

P. Bockstaele*

HET OUDST BEKENDE, GEDRUKTE NEDERLANDSE
MEETKUNDEBOEK:
DIE WAERACHTIGE CONST DER GEOMETRIEN (1513)

Toen in 1425 op initiatief van de stad Leuven door paus Martinus V de Leuvense universiteit werd gesticht, was een van de eerste bekommernissen het organiseren van het onderwijs in de artesfaculteit. Dit omvatte de zeven vrije kunsten, traditioneel onderverdeeld in een dubbele cyclus, een lagere, het trivium met de grammatica, retorica en dialectica, en een hogere, het quadrivium, met de aritmetica, geometrie, astronomie en muziek. Deze laatste vier vormden samen de mathematische vakken. De kennis ervan was onmisbaar voor wie aan een van de hogere faculteiten theologie, rechten of geneeskunde wilde studeren. Maar ook buiten de in het Latijn docerende en schrijvende universitaire wereld ondervond men al vroeg dat enige kennis van wiskunde wenselijk en zelfs onontbeerlijk was. Stimulerend werkten hier de noden van de groeiende steden en van de zich snel ontwikkelende handel. Administratie en boekhouding, landmeterij en het werk op de bouwwerf onderstelden enige vaardigheid in rekenen en meten. De uitbreiding van de wijnhandel van de Vlaamse steden met Frankrijk en Duitsland maakte het omrekenen van maten noodzakelijk, naast methodes voor het bepalen van de inhoud van vaten en tonnen. Rond dit alles ontwikkelden zich vanaf de 14e eeuw tal van officies zoals ijker, wijnmeter, korenmeter, prijsjer, erscheider, landmeter, enz. Groot was de mathematische kennis van deze middeleeuwse ambtenaren, bouwmeesters en kooplieden niet. Hun enige scholing was die van de praktijk. Als leerjongen namen ze de vakkennis en traditie over van hun meester. In de loop van de 15e eeuw bracht het toenemend belang van deze officies ook de nood aan betere leermiddelen mee. Voor de nog jonge boekdrukkunst opende deze groeiende belangstelling voor direkt bruikbare en nuttige kennis bij het begin van de 16e eeuw een nieuw en veelbelovend werkterrein. Dat hier zaken te doen waren schijnt onder meer de Brusselse jonker Thomas van der Noot al vlug te hebben begrepen.

Thomas van der Noot,¹ onecht kind van een Brusselse patriciër, werd circa

*Katholieke Universiteit Leuven, Faculteit der wetenschappen, departement wiskunde, Celestijnenlaan 200B, B-3030 Leuven, België.

1. Over Van der Noot zie: A. Rouzet, *Dictionnaire des imprimeurs, libraires et éditeurs des XVe en XVIe siècles dans les limites géographiques de la Belgique actuelle* (Nieuwkoop, 1975) 160-161.

1475 geboren. Na in Lyon en Parijs zijn beroep te hebben geleerd, vestigde hij zich omstreeks 1508 als drukker te Brussel. Tussen 1508 en 1523 legde hij er ongeveer veertig werken ter perse, op weinige uitzonderingen na alle in het Nederlands.² Hieronder zijn verschillende volks-wetenschappelijke werkjes, door hem zelf in het Nederlands vertaald uit Latijnse, Franse, Spaanse of Duitse bronnen. Zo stuurde hij in 1513 *Tbouck van Wondre* in het licht, waarin onder meer "die const van alderhande substancien te verwen" wordt geleerd, samen met nog "meer ander consten" als het bereiden van bier, wijn en azijn, het enten van planten, enz. Reeds het volgende jaar liet hij zijn *Tscep vol wonders* van stapel lopen, beladen met astrologische en alchemistische wetenswaardigheden en allerlei wonderlijke geneesmiddelen. Uit het voorwoord vernemen wij dat Van der Noot het "uut diverschen boomgaerden vergadert" heeft. Nog geen drie maanden later laat hij een boekje verschijnen met gezondheidsregels en remedies tegen allerlei kwalen onder de titel *Tregement der ghesontheyt*. Het is een Nederlandse bewerking van het *Regimen sanitatis* van de 14e-eeuwse Milanese arts Magninus.³ In 1515 bezorgde Van der Noot een Nederlandse vertaling van Quiricus de Augustis' *Lumen apothecariorum* onder de titel *Dlicht der apotekers*,⁴ en in 1516 *Den Roseghaert van den bevruchten vrouwen*, een vertaling van Eucharis Rösli's *Der swangern Frauen und Hebammen Rosegarten*. Ook aan kooplieden, landmeters en wijnroeiers, en aan allen die iets meer wilden vernemen over rekenen en meetkunde, heeft Van der Noot gedacht om zijn bedrijf te laten renderen. Reeds in 1508 liet hij een rekenboekje het licht zien onder de titel *Die maniere om te leeren cijffren na die rechte consten Algorismi*.⁵ Vijf jaar later volgde een werkje over meetkunde, voor zover we weten het eerste in het Nederlands gedrukte boek over geometrie. Aan deze zeldzame uitgave is de rest van deze bijdrage gewijd. Gedrukt in een mooie Gotische letter, kwam het einde april 1513 van de persen van Van der Noot met als titel:

"Die waerachtige const der Geometrien leerende hoemen alderhande breyddden, lingden, dicten, ende hoochden Der velden Beemden Bosschen Berghen Metselrien Pauveyselen Torren Huysen Kercken ende alderhande dinghen meten sal. Hoemen oock maken sal die wynroede, Om daer mede te roeden alderhande Tonnen Vaten Cuyppen backen ende dier ghelijcke."

