen macht: sie sind wirklich nicht leicht zugänglich und erfordern, will man in sie eindringen, trotz der Anmerkungen Rosens, der im Jahre 1831 den Text arabisch und englisch herausgab, ein mehrwöchiges Studium, vor dem wohl den Herausgebern größerer Geschichtswerke des Zeitverlustes wegen bange war. Da die Aufgaben aber nicht nur historisch interessant sind, sondern auch eine Reihe von Beispielen mit wirklich neuen Grundgedanken für den heutigen Unterricht in der etwas vernachlässigten Rechnung mit gemeinen Brüchen liefern, will ich hier eine gedrängte Übersicht davon geben.

## I.

Der ganze Abschnitt zerfällt in zwei Teile von ziemlich gleicher Größe. Der erste ist überschrieben „Über Vermächtnisse" und enthält lauter einzelne Aufgaben über Erbteilung, die in Gruppen eingeteilt sind und glücklicherweise im allgemeinen nach ihrer Schwierigkeit fortschreiten. Da aber die gesetzlichen Bestimmungen, auf denen sie beruhen, erst aus der Lösung hervorgehen, ver-

1) Die richtige Umschreibung des Namens ist: Muḥammad ibn Mūsā Alẖwārazmī, wobei das z den stimmhaften s-Laut bedeutet.

2) 3. Aufl., Leipzig 1907, S. 728.

3) J. Ruska hat in seiner 125 Seiten starken Arbeit „Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst" (Sitz.-Ber. Ak. Wiss. Heidelb., phil.-hist. Kl., Jahrg. 1917, 2. Abh.; vgl. meinen ausführlichen Bericht in den Unterr.-Bl. Math. Nat. 24, 1918, S. 8—10) auch die Erbteilungsaufgaben bei Alchwarazmi grundsätzlich berücksichtigt.

blüffen die Aufgaben häufig. Dies ist schon bei der ersten Aufgabe der Fall, die lautet (S. 86):

„Ein Mann stirbt und hinterläßt 2 Söhne. Einem anderen Manne vermacht er $\frac{1}{3}$ seines Kapitals. Er hinterläßt 10 Dirhem an Vermögen und eine Schuldforderung von 10 Dirhem gegen einen der Söhne.“[1])

Nach unseren Begriffen würde nun doch der eine Sohn seine Schuld von 10 Dirhem zu bezahlen haben und dann hätte die Teilung der 20 Dirhem vor sich zu gehen, von denen der Fremde $\frac{1}{3}$ und jeder Sohn $\frac{1}{3}$ bekäme. Nicht so denkt der Araber. Nach dem Wortlaut der Lösung muß der Sohn-Schuldner nur so viel in die Masse geben, als sein Anteil bei der Teilung beträgt. Übersetzen wir die Lösung aus dem Wortlaut in unsere Zeichensprache, so lautet sie demgemäß:

Aus der Schuld werden $x$ Dirhem zum Vermögen hinzugegeben. Dann hat man zu setzen

$$\tfrac{1}{2}[(10+x) - \tfrac{1}{3}(10+x)] = x$$

und es ergibt sich

$$x = 5.$$

Der Sohn-Schuldner muß also 5 Dirhem herausgeben, die er wieder erhält, sein Bruder erhält wie auch der Fremde 5 Dirhem aus dem Nachlaß.

Die Aufgabe wird hierauf leicht dahin verändert, daß Nachlaß und Schuldforderung an einen der Söhne wieder je 10 Dirhem betragen und daß der Erblasser einem Fremden $\frac{1}{5}$ seines Vermögens und noch 1 Dirhem vermacht. Der Ansatz lautet, gegen oben noch etwas vereinfacht

$$\tfrac{1}{2}[\tfrac{4}{5}(10+x) - 1] = x.$$

Es ergibt sich $x = 5\frac{5}{6}$. Eine zweite Abänderung lautet auf drei Söhne und ein Vermächtnis von $\frac{1}{5}$ des Vermögens weniger 1 Dirhem an einen Fremden, 10 Dirhem Hinterlassenschaft und 10 Dirhem Schuldforderung an einen der Söhne. Es ergibt sich für jeden Sohn $x = 4\frac{1}{11}$ Dirhem.

## II.

„Eine andere Art von Vormächtnis“ ist folgendes (S. 89):

„Ein Mann stirbt, hinterläßt seine Mutter, sein Weib, zwei Brüder und zwei Schwestern. Einem Manne vermacht er $\frac{1}{9}$ seines Kapitals.“ Gesucht ist offenbar nur das Verteilungsverhältnis. Aus den folgenden Beispielen geht hervor, daß einer Mutter $\frac{1}{6}$, der Witwe $\frac{1}{8}$ des Restes (nach Abzug des Legates an den Fremden) gebührt. Über die Brüder und Schwestern ist nichts bestimmt. Alchwarazmi sagt gleich, daß er von 48 Anteilen ausgebe. Diese Zahl erhält man in der Tat nach Multiplikation von 6 und 8. Diese 48 Teile sollen $\frac{8}{9}$ des Kapitals vorstellen. Demzufolge nimmt Alchwarazmi $\frac{1}{8}$ von 48, d. i. 6, und zählt dies zu 48, gibt 54. Der Fremde erhält hiervon 6 Teile und „die übrig bleibenden 48 müssen nach den gesetzlichen Anteilen verteilt werden“. Die Mutter würde also 8 Teile, die Witwe 6 Teile, die Geschwister zusammen 34 Teile erhalten. Sollte nicht die ursprüngliche Zahl 48 wegen der Anteile

1) Rosens Übersetzungen sind häufig nicht genau genug. Herr Ruska hatte die Freundlichkeit, die meinigen mit dem arabischen Text selbst zu vergleichen. „Dirhem“ (dasselbe Wort wie „Drachme“) ist die gewöhnliche Münzeinheit bei den Arabern, etwa = 1 Frank.





für die Geschwister nötig sein, so würde es genügen von 24 auszugehen, d. h. das ganze Kapital gleich 27 zu setzen.

Zur selben Art gehört: „Eine Frau stirbt, hinterläßt den Ehemann, einen Sohn und 3 Töchter und vermacht einem Manne $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{7}$ ihres Kapitals.“ Hier ist zu bemerken, daß der Ehemann $\frac{1}{4}$ des Restes, ein Sohn aber doppelt so viel als eine Tochter erhält. Alchwarazmi geht aus von der Zahl 20, die in der Tat mit 4 und mit 5 teilbar ist. Dann sagt er gleich, man solle das zugrunde gelegte Kapital um $\frac{15}{41}$ vermehren. Es ist nämlich $\frac{1}{8} + \frac{1}{7} = \frac{15}{56}$ und die angenommenen 20 Teile sind also als $\frac{41}{56}$ des ganzen Kapitals zu betrachten. Da aber 20 mit 41 nicht teilbar ist, erweitert Alchwarazmi seine Grundzahl auf $20 \cdot 41 = 820$ und erhält als Zahl für das Gesamtkapital $820 + 20 \cdot 15 = 1120$. Hieraus sind die Teile leicht zu nehmen, nachdem 300 für den Fremden wieder abgezogen sind. Die Aufgabe moderner zu führen, kann ich ja wohl dem Leser überlassen.

