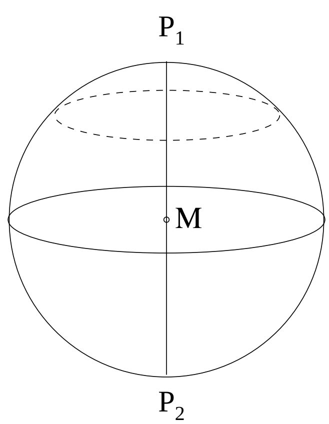
5 Bolmeetkunde

5.1 Inleiding

Dit hoofdstuk heeft de vorm van een doe-het-zelf cursus bolmeetkunde. In het begin ligt de nadruk op het afleiden van de formules, later ook op het gebruik ervan. Als bijlage is een overzicht van de formules van de boldriehoeksmeting toegevoegd.

5.2 Grondbegrippen

We beginnen met enkele inleidende opmerkingen. We zullen deze niet bewijzen, maar de lezer kan dit gemakkelijk zelf doen door uitschrijven in coördinaten e.d. We bekijken een bol met middelpunt M. Als een vlak deze bol snijdt, is de snijfiguur een cirkel. Omgekeerd is elke cirkel op de bol de snijfiguur van die bol en een vlak. Als het vlak door M gaat heet deze cirkel grootcirkel,[1] anders kleine cirkel. De loodlijn door M op het vlak van een cirkel snijdt de bol in twee punten, die de polen van die cirkel heten. Elke cirkel op de bol heeft twee polen. Elk punt op de bol is pool van één grootcirkel en van oneindig veel kleine cirkels.



Bol met middelpunt M, grootcirkel, hieraan evenwijdige kleine cirkel (gestippeld), en de twee polen P_1, P_2 van de grootcirkel en de kleine cirkel.

[1] waarschijnlijk een Germanisme, van Großkreis.

De hoek tussen twee cirkels op de bol is per definitie de hoek tussen de raaklijnen aan die twee cirkels in een snijpunt. De hoek tussen twee cirkelbogen is per definitie de hoek tussen twee raaklijnen aan die cirkelbogen in een gemeenschappelijk punt. (Met deze definitie is de hoek tussen twee cirkels altijd $\leq 90^o$, de hoek tussen twee cirkelbogen altijd $\leq 180^o$).

De hoofdschotel van dit hoofdstuk bestaat uit een aantal standaardmethoden voor de berekening van bogen op de bol met toepassingen. We beginnen met een paar oefeningen voor het voorstellingsvermogen. Het afsluitende hoofdstukje geeft nog wat theorie die tijdens de berekeningen zal worden uitgesteld.

Opgave 5.1. We veronderstellen dat de aarde een volmaakte bol is. (Dat is zij niet; waarom niet?) We voorzien deze bol van het bekende netwerk van meridianen en parallellen. Welke hiervan zijn grootcirkels, welke kleine cirkels? Waar liggen de polen van al deze cirkels? $*$

Opgave 5.2. Kies twee punten op een bol. Hoeveel kleine cirkels gaan er door die punten? Hoeveel grote cirkels? Bewijs je antwoord. Wat gebeurt er als de twee punten diametraal tegenover elkaar liggen? $*$

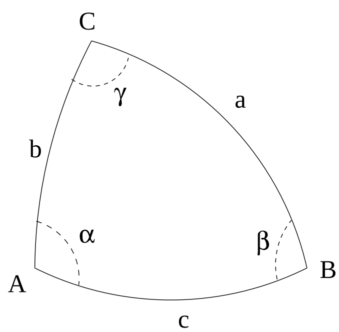
Opgave 5.3. Teken uit de hand een bol met middelpunt M en daarop een grootcirkel $\mathcal{C}_1$ en de beide polen P, P' daarvan. Teken ook een tweede grootcirkel $\mathcal{C}_2$ die de eerste grootcirkel snijdt. In hoeveel punten snijden die twee cirkels elkaar? Waar liggen die snijpunten ten opzichte van punt M? Teken ook de polen Q, Q' van $\mathcal{C}_2$. $*$

Opgave 5.4. Bewijs dat de hoek tussen twee grootcirkels $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$ gelijk is aan de hoek tussen de vlakken V_1, V_2 waarin die grootcirkels liggen. (Hint: trek door M in V_1 en V_2 loodlijnen op de snijlijn van V_1 met V_2.) Opmerking: Deze mooie eigenschap zorgt er voor dat grootcirkels veel fraaiere wiskundige eigenschappen hebben dan kleine cirkels. $*$