2. Voor een overzicht van Van der Noots productie, zie E. Indestege, "Production de deux imprimeries bruxelloises célèbres des XVe et XVIe siècles à l'exposition de la Collection Lessing J. Rosenwald", *Cahiers Bruxellois* 5 (1960) 193-201.

3. L. Elaut, "De Nederlandse bewerking (1514 en 1554) van Magninus' *Regimen sanitatis*", *Het boek* 36 (1963-1964) 80-88.

4. Quiricus de Augustis, *Dlicht d'apotekers 1515. The first prescription book printed in the Low Countries*. Facsimile with an introduction by D.A. Wittop Koning (Nieuwkoop, 1967).

5. P. Bockstaele, "Het oudste gedrukte Nederlandse rekenboekje", *Scientiarum historia* 1 (1959) 53-71, 117-127 en "Notes on the first arithmetics printed in Dutch and English", *Isis* 51 (1960) 315-321.

Een houtsnede onder de titel (afb. 1) stelt drie mannen voor op een stadsplein. Het personage links houdt een instrument in de hand gebruikt bij het meten van hoeken en het vinden van hoogten. De man in het midden is bezig met behulp van een roeistok de inhoud van een ton te bepalen. De derde rechts vooraan schijnt de inhoud te meten van een rechthoekige bak. Waar en wanneer het boek werd gedrukt vernemen wij uit het colofon (f. K6v):

"Gheprint in de princelijcke stadt van Bruesel Inden Zeeridder Bi mi Thomaes vander noot opten acht en twintichsten dach van April Int iaer .xv^e. ende .xijj."

Deze uiterst zeldzame in-4^o postincunabel — het enige bekende exemplaar berust in de Gentse Universiteitsbibliotheek (sign. R. 1099) — telt 42 niet genummerde bladen met 29 tot 33 drukregels per bladzijde. Het is verlucht met talrijke houtsneden, meetkundige figuren voorstellende. De inhoud is elementair en op de praktijk gericht. Men vindt er geen proposities noch bewijzen, maar alleen een reeks van min of meer bruikbare recepten voor het oplossen van eenvoudige meetkundige problemen.

De inhoud is verdeeld over 30 kapitels. In de eerste zeven (ff. A2-C) worden de grondbegrippen van de meetkunde met hun benamingen geïntroduceerd. Hoofdstuk 1 handelt "vanden linien ende haren specien". De anonieme auteur vangt aan met het opnoemen van wat hij de beginselen of algemene inzichten van de meetkunde noemt:

"Dat beghinsel van geometrien dat zijn ghelijck Punctus Linia Superficies Corpus Communes Animi Conceptiones ende Conclusiones."

Hij gaat dan verder met wat men als definities van punt en lijn kan opvatten:

"Punctus es beghyn van grootten dwelck gheen deelen en heeft, want si ondeyllyck es. Ende als men se int langhe treect so eest een linie." "Linia oft linie es een lingde sonder breyden. Ende dinden vander linien dat punten sijn."

Duidelijk herkent men hierin de eerste drie definities uit Euclides' *Elementen*:

"Een punt is wat geen deel heeft." "De lijn is breedteloze lengte." "De uiteinden van een lijn zijn punten."

Lijnen zijn tweeërlei, "te weten rechte ende cromme". De rechte lijnen (bedoeld zijn lijnstukken) worden in tal van soorten ingedeeld, naargelang de rol die ze spelen in meetkundige figuren:

"Ghi moet oock weten datter sijn vele rechte linien ghelijc als dese dye hier na volghen. Somige heeten dyameter Somige axis Somyghe corda Somighe latas Somighe basis Sommighe cathecus. Somighe corauscus Somighe ypothenusa Somighe dyagonalis Somighe perpendicularis Somighe arthogonalis [zo voor orthogonalis]" (f. A2r).⁶

6. Let op de verschillende vormen van het woord 'sommige'. Naast een variërende spelling van tal van woorden ontsieren ook heel wat zetfouten *Die waerachtige const der geometrien*.

Die waerachtige const der Geometrie leerende
 hoemē alderhāde/brepddē/ligdē/dictē/en hooch
 dē Der veldē Seemden Gosschē Berghē Metsele
 Daupsele Toeren Inpsen Kercken ende alderhan
 de dinghen meten sal. Hoemen oock maken sal die
 wijnroede/Om daer mede te roeden alderhande Tē
 nen Vaten Cupppen backen ende dier ghelijche



Afb. 1

Aan de hand van figuren wordt dan verklaard wat dit voor lijnen zijn. Evenwijdige rechten worden als volgt beschreven (f. A4r):

“Linie parallule dat sijn lynien alomme euen ghelijck van malckanderen staende. Want al wordense altijt voerts oft langher getrocken si en souden nemmer meer gheraken.”