## III.

Nun kommt wieder „eine andere Art von Vermächtnis“, die sehr eigentümlich ist (S. 91): „Eine Frau stirbt und hinterläßt ihren Gatten, ihre Mutter und einen Sohn. Sie vermacht einer Person $\frac{2}{5}$ und einer anderen $\frac{1}{4}$ ihres Kapitals. Die zwei Legate legt sie zusammen ihrem Sohne auf, ihrer Mutter aber eine Hälfte, ihrem Gatten nichts als $\frac{1}{3}$.“ Zur Erläuterung gibt Alchwarazmi selbst folgende Gesetzesbestimmung an: „Ist einem der Erben mehr als $\frac{1}{3}$ des Legates auferlegt, so geht das gegen ihn hinein in seinen Anteil; aber auch wenn nichts auferlegt ist, ist [er] belastet mit dem Drittel (gegen ihn) in jedem Fall.“

Ich glaube nicht, daß man aus dieser Erläuterung allein ohne genauere Kenntnis des arabischen Erbrechts klug werden kann. Aber der Gang der Lösung zeigt, daß hier z. B. der Witwer $\frac{1}{3}$ seines Anteils zum Legat beisteuern muß, die Mutter $\frac{1}{2}$ ihres Anteils, der Sohn aber, da ihm das Ganze auferlegt wurde, $\frac{2}{5} + \frac{1}{4} = \frac{13}{20}$, aber auch wieder nur von seinem Anteil, den er ohne Legate erhalten würde. Es ist klar, daß die fremden Personen auf diese Weise nicht zu dem ganzen Legat (d. i. $\frac{13}{20}$ des ganzen Kapitals) kommen. Aber vielleicht wollte der Gesetzgeber durch die sonderbare Auslegung eben verhüten, daß den rechtmäßigen Erben zu viel entzogen wurde.

Der Gang der Rechnung ist nun so. Alchwarazmi geht aus von der Zahl 12; davon würde, wenn die Legate nicht wären, der Sohn 7, der Witwer 3 und die Mutter 2 erhalten. Nun beginnt er die Verteilung, sieht aber gleich, daß es nicht aufgeht. Er nimmt daher die Zahl 240. Die Verteilung ist dann folgende:

| | | | |
|---|---|---|---|
| Gatte | selbst 40, | zum Legat | 20, |
| Mutter | „ 20, | „ „ | 20, |
| Sohn | „ 49, | „ „ | 91, |
| | | Gesamtlegat | 131. |

Die 131 Teile werden nun im Verhältnis von $\frac{2}{5} : \frac{1}{4} = 8 : 5$ geteilt und der eine Legatnehmer erhält $\frac{8}{13}$ von 131, der andere $\frac{5}{13}$. Da dies wieder nicht aufgeht, rät Alchwarazmi die Teile von 3120 ($= 13 \cdot 240$) zu nehmen. In Wirklichkeit hätten die beiden Legatare $240 \cdot \frac{13}{20} = 156$ Teile statt 131 bekommen sollen.

Alchwarazmi variiert sofort das Beispiel. Dem Sohn soll lediglich die Zahlung der $\frac{2}{5}$ für die eine Person (wir wollen sagen A), der Mutter die Zah-

5*

lung des $\frac{1}{4}$ für die zweite Person B auferlegt sein. Dann muß der Gatte wie vorhin $\frac{1}{3}$ seines Anteils abgeben, das aber auf A und B im Verhältnis 8 : 5 verteilt wird. Auch die Mutter muß $\frac{1}{3}$ ihres Anteils in derselben Weise verteilen. Davon bekommt A $\frac{1}{3}\cdot\frac{8}{13}=\frac{8}{39}$, B aber $\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{13}=\frac{5}{39}$. B erhält dann außerdem noch, was zu seinem $\frac{1}{4}$ fehlt, also noch $\frac{1}{4}-\frac{5}{39}=\frac{19}{156}$ des Anteils der Mutter. Der Sohn muß ebenfalls $\frac{1}{3}$ seines Anteils auf beide Legatare verteilen. A erhält aber von ihm außerdem $\frac{2}{5}-\frac{8}{39}=\frac{38}{195}$. Wolle man die Teile der Erbschaft ganzzahlig, so müsse man von der Zahl 964080 ausgehen. Diese Zahl ist nicht recht erklärbar.[1]) Auf alle Fälle sind diese beiden Beispiele sehr eigenartig.

## IV.

Jetzt folgt eine Gruppe von Beispielen „einer anderen Art von Vermächtnissen", die wieder leichter verständlich und recht interessant sind. „Ein Mann stirbt und hinterläßt sein Weib und 4 Söhne; einem Manne vermacht er so viel als den Anteil eines Sohnes vermindert um den Anteil der Witwe." Alchwarazmi geht von der Zahl 32 aus; denn die Witwe erhält $\frac{1}{8}$ und der Rest muß durch 4 teilbar sein. Die Witwe erhält hienach 4 und jeder Sohn 7, der Fremde also 3 Teile. Diese sind, da 32 als Rest nach Abzug des Legates zu betrachten ist, zu 32 hinzuzuzählen, so daß das Gesamtkapital gleich 35 gesetzt wird. Wem diese arabische Lösung nicht zusagt, der mag etwa den Anteil der Witwe mit $\frac{1}{8}(k-x)$, den jedes Sohnes mit $\frac{7}{32}(k-x)$ bezeichnen[2]); dann ergibt sich die Gleichung

$$\frac{3}{32}(k-x)=x,$$
$$x=\frac{3}{35}k,$$

und man sieht, daß es zweckmäßig ist $k=35t$ zu setzen.

Die Aufgabe wird sofort in der Schwierigkeit gesteigert. Wenn der Erblasser 2 Söhne und eine Tochter hinterläßt und einem Fremden so viel vermacht, als der Anteil eines dritten Sohnes wäre, wenn einer vorhanden wäre, so nehme man als Kapital 35, damit man sowohl mit 5 als mit 7 teilen kann. Ein dritter Sohn erhielte $\frac{2}{7}$ davon, d. i. 10, und dies zähle man dazu, so daß 45 als Gesamtkapital genommen werden muß. Jeder Sohn erhält dann 14, d. i. $\frac{2}{5}\cdot(45-10)$, die Tochter 7, der Fremde 10.