Na de rechte lijnen komen de “cromme lijnen” aan de beurt. Een niet volledige cirkel wordt “cyrconferens”, “perimeter” of “circumferentiael linie” geheten; de gehele cirkel heet “rinclinie” (f. A4v). Van enig konsekvent gebruik van deze termen is echter geen sprake. Zo worden verder in het werkje “circumferencia” en “perimeter” ook gebruikt om een cirkel of zijn omtrek aan te duiden. Onder de kromme lijnen wordt, naast de cirkel, nog de “linie flexuosa” vermeld, waarbij als voorbeeld een golvende lijn is getekend, en een “linia spiralis”, “de welcke eest datse omme ende omme geleyt wort, so en comt si nemmermeer in haer eerste punten” (f. B1r). Het tweede kapittel is gewijd aan “die diffinicien vanden hoecken” (ff. B1r-B2v). Er wordt onderscheid gemaakt tussen “planen hoek” (angulus planus), ook “pleyn ofte effen hoek” genoemd, dit is de hoek gevormd door twee rechte lijnen, en “speralen hoek” (angulus speralis), gevormd door twee elkaar snijdende cirkels. Zowel de “plane” als de “sperale” hoeken kunnen recht zijn of niet. Onder de niet-rechte hoeken, die hier “cromme hoecken” worden genoemd, zijn er “scerpe” of “clare” en “botte” of “donckere”. De hoek gevormd door een cirkel en zijn raaklijn of door twee rakende cirkels heet “angulus contingentie”. Ten slotte is er nog sprake van een “superficialen hoek” en van een “angulus solidus”. Met de eerste is de figuur bedoeld gevormd door twee snijdende rechten. De auteur merkt op dat dit door sommigen ook “anguli coalterni” (overstaande hoeken) wordt genoemd. Een “angulus solidus” komt overeen met wat wij een veelvlakshoek noemen.

Wat in de hoofdstukken 3 tot 7 wordt behandeld blijkt uit hun titel die hieronder volgt, eventueel met enig commentaar.

Kap. 3: *Die superficies met haren specien*. Als definitie van oppervlak lezen we hier: “es lingde ende breyde sonder diepte”. Twee soorten oppervlakken worden onderscheiden, “te weten rechte ende cromme”. Rechte superficies worden ook “pleyn” genoemd.

Kap. 4: *Vanden circulen ende haren specien*. Met “circulus”, “circule” of “cirkel” wordt de cirkelschijf bedoeld; de begrenzendende lijn heet hier “circumferentia” of “perimeter”. Verder komen nog de volgende termen voor: semicirculus, centrum, corda, arcus, sector circuli, alle zonder Nederlands equivalent.

Kap. 5: *Vanden driehoeckeghen dinghen met haren specien*. Naast “triangulus”, “triangel” of “triangel” wordt ook de term “driehoek” gebruikt. Verder komen voor, echter zonder Nederlands equivalent: ysopleurus

(gelijkzijdig), ysocheles (gelijkbenig), scalenos (ongelijkzijdig), ampligonius (stomphoekig), exigonius (scherphoekig) en orthogonius (rechthoekig).

Kap. 6: *Vanden vierhoeckeghen dinghen ende haren specien*. Een vierhoekig ding "dat es een ghedaente hebbende vier hoecken ende vier linien. Ende om datse vier linyen heeft, so heetse te sine viersidich. Ende om datse vier hoecken heeft so heetet quadrangulus, dats vierhoeckich." De volgende soorten vierhoeken worden genoemd, zonder dat echter steeds duidelijk is wat ermee bedoeld wordt: quadratum equilaterum, "dats viercantich gelijksidich", quadratum parallelogranum (sic) (rechthoek?), rombus (ruit?), romboydes (parallelogram). Het hoofdstuk besluit met de bemerking: "alle andere quadraten worden gheheeten Mesula [zo voor mensula]".

Kap. 7: *Vanden vijfhoeckeghen, seshoeckeghen ofte sevenhoeckeghen dinghen ende dierghelijcke*. Als definitie wordt gegeven: "Es een pleyne ghedaente hebbende, vijfhoecken, seshoecken oft meer: ende al ghelicksidich, dats allen siden euen lanck. Dese worden gheheeten Pentagoni, Hexagoni, heptagoni, ende soe voerts." Uit de bijgaande figuren blijkt dat hier regelmatige veelhoeken worden bedoeld. Verder in het werk treft men ook benamingen aan als "vijf hoek" of "achthoek", en op f. F3v worden niet convexe veelhoeken beschreven als "dingen die geen rechte noch mate en houden inden linien noch hoecken".

Met hoofdstuk 7 eindigt het inleidende en eerder theoretisch deel van *Die waerachtige const der geometrien*. De rest van het werk is vooral praktisch en beoogt op de eerste plaats te leren hoe men oppervlakten berekent of inhouden bepaalt. We vinden er een merkwaardig mengsel van juiste en onjuiste regels en voorschriften die reeds generaties lang kritiekloos werden overgeleverd. Veel ervan gaat terug op de geschriften van de Romeinse agrimensores,⁷ waaronder de zogenaamde Geometrie van Epaphroditus en Vitruvius Rufus.⁸ Onder de bronnen waaruit deze kennis tot in de 15e eeuw vooral werd geput zijn de Geometrie van Gerbert van Aurillac (rond 940-1003)⁹ en twee onder de naam Boethius overgeleverde versies van een geometrie, die in hun huidige vorm echter niet van Boethius afkomstig zijn. Naar het voorbeeld van Folkerts¹⁰ duiden we ze verder aan als 'Boethius' Geometrie I en II.

7. M. Cantor, *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmesskunst. Eine historisch-mathematische Untersuchung* (Leipzig, 1875).

8. P. Tannery & V. Mortet, "Un nouveau texte des traités d'arpentage et de géométrie d'Epaphroditus et de Vitruvius Rufus", *Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Nationale et autres bibliothèques* 35, 2e partie (1896) 511-550; ook in P. Tannery, *Mémoires scientifiques*, dl. 5 (Toulouse-Paris, 1922) 29-78.