Weiter, wenn ein Mann die Mutter, 3 Söhne und eine Tochter hinterläßt und irgendeinem so viel vermacht, als der Anteil eines Sohnes weniger den Anteil einer etwaigen zweiten Tochter beträgt, dann gehe man aus von der Zahl 336. Bei 3 Söhnen und einer Tochter muß nämlich, da die Mutter $\frac{1}{6}$ erhält, mit 42, bei 3 Söhnen und 2 Töchtern mit 48 geteilt werden und 336 ist das kl. g. V. von 42 und 48. Im ersten Falle erhält ein Sohn $\frac{10}{42}\cdot 336=80$, im zweiten Falle eine Tochter $\frac{5}{48}\cdot 336=35$. Der Fremde hat also 45 zu bekommen, so daß als Gesamtkapital 381 zu nehmen ist.

Besonders verzwickt ist das letzte Beispiel der Gruppe, bei dem auch Alchwarazmi nicht ohne Gleichung auskommt. Wenn der Mann 3 Söhne hinterläßt und einem Fremden so viel vermacht, als der Anteil eines Sohnes beträgt,

1) Nach Rosen müßte sie $13\cdot 9360$ sein. Sie ist aber $103\cdot 9360$. $(9360=5\cdot 9\cdot 13\cdot 16)$.

2) $k=$ Kapitel, $x=$ Anteil des Fremden.





weniger den Anteil einer allfälligen Tochter, plus $\frac{1}{3}$ von dem, was dann noch zu $\frac{1}{3}$ (des Kapitals) fehlt, so gehe aus von der Zahl 21, damit mit 3 und mit 7 geteilt werden kann. Im Falle einer Tochter würde diese 3, jeder Sohn aber, wenn keine Tochter da ist, 7 erhalten. Der Legatar erhält also zunächst 4 oder $\frac{4}{7}x$, wenn wir den Anteil eines Sohnes mit $x$ bezeichnen. Außerdem erhält er noch $\frac{1}{3}(\frac{1}{3}k-\frac{4}{7}x)$. Zieht man dies alles von $k$ ab, so bleibt $\frac{8}{9}k-\frac{8}{21}x$ und dies muß gleich $3x$ gesetzt werden. Nun erhält man $x=\frac{8}{3}\cdot\frac{7}{71}k$ und man erkennt, daß zweckmäßig $k=213$ gesetzt wird, woraus $x=56$ und die beiden Legate als $\frac{4}{7}x=32$ und $\frac{1}{3}(71-32)=13$ hervorgehen.[1])

## V.

Nun folgt wieder eine Reihe von Aufgaben, die offenbar aus einer anderen Rechtsschule stammen, denn hier werden einem Witwer $\frac{3}{13}$, der Mutter $\frac{2}{13}$ des Restkapitals zugesagt. „Eine Frau stirbt und hinterläßt ihre Tochter, ihre Mutter und ihren Gatten. Einem Manne vermacht sie so viel als den Anteil der Mutter und einem andern $\frac{1}{9}$ ihres ganzen Kapitals." Nennt man die $13^{\text{tel}}$ des Restes $t$, so steht die Rechnung folgendermaßen: Die Legate betragen $2t+\frac{1}{9}k$, also erhält man

$$\frac{8}{9}k-2t=13t$$

und hieraus $k=16\frac{7}{8}t$. Am besten bestimme man die Teile, indem man die ganze Erbschaft in 135 Teile zerlegt denke ($t=8$).

Hat die Frau aber ein Legat ausgesetzt, so groß wie der Anteil des Gatten plus $\frac{1}{8}$ und $\frac{1}{10}$ des Kapitals, so erhält man ähnlich

$$k-\frac{9}{40}k-3t=13t$$

und hieraus

$$k=40\cdot\frac{16}{31}t$$

oder $k=640$ für $t=31$. Das übrige ergibt sich von selbst.

Wiederum seien die Erben dieselben, aber die Frau vermacht einer Person so viel als den Anteil des Gatten weniger $\frac{1}{9}$ und $\frac{1}{10}$ dessen, was vom Kapital übrig bleibt nach Abzug dieses Anteils. Man hat den Ansatz

$$k-3t+\frac{19}{90}(k-3t)=13t$$

und erhält $k=\frac{1497}{109}t$. Für $t=109$ geht alles auf.

Im nächsten Beispiel, das nicht ganz zu den vorherigen paßt, soll jemand 2 Schwestern und sein Weib zurücklassen und einer anderen Person so viel als den Anteil einer Schwester weniger $\frac{1}{8}$ des nach Abzug des Legates bleibenden Kapitalrestes vermachen. Jede Schwester (und offenbar auch die Ehefrau) soll $\frac{1}{3}$ des Restes erhalten. Bezeichnen wir das Legat mit $l$, so ist demnach

$$l=\frac{1}{3}(k-l)+\frac{1}{8}(k-l).$$

Das ergibt $k=5\frac{4}{5}l$, und setzt man $k=29$, so ist $l=5$ und jede Schwester erhält 8.

1) Den dritten Teil von $\frac{4}{7}$ setzt Alchwarazmi gleich $\frac{1}{7}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}$, entsprechend bezeichnet er auch $\frac{8}{21}$ zunächst als $\frac{2}{7}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{7}$ (natürlich alles in Worten geschrieben). Die Gleichung spricht er so aus, als ob sie geschrieben wäre $\frac{8}{9}k-\frac{8}{21}x=3x$, dann $\frac{8}{9}k=3\frac{8}{21}x$ und jetzt nimmt er $\frac{1}{8}$ jeder Seite und zählt es dazu, so daß er erhält $k=3\frac{45}{56}x$, worauf er $x=56$ wählt.

VI.

Die nächste Gruppe von Beispielen (S. 104ff.) bietet uns nicht viel Neues. Ich werde sie demgemäß kurz behandeln, während Alchwarazmi alle Beispiele gleich ausführlich durchrechnet.

„Ein Mann stirbt und hinterläßt 4 Söhne. Einer Person vermacht er so viel als den Anteil eines Sohnes, einer andern $\frac{1}{4}$ des Restes, der von $\frac{1}{3}$ des Kapitals bleibt nach Abzug des ersten Legates. Sohnteil $= x$. Ansatz:

$$k - [x + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{3}k - x)] = 4x.$$

Hieraus $x = 11$ für $k = 57$. Die zweite Person erhält 2.

Wiederum sind 4 Söhne da und ein Fremder erhält einen Sohnteil weniger $\frac{1}{5}$ des Restes, der von $\frac{1}{3}$ des Kapitals bleibt nach Abzug des Anteils. Sei dieser $= x$, so lautet der Ansatz:

$$k - [x - \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}k - x)] = 4x.$$

Es ist für $k = 39$ $x = 8$. Der Fremde erhält 7.

Es sind 3 Söhne und eine Tochter da. Eine Person, wir wollen sagen A, soll einen Tochterteil erhalten, eine andere B $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ von dem Rest, der von $\frac{2}{7}$ des Kapitals bleibt nach Abzug des ersten Legates. Dieses sei $x$, dann hat man

$$k - [x + \tfrac{11}{30}(\tfrac{2}{7}k - x)] = 7x.$$

Es ergibt sich $x = 188$, $k = 1603$.

Wiederum sind 3 Söhne und eine Tochter vorhanden. Ein Fremder A soll einen Tochterteil erhalten, ein anderer B $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ des Restes, der zu $\frac{2}{5}$ des Kapitals fehlt nach Abzug des ersten Legates. Ansatz:

$$k - [x + \tfrac{9}{20}(\tfrac{2}{5}k - x)] = 7x.$$

Für $x = 82$ wird $k = 755$.

Die Erben seien dieselben wie vorhin. Ein Fremder erhält einen Sohnteil weniger $\frac{1}{4}$ und $\frac{1}{5}$ des Restes zu $\frac{2}{5}$ des Kapitals nach Abzug des Sohnteils. Wenn der Tochterteil $= x$ gesetzt wird, so lautet die Gleichung

$$k - [2x - \tfrac{9}{20}(\tfrac{2}{5}k - 2x)] = 7x.$$

Für $x = 59$ wird $k = 495$.

Nun kommt eine verwickelte Erbschaft, die aber in demselben Gedankenkreis liegt. Es seien 2 Söhne und 2 Töchter hinterlassen worden. Ein Fremder A soll einen Tochterteil erhalten weniger $\frac{1}{5}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ des Kapitals nach Abzug des Tochterteiles, ein anderer B einen Tochterteil weniger $\frac{1}{3}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ des Kapitals nach Abzug von allem vorigen, ein dritter C $\frac{1}{2}$ eines Sechstels des ganzen Kapitals. Sei der Tochterteil $= x$, so erhält

$$\text{A) } x - \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}k - x),$$
$$\text{B) } x - \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}k - (2x - \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}k - x))],$$
$$\text{C) } \tfrac{1}{12}k.$$





Die Legate zusammen geben $\frac{44}{15}x - \frac{7}{60}k$ und die Gleichung lautet

$$k + \tfrac{7}{60}k - \tfrac{44}{15}x = 6x.$$

Hieraus wird für $x = 67$ $k = 356$. Alchwarazmi gibt die dreifachen Werte an.

Wieder 2 Söhne und 2 Töchter. Ein Fremder A soll einen Tochterteil erhalten plus $\frac{1}{5}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ des Kapitals nach Abzug des Anteils, ein anderer B einen Tochterteil plus $\frac{1}{3}$ des Restes zu $\frac{1}{4}$ des Kapitals nach Abzug des Tochterteils.[1]) Der Ansatz ist

$$k - [(x + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{3}k - x)) + (x + \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{4}k - x))] = 6x.$$

Man findet $k = 448$ für $x = 51$, während Alchwarazmi wieder je das Dreifache angibt.

Noch ein Beispiel derselben Art. Es seien 6 Söhne vorhanden. Ein Fremder A soll einen Sohnteil erhalten plus $\frac{1}{5}$ des Restes zu $\frac{1}{4}$ des Kapitals nach Abzug des Sohnteiles, ein anderer B einen Sohnteil, weniger $\frac{1}{4}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ des Kapitals nach Abzug alles Vorhergehenden. Ein Sohnteil sei $x$, so erhält

$$\text{A) } x + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{4}k - x),$$
$$\text{B) } x - \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{3}k - (2x + \tfrac{1}{5}(\tfrac{1}{4}k - x))].$$

Die beiden Legate zusammen geben $2\frac{5}{20}x - \frac{1}{48}k$ und die Gleichung lautet

$$\tfrac{49}{48}k = \tfrac{165}{20}x,$$

woraus für $x = 49$ $k = 396$ hervorgeht.

VII.

Was nun folgt, ist wieder bemerkenswerter. Der Abschnitt ist überschrieben „Über das Vermächtnis mit dem Dirhem" (S. 116) und die erste Aufgabe lautet: „Ein Mann starb und hinterließ 4 Söhne und vermachte einem Manne ebensoviel als den Anteil eines von ihnen und $\frac{1}{4}$ von dem was bleibt von dem Drittel (des Kapitals) und einen Dirhem."

Es sei der Sohnteil mit $x$, der Dirhem mit $\triangle$, das Kapital mit $k$ bezeichnet. Dann ist das Legat gleich $x + \frac{1}{4}(\frac{1}{3}k - x) + \triangle$ und die Gleichung lautet

$$k - [x + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{3}k - x) + \triangle] = 4x \quad \text{oder} \quad \tfrac{11}{12}k = 4\tfrac{3}{4}x + \triangle,$$

hieraus

$$k = 5\tfrac{2}{11}x + 1\tfrac{1}{11}\triangle.$$

Die beiden letzten Gleichungen spricht auch Alchwarazmi in dieser Weise aus. Nun sagt er, wenn man den Dirhem ganzzahlig[2]) darstellen wolle, so müsse man (wenn ich den Text etwas kürze) das Kapital gleich 11 Dirhem nehmen, dann ergebe sich $x = 2\frac{2}{19}\triangle$. Wolle man aber den Anteil $x$ ganzzahlig darstellen, so müsse man das Vermögen vervollständigen und dann ergänzen, indem man den Dirhem gleich 11 vom Kapital nehme. Was der Verfasser hier meint, erscheint nicht klar. Vielleicht liegt in dem letzten Satz ein Fehler der arabischen Handschrift vor.

Es folgen noch drei ähnliche Beispiele. Das eine lautet dahin, daß der Erblasser 5 Söhne hat und einem Fremden ein Legat aussetzt, das besteht aus

1) Das Beispiel erscheint uns einfacher als das vorige. Dem Araber bot es aber insofern etwas Neues, als das erste Legat „durch das Drittel", das zweite „durch das Viertel des Kapitals" bestimmt war.