9. N. Bubnov, *Gerberti postea Silvestri II papae Opera Mathematica (972-1003). Accedunt aliorum opera ad Gerberti libellos aestimandos intelligendosque necessaria per septem appendices distributa* (Berlijn, 1899; reprint: Hildesheim, 1963).

10. M. Folkerts, 'Boethius' *Geometrie II. Ein mathematisches Lehrbuch des Mittelalters* (Wiesbaden, 1970).

Kapittel 8 van *Die waerachtige const* over “dye metinghe der linien int ronde” leert de omtrek en de oppervlakte van een cirkel te vinden. De omtrek p krijgt men door 3 en $\frac{1}{7}$ van de diameter d te nemen. De oppervlakte wordt berekend volgens een van de volgende regels:

$$\frac{1}{14}(11d^2), \quad p^2 : (12\frac{1}{7}), \quad \frac{1}{2}p \times \frac{1}{2}d, \quad \frac{1}{4}(d \times p).$$

De geringe meetkundige kennis van de samensteller van *Die waerachtige const* en zijn, zij het indirekte afhankelijkheid van de hoger genoemde geschriften komt duidelijk tot uiting in hoofdstuk 9 over “die metinghe der linien des driehoecx”. Het vangt aan met een toepassing van de stelling van Pythagoras: de berekening van een van de zijden van een rechthoekige driehoek (ypotenusa, basis of cathecus) uit de twee andere. Dan volgen een aantal vraagstukken over gelijkzijdige driehoeken. Het eerste leert uit de zijde a de hoogte h te vinden en omgekeerd. De gegeven voorschriften komen neer op $h = \sqrt{\frac{3}{4}a^2}$ en $a = \sqrt{\frac{4}{3}h^2}$. Om de oppervlakte te berekenen van een gelijkzijdige driehoek met zijden van 28 voet, wordt het volgende voorschrift gegeven: neem de zijde in het kwadraat, tel er de zijde bij en deel de som door twee; dit geeft 406 als oppervlakte. Dit betekent dat voor de oppervlakte A van een gelijkzijdige driehoek met zijde a als regel wordt voorgesteld:

$$A = \frac{1}{2}(a^2 + a).$$

Consequent voortwerkende met deze foute regel wordt het omgekeerde probleem opgelost: uit de oppervlakte A van een gelijkzijdige driehoek de zijde a vinden. Het voorschrift komt neer op

$$a = \frac{1}{2}(\sqrt{8A+1} - 1),$$

wat niets anders is dan de positieve wortel van de kwadratische vergelijking $a^2 + a = 2A$. Deze beide onjuiste voorschriften treft men reeds aan bij Epaphroditus en in ‘Boethius’ *Geometrie II*.¹¹ Op de oorsprong van de formule $\frac{1}{2}(a^2 + a)$ voor de oppervlakte van een gelijkzijdige driehoek komen we verder terug. De laatste opgave over gelijkzijdige driehoeken leert uit de zijde a de straal r van de omgeschreven cirkel te vinden en omgekeerd. Dit verloopt volgens de juiste regels $r = \sqrt{a^2/3}$ en $a = \sqrt{3r^2}$.

In het volgende vraagstuk gaat het over een gelijkbenige driehoek. Gevraagd wordt de hoogte op de basis te vinden, als die basis 14 voet is en de opstaande zijde 25. Met de stelling van Pythagoras is dit eenvoudig op te lossen, maar de auteur kiest een heel andere en onverwachte weg: “multiplieert deen helft van basis, dats seven, in haer selven, comt neghen en veertich. Hier af trect die lingde vander een der siden, te weten vijf en twintich. So blijft daer noch vier en twintich. Ende so lanck es cathecus

11. Tannery, *Mémoires scientifiques*, dl. 5, 59-60; Folkerts, ‘Boethius’ *Geometrie II*, 149.

[=hoogte] des selven triangelhels ysocheles" (f. D2v). Voor de hier gekozen afmetingen levert deze zinloze regel toevallig (!) de juiste uitkomst.

Hoofdstuk 9 eindigt met een aantal opgaven die resulteren in de berekening van de oppervlakte van een ongelijkzijdige driehoek uit zijn drie zijden. Na wat voorafgaat verwacht men een totale catastrofe. Men is dan ook verrast en verwonderd te constateren dat integendeel alles uitstekend verloopt. Eerst wordt geleerd de projectie te vinden van de kleinste zijde a op de grootste c . Dit gebeurt door gebruik te maken van de bekende eigenschap $b^2 = a^2 + c^2 - 2cx$, waarin x de gezochte projectie is. Eenmaal x gevonden, berekent men met de stelling van Pythagoras de hoogte h op de zijde c , waaruit zonder moeite de oppervlakte van de driehoek wordt gevonden als $\frac{1}{2}hc$.

In hoofdstuk 10 leert men de oppervlakte vinden van allerlei vierhoeken. Vierkant en rechthoek komen het eerst aan de beurt, daarna een vierhoek met twee gelijke overstaande zijden. De bijgevoegde figuur is een gelijkzijdig trapezium. Als regel wordt gegeven: de halve som van de ongelijke zijden vermenigvuldigd met een van de gelijke zijden. Vervolgens wordt de oppervlakte van een ruit berekend uit de twee diagonalen. Voor willekeurige vierhoeken wordt de benaderingsformule gebruikt die men reeds in oud-Egyptische documenten aantreft: produkt van de halve sommen der overstaande zijden.

Hoe men uit de zijde van een regelmatige veelhoek de oppervlakte berekent, vindt men in hoofdstuk 11. De regel wordt eerst toegepast op een 5-, 6-, 7- en 8-hoek en daarna veralgemeend voor een regelmatige n -hoek. De formule is:

$$A = \frac{1}{2} [(n-2)a^2 - (n-4)a]$$

Ze is alleen juist voor $n=4$. Voor een gelijkzijdige driehoek ($n=3$) gaat ze over in $A = \frac{1}{2}(a^2 + a)$, wat de regel is die in hoofdstuk 9 werd toegepast. De oorsprong van deze merkwaardige geometrische dwaling is te vinden in de Griekse theorie der polygonale getallen. Het a -de n -hoeksgetal p_n^a , wat men ook het n -hoeksgetal met zijde a kan noemen, is gelijk aan

$$\frac{1}{2} [(n-2)a^2 - (n-4)a].$$

Deze aritmetische eigenschap werd geometrisch vertaald en de waarde van p_n^a geïnterpreteerd als de oppervlakte van de regelmatige n -hoek met zijde a . Men treft dit reeds aan bij Epaphroditus,¹² en het werd o.m. door de auteur van 'Boethius' Geometrie II overgenomen.¹³

De hoofdstukken 12 en 13 handelen over "die metinghen der hoecke ghen dingen die niet gelijcsidich en sijn, met oock alderhande fygueren aengaende dlant meten, viuers, ende diergelijcke." Er wordt geleerd hoe men de

12. Cantor, *Die römischen Agrimensoren*, 210-212; Tannery, *Mémoires scientifiques*, dl. 5, 64-70.

13. Folkerts, 'Boethius' *Geometrie II*, 163-166.

oppervlakte kan vinden van onregelmatige veelhoeken en van veelhoekige landerijen, convexe in hoofdstuk 12, niet convexe in hoofdstuk 13. Ter inleiding worden de gebruikelijke landmaten vermeld en gewezen op het nodige instrumentarium: "Inden eerste moetti weten dat hondert roeden een dachwant es. Die vier dachwant een buender. Ende achtiën voeten een roede. Ghi moet oock hebben een recht vyercant cruyce op eenen stock staende ghelijck die lantmeters ende dit cruyce wordt gheheeten compas want het brinct alle dinghen int viercante." (f. E4r).

In hoofdstuk 14 wordt geleerd "ronde dinghen int viercante te bringhen, ende viercante int ronde." Het begint met het berekenen van de zijde van het vierkant dat gelijke oppervlakte heeft als een gegeven cirkel. Dan volgt het omgekeerde vraagstuk: de diameter vinden van een cirkel, waarvan de oppervlakte gegeven is. Hier weer toont de samensteller van *Die waerachtige const* zijn onkunde. Om de diameter te vinden van een cirkel met als oppervlakte 154 roeden, deelt hij eenvoudig 154 door 11; de uitkomst is 14, "dits die lingde vanden diameter." En hij voegt er aan toe: "Aldus doet van allen dierghelijcke." Door de keuze van de oppervlakte als $154 = 11 \times 14$ is 14 toevallig de juiste uitkomst (als men $\pi = 22/7$ neemt). In geen enkel ander geval echter levert de deling van de oppervlakte door 11 de diameter van de cirkel.

De rest van hoofdstuk 14 bevat regels voor het berekenen van de zijde van een regelmatige ingeschreven veelhoek uit de diameter van de cirkel, of omgekeerd de diameter van de in- of omgeschreven cirkel uit de zijde van de veelhoek. Voor de zijde a van de ingeschreven gelijkzijdige driehoek komt de regel neer op $a = \sqrt{d^2 - \frac{1}{3}d^2}$. Het omgekeerde vraagstuk, de diameter d berekenen uit de zijde a , verloopt volgens het volgende juiste maar wel zeer gecompliceerde voorschrift:

$$d^2 = \frac{1}{3} \left[\frac{4}{3}(a^2 - \frac{1}{4}a^2) - \frac{2}{3}(a^2 - \frac{1}{4}a^2) \right] \times 108.$$

De diameter van de cirkel beschreven in een gelijkzijdige driehoek vindt men volgens de formule $d = \sqrt{\frac{4}{3}(a^2 - \frac{1}{4}a^2)}$. Analoge opgaven in verband met een vierkant worden opgelost. Voor de zijde van de ingeschreven regelmatige vijfhoek wordt de foute formule $a = \sqrt{\frac{1}{3}d^2}$ gebruikt.

Voorbeelden van inhoudsberekening van kubus, bol, cilinder en driezijdige prisma vindt men in de hoofdstukken 15 tot 18, terwijl hoofdstuk 19 handelt over "die metinghe der berghen", waarmee bedoeld wordt het berekenen van de oppervlakte van berghellingen. De bergen zelf worden opgevat als afgeknotte kegels. Deze opgaven treft men reeds aan bij Epaphroditus¹⁴ en in 'Boethius' Geometrie II.¹⁵ Kapittel 20 over "die metinghe der bosschen" geeft enkele vraagstukken over verkaveling van landerijen.