2) Arab. ṣaḥīḥ; die Rosensche Übersetzung „distinctly" ist kaum richtig.

einem Dirhem, einem Sohnteil, $\frac{1}{3}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ (des Kapitals nach Abzug des Sohnteils), $\frac{1}{4}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ (des Kapitals) nach Abzug alles Vorigen und noch einen Dirhem. Die einzelnen Teile dieses Legates sind

$$\triangle,\ x,\ \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}k - x),\ \ \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{3}k - \triangle - x - \tfrac{1}{3}(\tfrac{1}{3}k - x)],\ \ \triangle.$$

Diese geben zusammen $\frac{1}{6}k + \frac{1}{2}x + \frac{7}{4}\triangle$.

Das führt zu der Gleichung $\frac{5}{6}k = 5\frac{1}{2}x + 1\frac{3}{4}\triangle$

oder $k = 6\frac{3}{5}x + 2\frac{1}{10}\triangle$.

Es kommt also hier immer nur eine Beziehung zwischen den 3 Größen $k$, $x$, $\triangle$ heraus, die Alchwarazmi dann, wie es scheint, willkürlich vereinfacht. In diesem Falle, sagt er, solle man jeden Anteil, also $x$, gleich 10 Teilen und einen Dirhem ebenfalls gleich 10 Teilen nehmen. Dann sei das Kapital gleich 87 Teilen. Wolle man aber den Dirhem ganzzahlig darstellen, so nehme man $\frac{1}{3}k = 7\frac{1}{2}\triangle$. Mit diesem Wert wiederholt Alchwarazmi die ganze Rechnung und erhält natürlich $x = 3\frac{1}{11}\triangle$.

Im dritten Beispiel sind 4 Söhne vorhanden. Ein Fremder A soll einen Sohnteil erhalten, weniger $\frac{1}{4}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ (des Kapitals) nach Abzug des Anteils und einen Dirhem. Ein Fremder B soll erhalten $\frac{1}{3}$ von dem was zu $\frac{1}{3}$ (des Kapitals nach Abzug alles Vorhergehenden) fehlt und einen Dirhem. Man hat

$$\begin{aligned} \text{A)}\ & x - \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{3}k - x) + \triangle, \\ \text{B)}\ & \tfrac{1}{3}[\tfrac{1}{3}k - x + \tfrac{1}{4}(\tfrac{1}{3}k - x) - \triangle] + \triangle, \\ \text{A + B)}\ & \tfrac{1}{18}k + \tfrac{5}{6}x + \tfrac{5}{3}\triangle. \end{aligned}$$

Daraus die Gleichung $\frac{17}{18}k = 4\frac{5}{6}x + 1\frac{2}{3}\triangle$.

Jetzt nimmt Alchwarazmi wieder willkürlich $x = 17$ und $\triangle = 17$. Dann ist $k = 117$. Wolle man den Dirhem ganzzahlig darstellen, so solle man verfahren, wie er gezeigt habe. Das ist etwas sibyllinisch.

Wenn einer 3 Söhne und 2 Töchter hinterläßt, so lautet das letzte Beispiel dieser Art, und er einer Person, wir wollen sagen A, einen Tochterteil und einen Dirhem vermacht, einer anderen B $\frac{1}{5}$ des Restes zu $\frac{1}{4}$ (des Kapitals) nach Abzug des ersten Legates plus 1 Dirhem, einer weiteren C $\frac{1}{4}$ des Restes zu $\frac{1}{3}$ (des Kapitals) nach Wegnahme alles Vorhergehenden, und einer vierten Person D $\frac{1}{8}$ des ganzen Kapitals, unter der Bedingung, daß alle Legate auf die Erben im allgemeinen verteilt werden[1]), so steht die Rechnung folgendermaßen:

$$\begin{aligned} &\left.\begin{aligned} \text{A)}\ & x + \triangle, \\ \text{B)}\ & \tfrac{1}{5}[\tfrac{1}{4}k - (x + \triangle)] + \triangle \end{aligned}\right\} \tfrac{1}{20}k + \tfrac{4}{5}x + \tfrac{9}{5}\triangle, \\ &\text{C)}\ \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{3}k - (\tfrac{1}{20}k + \tfrac{4}{5}x + \tfrac{9}{5}\triangle)] + \triangle, \\ &\text{D)}\ \tfrac{1}{8}k, \\ \hline &\text{Summe: } \tfrac{59}{240}k + \tfrac{3}{5}x + 2\tfrac{7}{20}\triangle. \end{aligned}$$

Also ergibt sich $\frac{181}{240}k = 8\frac{3}{5}x + 2\frac{7}{20}\triangle$.

Alchwarazmi spricht diese Gleichung ebenfalls aus. Aber zunächst rechnet er nicht allgemein, sondern er sagt, in einem solchen Falle sei es besser, die

1) Diese Voraussetzung wurde bei den anderen Beispielen offenbar stillschweigend gemacht.





Dirhem ganzzahlig darzustellen, und er nimmt ohne weiteres das Kapital zu 24 Dirhem an. Er findet dann in der Tat $x = 1\frac{143}{172}\triangle$ für einen Tochterteil. Dann sagt er, wenn man die Anteile ganzzahlig darstellen wolle, so rechne man so und so, d. h. er führt die ganze Rechnung jetzt noch einmal, aber allgemein durch und gelangt zu obiger Gleichung. Hierauf nimmt er willkürlich $x = 362$ und $\triangle = 362$ Teilen. Dann geht natürlich alles auf. Das ganze Kapital ist $24 \cdot 219 = 5256$.

## VIII.

Ein letztes Kapitel ist überschrieben „Über Ergänzung". Aber trotz dieses besonderen Titels bietet es eigentlich keine Aufgaben neuer Art. Es ist nur die Ausdrucksweise etwas von der früheren verschieden. Vielleicht sind also diese Aufgaben wieder einer anderen Quelle entnommen. Es sei auch gleich vorausgeschickt, daß hier ebenfalls die Verteilung nach $13^{\text{teln}}$ des Restkapitals vorgenommen wird, so zwar, daß in den ersten Beispielen der zurückgelassene Gatte $\frac{3}{13}$, die Mutter $\frac{2}{13}$, eine Tochter $\frac{1}{13}$ erhält. Das erste Beispiel lautet: „Eine Frau stirbt und hinterläßt 8 Töchter, eine Mutter und ihren Gatten. Sie vermacht einer Person so viel, als um was der Anteil einer Tochter ergänzt werden muß, um ihn gleich $\frac{1}{5}$ des Kapitals zu machen und einer andern Person so viel, als um was der Anteil der Mutter ergänzt werden muß, um ihn gleich $\frac{1}{4}$ des Kapitals zu machen." Der folgende Ansatz ist ohne weiteres verständlich:

$$k - (\tfrac{1}{5}k - x) - (\tfrac{1}{4}k - 2x) = 13x.$$

Für $x = 11$ ergibt sich $k = 200$.

Ich gebe die folgenden Beispiele ebenso einfach der Reihe nach. Es seien dieselben Erben vorhanden wie vorhin. Eine Person erhält, ich sage kurz die „Ergänzung" eines Gattenteils zu $\frac{1}{3}$ des Kapitals, eine andere die Ergänzung eines Mutterteils zu $\frac{1}{4}$ des Kapitals, eine dritte die Ergänzung eines Tochterteils zu $\frac{1}{5}$ des Kapitals. Gleichung:

$$k - (\tfrac{1}{3}k - 3x) - (\tfrac{1}{4}k - 2x) - (\tfrac{1}{5}k - x) = 13x.$$

Für $x = 13$ wird $k = 420$.

Dieselben Erben. Eine Person A erhält die Ergänzung eines Mutterteils zu $\frac{1}{4}$ des Kapitals, eine zweite B die Ergänzung eines Tochterteils zu $\frac{1}{5}$ des Restes des Kapitals nach Abzug des ersten Vermächtnisses. Gleichung:

$$k - (\tfrac{1}{4}k - 2x) - \{\tfrac{1}{5}[k - (\tfrac{1}{4}k - 2x)] - x\} = 13x.$$

Für $x = 3$ wird $k = 52$. A erhält 7, B 6.

Dieselben Erben. Eine Person A erhält die Ergänzung des Mutterteils zu $\frac{1}{5}$ des Kapitals, eine andere B $\frac{1}{6}$ des Kapitalrestes. Gleichung:

$$k - (\tfrac{1}{5}k - 2x) - \tfrac{1}{6}[k - (\tfrac{1}{5}k - 2x)] = 13x.$$

Hier ergibt sich $k = 17x$. Alchwarazmi nimmt $x = 5$, $k = 85$, so daß A 7, B 13 erhält.

Dieselben Erben. Eine Person soll die Ergänzung des Mutterteils zu $\frac{1}{3}$ des Kapitals erhalten, weniger die Ergänzung eines Tochterteils zu $\frac{1}{4}$ des Restes nach Abzug der ersten Ergänzung. Gleichung:

$$k - (\tfrac{1}{3}k - 2x) - [\tfrac{1}{4}(\tfrac{2}{3}k + 2x) - x] = 13x$$

Für $x = 5$ wird $k = 69$, das Vermächtnis $= 4$.

„Ein Mann stirbt und hinterläßt einen Sohn und 5 Töchter. Er vermacht einer Person so viel, als hinzugefügt werden muß zu dem Sohnteil, um $\frac{1}{5}$ und $\frac{1}{6}$ (des Kapitals) zu ergänzen, weniger $\frac{1}{4}$ dessen, was bleibt von $\frac{1}{3}$ (des Kapitals) nach Abzug der Ergänzung." Der Sohn erhält wie früher das Doppelte einer Tochter. Der Ansatz lautet dann:

$$k - \{[(\tfrac{1}{5} + \tfrac{1}{6})k - 2x] - \tfrac{1}{4}[\tfrac{1}{3}k - (\tfrac{11}{30}k - 2x)]\} = 7x.$$

Für $x = 5$ wird $k = 36$, das Legat $= 1$.

Letztes Beispiel. Der Mann hinterläßt seine Mutter, seine Gattin und 4 Schwestern. Eine Person soll so viel erhalten, als zu den Anteilen der Gattin und einer Schwester gezählt werden muß, damit diese zusammen die Hälfte des Kapitals geben, weniger $\frac{2}{7}$ der Summe, die von $\frac{1}{3}$ (des Kapitals) bleibt nach Abzug dieser Ergänzung. Alchwarazmi gibt die Verteilung unter den Erben hier nicht an. Aber er rechnet den Anteil der Gattin und den einer Schwester zusammen zu $\frac{5}{13}$. Es ist deshalb wahrscheinlich, daß die Gattin $\frac{3}{13}$, die Mutter und jede Schwester $\frac{2}{13}$ erhalten sollen. Setzt man ein 13tel gleich $x$, so lautet die Gleichung:

$$k - \{(\tfrac{1}{2}k - 5x) - \tfrac{2}{7}[\tfrac{1}{3}k - (\tfrac{1}{2}k - 5x)] = 13x.$$

Für $x = 133$ wird $k = 1932$. Die Ergänzung ist 301, der Abzug von der Ergänzung 98, das Legat also 203. Für die Erben bleiben 1729, schließt Alchwarazmi.

## IX.

Im englischen Text geht das bisher Behandelte von Seite 86 bis Seite 133. Es folgt nun bis Seite 174, wo das Werk endet, ein Abschnitt mit der Überschrift „Das Rechenverfahren bei Schicksalswechsel".[1]) Es handelt sich auch hier um Erbschaftsregelungen, die aber in verschiedener Weise verwickelt sind. Rosen sagt gleich zu Anfang auf Seite 133 in einer Fußnote, daß die Lösungen fast all dieser Aufgaben vom mathematischen Standpunkt aus betrachtet ungenau sind. Nicht daß die Gleichung, sobald sie einmal aufgestellt ist, unrichtig gelöst sei, aber bei Aufstellung der Gleichung seien, um den arabischen Gesetzesauslegungen zu genügen, willkürliche Annahmen gemacht, die in der Angabe nicht enthalten seien oder ihr sogar widersprächen. Eine Durchsicht der einzelnen Aufgaben bestätigt die Bemerkung Rosens. Man könnte nur vielleicht besser sagen, die willkürlichen Annahmen seien größer als in dem vorhergehenden Abschnitt, da doch auch viele der vorigen Aufgaben ohne solche Annahmen, die nicht im Text stehen, nicht lösbar gewesen wären. Aus diesem Grunde werde ich diese Aufgaben nicht wie die bisherigen einzeln aufführen. Mathematisch Neues bieten sie nicht und für den Unterricht eignen sich viele davon auch stofflich nicht. Ich will also nur kurz sagen, worum es sich handelt.

Ein erstes Kapitel ist überschrieben: „Über die Verheiratung in der (letzten) Krankheit". Auf dem Totenbett heiratet jemand ein Weib. Er zahlt dabei eine gewisse Morgengabe, von der ein Teil der Frau selbst als Leibgedinge gehört. Nun macht er oder auch seine Frau Vermächtnisse, wobei noch Schulden oder Vermögen der Frau in Betracht gezogen werden. Der Schicksalswechsel besteht nun etwa darin, daß die Frau noch vor dem Manne stirbt. In jedem Falle

1) Arab. „daur". Die Übersetzung „returns" von Rosen ist unrichtig.





handelt es sich um die Verteilung der Erbmasse, eingerechnet die Morgengabe und das Leibgedinge, an ihre und seine Erben.