Voor de man van de praktijk, de landmeter en de wijnroeier, zijn vooral de

14. Tannery, *Mémoires scientifiques*, dl. 5, 51-54.

15. Folkerts, 'Boethius' *Geometrie II*, 167-168.

laatste tien hoofdstukken van *Die waerachtige const der geometrien* van belang. Men vindt er de constructie en het gebruik van een aantal instrumenten. Het eerste is de wijnroede of visierstok (kap. 21 en 22), dienende voor het bepalen van de inhoud van vaten en tonnen. De oorsprong van dit meetinstrument is nog in het duister gehuld.¹⁶ Het ontstond vermoedelijk in Zuid-Duitsland of Oostenrijk in de loop van de 14e eeuw. Reeds voor het midden van de 15e eeuw was het ook in de Zuidelijke Nederlanden bekend en in gebruik. Het tweede instrument is de *baculus Jacob* of Jakobsstaf, ook *baculus geometricus* genoemd (kap. 23 tot 25). Het bestaat uit een gegradueerde stok waarop een dwarslat kan glijden. Het werd gebruikt bij astronomische waarnemingen, maar ook voor het bepalen van hoogten of breedten.

Het derde instrument (kap. 26 tot 28) is een "quadraet gheheeten Scala altimetria". Op een uit koper of hout gesneden vierkant is o.m. een cirkelkwadrant aangebracht, verdeeld in 90 gelijke delen. In zijn hoekpunt is een schietlood bevestigd. Dit instrument werd vooral gebruikt bij het bepalen van hoogten.

De hoogte van torens of andere gebouwen kan ook worden gevonden door de lengte van hun schaduw te vergelijken met de schaduw van een maatstok. Dit wordt verklaard in hoofdstuk 29. Het dertigste en laatste hoofdstuk leert hoe met twee bakenstokken, waarvan de ene dubbel zo lang is als de andere, kan gevonden worden "hoe menighen voet dat eenighen viver breet oft lanck es sonder int water oft iewers te gane."

Tot zover dit overzicht van wat in *Die waerachtige const der geometrien* wordt geleerd. In het werkje zelf zijn geen directe aanduidingen te vinden over de auteur noch over de wijze waarop het tot stand is gekomen. Toch kan men uit wat voorafgaat reeds een en ander afleiden:

1. *Die waerachtige const* is geen zelfstandig werk, maar een vertaling of compilatie samengesteld uit een of meer bronnen.
2. Deze bronnen zijn voor een belangrijk deel Latijnse. Dit blijkt uit het feit dat voor een groot deel van de gebruikte vaktermen alleen een Latijnse vorm voorkomt.
3. De vertaler of samensteller was geen bedreven mathematicus, wel integendeel.

Twee belangrijke vragen blijven echter onbeantwoord: uit welke bronnen is het werkje samengesteld en door wie? De tweede vraag is het gemakkelijkst te beantwoorden: rekening houdend met Van der Noots gewoonte werkjes te

16. P. Bockstaele, "De visierroede. Bibliografische bijdrage tot de geschiedenis van een oud meetinstrument" in: *Handelingen van het XLIIe Congres van de Federaties van de Kringen voor Oudheidkunde en Geschiedenis van België* (Mechelen, 1970) 526-537; M. Folkerts, "Die Entwicklung und Bedeutung der Visierkunst als Beispiel der praktischen Mathematik der frühen Neuzeit", *Humanismus und Technik* 18 (1974) 1-41.

drukken die hij zelf had vertaald, kan men met redelijke zekerheid aannemen dat hij ook de samensteller is van *Die waerachtige const der geometrien*. Moeilijker is het antwoord op de eerste vraag: welke bronnen heeft hij gebruikt? Tot de indirecte bronnen van *Die waerachtige const* behoren ongetwijfeld de geschriften van de Romeinse agrimensores, eventueel langs andere werken om, zoals de aan Boethius toegeschreven geometrieën. Als origineel kan een of ander handschrift hebben gediend, maar het is meer waarschijnlijk dat Van der Noot gebruik heeft gemaakt van gedrukte werken. Wat was voorhanden in 1513, afgezien van uitgaven van Euclides' *Elementen*, die als model voor *Die waerachtige const* niet in aanmerking komen? De 'Boethius' Geometrieën I en II verschenen voor het eerst in druk in 1492 bij Johannes en Gregorius de Gregoriis te Venetië als deel van de uitgave van Boethius' werken. In 1499 kwam er een tweede uitgave. Praktische geometrie treft men ook aan in Johannes Widmanns *Behende und hubsche Rechnung auff allen kauffmanschaft*, Leipzig 1489,¹⁷ en bij Luca Pacioli in zijn *Summa de arithmetica geometria proportioni et proportionalita* (Venetië, 1494). Een werk van uitgesproken didactische aard waarin ook de meetkunde aan bod komt, is de *Margarita philosophica* van de Duitse monnik Gregorius Reisch.¹⁸ Het werk verscheen voor het eerst in 1503 te Freiburg in Breisgau bij Johann Schott. Het had succes en kende voor 1513, het jaar waarin *Die waerachtige const* verscheen, reeds zes drukken. De tweede door de auteur verbeterde uitgave kwam reeds in maart 1504; een derde volgde in februari 1508 in Basel. Daarnaast zorgde de Straatsburger drukker Johannes Grüninger voor een aantal niet door de auteur geautoriseerde uitgaven, de eerste in februari 1504, daarna in 1508 en 1512. De *Margarita philosophica* is een soort encyclopedie, waarin men alles kan vinden wat werd onderwezen aan de artesfaculteit van de universiteiten. Deze "parel" van geleerdheid is opgesteld in de vorm van een dialoog tussen een discipulus die vragen stelt, en de magister die ze uitvoerig beantwoordt. Van de twaalf boeken waaruit het werk is samengesteld interesseert ons alleen boek 6: *De elementis geometriae*, dat verdeeld is in twee traktaten: het eerste over de *geometria speculativa*, het tweede over de *geometria practica*. De speculatieve geometrie vangt aan met beschouwingen over de definitie, de naam en de ontdekkers van de meetkunde, alsook over haar nut en betekenis (kap. 1). Dan worden achtereenvolgens behandeld (kap. 2-12):

17. Latere uitgaven, o.m. Pforzheim, bij Thomas Anzhelm in 1500 en 1508. Over Widmanns rekenboek zie: W. Kaunzner, *Über die Handschrift Clm 26639 der Bayerischen Staatsbibliothek München. Eine mögliche Quelle zu Widmanns deutschem Rechenbuch von 1489* (Hildesheim, 1978). Op p. 90-123 vindt men er in facsimile het geometrisch deel van Widmanns werkje.

18. R. von Srbik, "Die Margarita philosophica des Gregor Reisch († 1525). Ein Beitrag zur Geschichte der Naturwissenschaften in Deutschland", *Denkschriften der Akademie der Wissenschaften in Wien, Mathematisch-naturwissenschaftliche Klasse* 104 (1941) 83-205.

punt en lijn, de soorten rechte en kromme lijnen, hoeken, oppervlakken, de cirkel, driehoeken, vierhoeken, regelmatige veelhoeken en lichamen. De rest van dit traktaat (kap. 13-22) is een opsomming van theorema's over rechte lijnen, hoeken, driehoeken, vierhoeken, de cirkel, ingeschreven veelhoeken, bol en regelmatige veelvlakken. Het tweede traktaat over praktische geometrie begint met een uiteenzetting over maten en meten (kap. 1-3). Hierop volgt in kapittel 4 de beschrijving van twee instrumenten: het *quadratum geometricum* en de *baculus Jacob*. De rest (kap. 5-31) is gewijd aan het berekenen van de oppervlakte en de inhoud van de bol, de oppervlakte van bergen en aan enkele eenvoudige inhoudsberekeningen. In de Grüninger drukken van de *Margarita philosophica* vindt men nog een aantal appendices, o.a. over de beginselen van de architectuur, de constructie van geometrische kwadranten en van astrolabia, de kwadratuur van de cirkel, de cubatuur van de bol en de beginselen van de perspectief.

In deze opsomming herkent men tal van onderwerpen die we ook in *Die waerachtige const der geometrien* hebben ontmoet. Een nauwkeurige vergelijking maakt al vlug duidelijk dat Van der Noot bij het opstellen van zijn Geometrie zeer veel heeft ontleend aan Boek 6 van Reisch's *Margarita*. Dit betekent echter niet dat het er een trouwe vertaling van is. Veeleer is het te beschrijven als een sterk ingekorte bewerking, waarin de volgorde soms wordt gewijzigd en stukken uit andere bronnen worden ingelast. De dialoogvorm van de *Margarita* is verlaten en vele passages waarin de Magister eerder theoretische onderwerpen behandelt, zijn in het Nederlandse boekje niet terug te vinden. Dit is o.m. het geval voor de lange lijst theorema's uit Reisch's werk. Zeker is dat de *Margarita philosophica* Van der Noots belangrijkste inspiratiebron is geweest, echter niet de enige. Zo vertonen sommige delen van *Die waerachtige const* een opvallende gelijkenis met passages uit Johannes Widmanns *Behende und hubsche Rechnung auff allen kauffmanschaft*, zodat het niet onredelijk is aan te nemen dat ook dit werk werd gebruikt. Andere stukken schijnen noch aan Reisch, noch aan Widmann te zijn ontleend, o.m. de hoofdstukken 12 en 13 over het berekenen van de oppervlakte van willekeurige veelhoeken en de beschrijving van de visierroede, de Jakobsstaf en de scala altimetria. Een overzicht van wat Van der Noot heeft ontleend aan Reisch, Widmann of aan andere niet geïdentificeerde bronnen volgt hieronder. *Marg.* VI, 1 of 2 betekent: boek VI, tractaat 1 of 2 van de *Margarita philosophica*.

Die waerachtige const der geometrien

kap. 1 tot 7: bewerking van *Marg.* VI, 1, kap. 2-10;

kap. 8: bewerking van *Marg.* VI, 2, kap. 5-6;

kap. 9: ontleend aan Widmann;

kap. 10: grotendeels uit Widmann; enkele opgaven uit *Marg.* VI, 2, kap. 12 en 14;

kap. 11: uit *Marg.* VI, 2, kap. 18-21 en 24 of uit Widmann;

kap. 12-13: uit niet geïdentificeerde bronnen;

kap. 14: hoofdzakelijk uit Widmann;

kap. 15-18: afgezien van enkele fragmenten uit *Marg.* VI, 1, kap. 11 en VI, 2, kap. 25 en 28, hoofdzakelijk uit andere bronnen.

kap. 19: uit Widmann;

kap. 20 tot 30: uit niet geïdentificeerde bronnen.

Ter afronding nog iets over de wijze waarop Van der Noot zijn bronnen heeft vertaald en geïnterpreteerd. Een kritische bewerker met inzicht in wat hij neerschrijft kan men hem moeilijk noemen. Fouten en vergissingen neemt hij klakkeloos over. Hij begrijpt niet steeds wat hij leest, en levert dan een verwarde vertaling, zoals bij de berekening van de inhoud van een bol in hoofdstuk 16. Nog erger wordt het de enkele keren dat hij de juiste oplossing uit de *Margarita* vervangt door een totaal onbruikbare. Dit gebeurt o.m. bij de berekening van de hoogte van een gelijkzijdige driehoek en bij het bepalen van de diameter van een cirkel uit zijn oppervlakte. Laten we echter niet te streng oordelen, en bedenken dat bij de aanvang van de 16e eeuw, zelfs aan de universiteiten, de kennis van de meetkunde nog op een laag peil stond.