Das zweite Kapitel hat die Überschrift: „Über Freilassung (von Sklaven) in der (letzten) Krankheit". Auch hier handelt es sich um Anordnungen auf dem Sterbebett. Die Sklaven haben einen gewissen Preis, andererseits aber auch vielleicht Vermögen oder Schulden und Kinder. Der Erblasser hat auch Kinder. Es wird dann vor allem der Fall behandelt, daß der freigelassene Sklave noch vor dem Herrn stirbt. Der Herr kann außerdem noch Vermögen oder Schulden haben und sowohl Herr wie Sklave können (an Fremde) Vermächtnisse machen. Der Sklave kann auch einen Teil seines Lösegeldes schon abbezahlt haben. Der befreite Sklave stirbt, hinterläßt aber eine verheiratete Tochter, die noch vor dem Herrn stirbt und etwas Geld hinterläßt, auch selbst Vermächtnisse machen kann. Neben der Freilassung eines (oder mehrerer) Sklaven geht die Schenkung eines Sklavenmädchens einher. Ein solches hat neben dem Preis Anspruch auf eine Entschädigung[1]), wenn es zum Beischlaf benützt wird. Es kommt nun darauf an, ob etwa der Geber sie schon beschlafen hat, oder ob dies erst der Nehmer tut, oder ob beide mit ihr kohabitieren.

Ein nächstes Kapitel handelt von „In-Rechnungstellung der (Beischlaf-)Entschädigung" eines Sklavenmädchens. In ihm werden ganz ähnliche Aufgaben, wie eben geschildert, behandelt, nur daß es sich um keine Freilassung, sondern lediglich um die Verschenkung eines Sklavenmädchens handelt. Zwei weitere Aufgaben sind überschrieben: „Über Vorausbezahlung[2]) in Krankheit". Hier wird vom Erblasser ein Wert in Waren einem dritten gegeben. Die Waren sind mehr oder weniger wert, als der Fremde erhalten sollte. Es handelt sich dann um die Verrechnung zwischen dem Warenempfänger und den Erben.

* * *

Wenn wir oben von Quellen Alchwarazmis sprachen, so meinten wir Rechtsquellen. Alchwarazmi führt selbst ein paarmal Abū Ḥanīfah (690—767) an. Irgendwelche arabische mathematische Quellen vor Alchwarazmi sind nicht bekannt und es ist daher nicht unmöglich, daß mit der Anwendung algebraischer Verfahren[3]) auf die Erbteilungsaufgaben bei den Arabern Alchwarazmi den Anfang gemacht hat. Von ihm aus geht aber durch Jahrhunderte hindurch eine ganze Kette von mathematischen Bearbeitungen solcher Aufgaben, von denen noch keine einzige erschlossen wurde. Ob Alchwarazmi sich auf griechische Vorbilder stützte, welche Verbesserungen etwa seine Nachfolger noch anbrachten, ob und wie die Dinge auf das lateinische Mittelalter übergingen, das ist alles noch unbekannt. Aber Ruskas Arbeit, durch die mein bescheidener Beitrag angeregt wurde, bedeutet doch wieder einen Schritt weiter in der Beurteilung der praktischen Mathematik der Araber.

Wasserburg a. Inn, Herbst 1916.

1) Arab. „ʿakr", ein besonderer Fachausdruck für die oben näher gekennzeichnete Entschädigung. Das Rosensche „dowry" ist auf alle Fälle unklar.

2) Arab. „sálam". Rosens „surrender" ist unrichtig.

3) Worin diese Verfahren bestehen, kann der Leser aus meinem Bericht über Ruskas Arbeit oder noch besser aus dieser selbst ersehen.

# ZUR MUSLIMISCHEN UND AEGYPTISCHEN GLEICHUNGSAUFLOESUNG

Eine kleine Sache nur, und doch, wie es scheint, nicht ohne größere geschichtliche Bedeutung. Wenn man eine lineare Gleichung zu lösen hat, muß mit dem Koeffizienten von $x$ dividiert werden. Ebenso muß man bei einer quadratischen Gleichung, um sie auf eine der Grundformen zu bringen, mit dem Koeffizienten von $x^2$ dividieren. Wie das der erste Verfasser einer eigentlichen *Algebra*, der Perser ALCHWÂRAZMÎ (um 825 n. Chr.) gemacht hat [1], ist bisher kaum beachtet worden.

Wenn der genannte Koeffizient eine ganze Zahl ist, so wird einfach die Gleichung mit dieser Zahl dividiert. Das ist ohne Interesse. Meist ist aber der Koeffizient ein Bruch. Der Muslim redet dann überhaupt nicht vom Dividieren; sondern er sagt: « Vervollständige » die Unbekannte (schai'), oder das Quadrat der Unbekannten (mâl) zu einem Ganzen, oder « reduziere » auf ein Ganzes, je nachdem der Koeffizient kleiner oder größer als 1 ist. Für « vervollständigen » ist das Wort « ikmâl » oder auch gelegentlich « itmâm », für reduzieren das Wort « radd » gebraucht [2].

Diese « Vervollständigung » oder « Reduktion » geschieht manchmal auch ganz in unserer Weise durch Division. Z. B. wird Seite 57 das Glied $\frac{4}{9}x^2$ zu $x^2$ « vervollständigt », indem die ganze Gleichung mit $2\frac{1}{4}$ multipliziert wird. Aehnlich wird S. 37 das Glied $2\frac{7}{9}x^2$ auf $x^2$ « reduziert », indem mit $\frac{9}{25}$ multipliziert wird. Auf S. 45 soll der Koeffizient $4\frac{1}{6}$ beseitigt werden. Es wäre mit $\frac{6}{25}$ zu multiplizieren. Statt dessen nimmt ALCHWÂRAZMÎ von jedem Glied $\frac{1}{5}$ und noch $\frac{1}{5}$ eines Fünftels. Das ist ein Nachklang der ägyptischen Teilbruchrechnung, die ja bekanntlich etwa erst im 16. Jahrh. ganz verschwand [3].

1) *The Algebra of Mohammed ben Musa.* Ed. F. ROSEN. London 1831. Die Zitate beziehen sich auf den englischen Text.

2) Freundliche Bemerkung von J. RUSKA. Vgl. auch dessen Schrift *Zur ältesten arabischen Algebra und Rechenkunst.* Stzgsber. Heidelberg. Ak. d. Wiss. (phil.-hist. Kl.) Jahrg. 1917. 2. Abhdlg. 125 S. 8° (Separat bei C. Winter, Heidelberg).