Hoe groot het succes is geweest van het allereerste gedrukte Nederlandse meetkundeboekje is moeilijk uit te maken. Allicht zal het de belangstelling voor deze om 1500 nog weinig beoefende wetenschap enigszins hebben gestimuleerd. Zeker is dat het jarenlang het enige Nederlandse handboekje voor praktische geometrie is gebleven. Een nieuwe druk bezorgde in 1547 de Antwerpse drukker Jan Roelants. De inhoud bleef onveranderd, maar de spelling werd aangepast en enkele evidente drukfouten werden verbeterd. Dank zij deze Antwerpse druk is *Die waerachtige const* tot ver in de tweede helft van de 16e eeuw in omloop gebleven. Dit blijkt o.a. uit een opmerking van Ludolf van Ceulen in de opdracht "Aende Konst-lievende Lesers" van zijn *Vanden circkel* (Delft, 1596). Hij wijst er op dat landmeters vaak fouten maken bij het berekenen van landerijen, dit als gevolg van verkeerde regels die ze in meetkundeboekjes aantreffen. Hij schrijft:

"In 't Jaer onses Heeren Christi gheboorte 1569 hebbe ick in der hoogh-loffelijcker Stadt Ceulen een Bouck become beschreven van Iacob Kobel,¹⁹ daer inne ick veel valsche Regulen ghevonden hebbe, welcke niet alleen van veel land-meters in Hooghduytslandt (sonder eenighe hier in dese Landen) hebben de selve Regulen ghebruyckt, ende voor goetd ghehouden. Tot Antwerpen voor 50 Jaren, ende daer naer in Vlaenderen zijn mede diergelijcke valsche ende bedriegelijcke Regulen in Boucken (tracterende van Geometria) gedruckt."

Duidelijk verwijst Van Ceulen in de laatste zin naar de tweede druk van *Die waerachtige const*. Dat hij dit boekje kende, blijkt ook uit zijn werk *De*

19. Jakob Köbel, *Geometrei, Von künstlichem Messen und absehen, allerhand höhe, fleche, ebene, weite und breyte, Als Thürm, Kirchen, bäw, baum, velder und äcker &c. mit künstlich zübereyten Iacob stab*, ... Frankfurt-a.M., Christian Egenolff, 1535. Dit werkje over landmeterij kende verschillende herdrukken, o.m. Frankfurt 1536, 1550, 1556, 1562. Zie: J. Benzing, *Jakob Köbel zu Oppenheim 1494-1533. Bibliographie seiner Drucke und Schriften* (Wiesbaden, 1962) 60, 70-73.

arithmetische en geometrische fondamenten (Leiden, 1615). Ook hierin waarschuwt hij voor allerlei valse regels en oplossingen die men aantreft in "boucken tracterende van Geometria." Hij geeft een aantal voorbeelden, waaronder het volgende ontleend aan hoofdstuk 9 van *Die waerachtige const*: "Daer is een gelijkzijdich Tryangel, doet elcke zijde 28 roeden, vrage naer syn groote." Hij noteert eerst de juiste oplossing en voegt er dan de volgende commentaar aan toe (p. 170):

"De voorgaende Reghel is in een Hoochduyts Bouck beschreven, ende dese vraghe met een ander Regel, welcke noch ongheschicte is, vinde ick in een ghedruct Bouck tot Antwerpen, int jaer onses Salichmakers 1547 ghedruct. Also, multipliceert een der zijde in haer selven, comt 784, hier toe addeert een zijde, als 28, comt 812, dese medieert (of divideert 812 door 2) comt 406 voor Area des tryangels, dit liëcht te veel om 66½ roeden."

Als besluit kunnen we stellen dat Van der Noots meetkundeboekje, niet-tegenstaande het vele "ongheschicte" dat er in voorkomt, toch vele jaren in omloop is gebleven. Uit wat Van Ceulen schrijft blijkt bovendien dat *Die waerachtige const* in het leren van "valsche ende bedriegelijcke Regulen" niet alleen stond. Het weerspiegelt de gebrekkige meetkundige kennis van landmeters en wijnroeijs uit de eerste helft van de 16e eeuw en mag niet strenger worden beoordeeld dan andere werkjes over praktische geometrie die rond die tijd verschenen in Duitsland en elders.

SUMMARY

*The oldest known printed book on geometry in Dutch:
'Die waerachtige const der geometrien' (1513)*

In 1513 an anonymous work was issued from the press of Thomas van der Noot in Brussels, entitled *Die waerachtige const der geometrien* (The true art of geometry). So far as known this is the first book in Dutch on geometry to appear in print. It is a practical treatise in the tradition of the Roman agrimensores, and intended for surveyors and gaugers. On account of Van der Noot's practice to print books translated by himself in Dutch, we can take for granted that he was also the compiler of *Die waerachtige const*. From a close examination of the text appears that his main source was book VI, *De elementis geometriae*, of Gregor Reisch's *Margarita philosophica*. Probably he used also Johann Widmann's *Behende und hubsche Rechnung auff allen kauffmanschaft*, besides other sources. A second edition of *Die waerachtige const* appeared in Antwerp by Jan Roelants in 1547.