3) Vgl. J. TROPFKE, *Geschichte der Elementarmathematik* I², Berlin 1921, S. 118-122.





In der Regel schafft ALCHWÂRAZMÎ aber den Koeffizienten des höchsten Gliedes der Gleichung (wie wir sagen) überhaupt nicht auf diese Weise weg. Z. B. wird S. 87 o. die Gleichung [4]

$$\frac{2}{3}x = 3\frac{1}{3}$$

so behandelt, daß auf beiden Seiten die Hälfte der betreffenden Seite dazu gezählt wird. So ergibt sich

$$\frac{2}{3}x + \frac{1}{3}x = 3\frac{1}{3} + 1\frac{2}{3},$$
$$\text{oder } x = 5.$$

Ein Beispiel, wo der Koeffizient größer als 1 ist, steht S. 106. Es lautet in unserer Bezeichnung [5]

$$x + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5}x = 5\frac{1}{5},$$
$$\text{oder } \frac{16}{15}x = \frac{26}{5}.$$

ALCHWÂRAZMÎ zieht auf beiden Seiten die Hälfte eines Achtels (d. i. $\frac{1}{16}$) ab und erhält so (die Rechnung fehlt) $8\frac{1}{8}$.

Solche Beispiele sind zahlreich, besonders in dem Abschnitt über Erbteilungsaufgaben, der bis auf RUSKA [6] und den Verf. [7] von den Historikern der Mathematik ganz vernachlässigt worden war. Aber sie beschränken sich merkwürdiger Weise gar nicht auf die Fälle, daß der fragliche Koeffizient die Form $\frac{n-1}{n}$ oder $\frac{n+1}{n}$ hat. S. 109 lautet die Gleichung z. B.

$$\frac{4}{5}x + \frac{1}{10}\cdot\frac{1}{5}x = 7\frac{11}{20}.$$

ALCHWÂRAZMÎ sagt: « Addiere zu jedem Glied (wörtlich « zu dem was bei dir »; J. RUSKA) $\frac{9}{41}$ ». Links kommt nämlich $\frac{41}{50}x$ heraus. S. 110 lautet die Gleichung

$$x + \frac{9}{10}\cdot\frac{1}{5}x = 9\frac{9}{10}.$$

Es wird beiderseits $\frac{9}{59}$ abgezogen. Denn links kommt $\frac{59}{50}x$ heraus. Ein Beispiel sei noch erwähnt, weil dort der Text einen Fehler hat. S. 112 heißt eine Gleichung

$$1\frac{7}{60}x = 8\frac{14}{15}.$$

Es ist auf beiden Seiten $\frac{7}{67}$ abzuziehen. ROSEN hat $\frac{7}{60}$, was (nach J. RUSKA) schon im arabischen Text steht. Aehnliche Beispiele finden

4) Der Muslim schreibt natürlich alles in Worten.

5 Es sei bemerkt, daß man nur auf ROSEN'S Uebersetzung, nicht auf seine mathematische Uebertragung sich verlassen darf, die er selten dem Text genau angepaßt hat.

6 A. a. O. S. 47-61.

7) Vgl. meinen Aufsatz *Die Erbteilungsaufgaben bei Muhammed ibn Musa Alchwârazmî.* Zeitschr. f. math. u. naturw. Unterr. 53 (1922) S. 57-67.

sich noch S. 53, S. 87 u., S. 89, 99, 100, 101, 102, 104, 107, 114, 116, 117, 119, 121, 123 usw. Es ist also klar, daß diese Methode dem Muslim viel geläufiger war als die unserige, die er auch kannte.

Nun steht in dem berühmten Papyrus Rhind, dem sog. Rechenbuch des AHMES (um 1800 v. Chr.) ein Beispiel (Nr. 28), das allen bisherigen Erklärungsversuchen trotzte [8].

Es lautet in unserer Schreibweise so

$$\left(x + \frac{2}{3}x\right) - \frac{1}{3}\left(x + \frac{2}{3}x\right) = 10.$$

AHMES sagt nun einfach: Nimm $\frac{1}{10}$ von 10, d. i. 1, weg; der « Rest » 9 ist das Resultat. Das versteht man nach dem obigen sofort, wenn man bemerkt, daß die linke Seite $\frac{10}{9}x$ ergibt. Denn wenn man hier ein Zehntel « wegnimmt », bleibt eben $x$ selbst.

Mehr ägyptische Beispiele dieser Art scheint man vorderhand nicht zu kennen. Zwischenglieder bis zu dem $2\frac{1}{2}$ Jahrtausende später schreibenden Muselman sind auch nicht bekannt. Aber trotz dieser Lücken ist der Zusammenhang nicht zu bezweifeln und offenbart aufs neue die Zähigkeit der wissenschaftlichen Tradition.

Die arabische Mathematik ist noch viel zu wenig bekannt, sogar im Großen, vielmehr in solchen Einzelheiten, als daß ich sagen könnte, ob das Verfahren, das wir hier besprochen haben, auch später noch angewendet wurde. In der *Algebra* des IBN BADR aus Sevilla [9] (etwa 100 Jahre später als ALCHWÂRAZMÎ) habe ich es nicht gefunden, wiewohl darin zahlreiche Beispiele vorkommen, wo es hätte angewendet werden können [10]. Ich möchte daraus aber keine Schlüsse ziehen.

*Augsburg.* HEINRICH WIELEITNER

---

8) Papyrus Rhind, ed. A. EISENLOHR, Leipzig 1877. I, S. 65; ed. T. ERIC PEET, London 1923, S. 63. Ueber die letztere Ausgabe Genaueres in meinem Artikel *Zur ägyptischen Mathematik*, Ztschr. f. math. u. naturw. Unterr 56 (1925) 3. Heft. Dort habe ich die obige Erklärung, obwohl mir damals nur eines der arabischen Beispiele bekannt war, zum erstenmal gegeben.

9) Vgl. *Compendio de Àlgebra de Abenbéder*. Ed. JOSÉ A. SÁNCHEZ PÉREZ. Madrid, 1916.

10) Z. B. beginnt S. 42 (des spanischen Textes) eine Gleichung mit $\frac{5}{6}x^2$. Um dieses Glied zu « vervollständigen », werden alle Glieder mit $1\frac{1}{5}$ « multipliziert ». Es steht nicht da, daß zu jedem Glied $\frac{1}{5}$ « addiert » werden soll. Wenigstens nicht in der wörtlich scheinenden Uebersetzung (nachträgliche Bestätigung durch C. SCHOY).