Opgave 5.5. Kies twee vaste punten P_1, P_2 op een bol, niet diametraal tegen over elkaar. We kunnen op verschillende manieren van P_1 naar P_2 wandelen via een cirkelboog. Welke manier is de kortste, welke de langste? Vind eerst een vermoeden en probeer dit dan te bewijzen. $*$

5.3 De boldriehoek

Door elke twee punten op de bol gaat precies één grootcirkel, als die punten niet diametraal tegenover elkaar liggen. We kunnen die punten daarom op precies één manier verbinden met een boog van een grootcirkel van lengte $< 180^o$. (Het kan ook op precies één manier met een grootcirkelboog $> 180^o$.) Kiezen we drie punten A, B, C op de bol, waarvan er geen twee diametraal tegenover elkaar liggen, dan kunnen we die drie punten op precies één manier verbinden met grootcirkelbogen[2] van minder dan 180^o. Een figuur die we op die manier krijgen heet een boldriehoek. Bij elk drietal punten A, B, C op een bol waarvan er geen twee diametraal tegenover elkaar liggen hoort dus precies één boldriehoek.



We gebruiken de standaardnotaties: $a =$ boog BC, $b =$ boog AC, $c =$ boog AB, $\alpha = \angle BAC$, $\beta = \angle ABC$, $\gamma = \angle BCA$. Hoek BAC zien we dan als hoek tussen de twee halve rechten die in punt A raken aan boog AB en aan boog AC. Op die manier heeft elke boldriehoek drie zijden a, b, c met $0 < a, b, c < \pi$ en drie hoeken α, β, γ met $0 < \alpha, \beta, \gamma < \pi$.

Boldriehoeken hebben de prettige eigenschap, dat als drie van de elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \}$ bekend zijn, de overige drie op redelijk eenvoudige manier berekend kunnen worden (soms zijn er twee mogelijkheden). We zullen de rest van dit hoofdstuk besteden aan een ontdekkingstocht door de diverse aspecten van dit probleem. Wij kiezen een aanschouwelijke aanpak.

Opgave 5.6. Wat herinner je je van dit probleem voor vlakke driehoeken? (Een vlakke driehoek heeft ook zes elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \}$, hoe hangen die samen? *

[2]Duits: Großkreisbogen.

5.4 De rechthoekige boldriehoek

We onderzoeken eerst het geval $\gamma = \frac{\pi}{2}$.

Teken een boldriehoek ABC *met* $\gamma = 90^o$ *en teken in de figuur ook punt* M *en de lijnen* MA, MB, MC. *Om de voorstelling wat te hulp te komen knutselen we deze boldriehoek* ABC *ook van papier in elkaar.* $\diamondsuit$

*Het werkblad aan het eind van dit hoofdstuk (***5. 11***) knippen we uit (eerst kopiëren als je het diktaat heel wilt laten!) langs de cirkel en langs de rechten* MB_1 *en* MB_2*, en we vouwen langs* MC *en* MA *eerst naar achteren, en dan naar voren. Door nu* MB_1 *en* MB_2 *tegen elkaar te houden krijgen we een boldriehoek* ABC *met* $B = B_1 = B_2$*. (Het is de bedoeling dat je dat zo doet dat de letters* A, C *enz. aan de binnenkant zitten. NB: niet vastplakken!) Wijs in dit model de zes elementen* $a, b, c, \alpha, \beta, \gamma$ *aan.*

De bogen a, b, c *zijn zo gekozen dat nu precies geldt* $\gamma = 90^o$ *(We zullen zometeen zien hoe je bij gegeven* a *en* b *boog* c *moet kiezen om dat voor elkaar te krijgen).* $\diamondsuit$

Kies nu een punt E *ergens op lijn* MB*. !n ons knutselmodel geef je dit punt aan met* E_1 *op lijn* MB_1 *en met* E_2 *op lijn* MB_2 *(natuurlijk* $ME_1 = ME_2$*, kies die punten niet te ver van* B_1 *en* B_2 *maar ook niet te dichtbij). Trek uit* E *in vlak* MBC *nu een loodlijn* EF *op* MC*. Uit het punt* F *op* MC *trek je in vlak* MCA *een loodlijn* FD *op* MA*. Trek in vlak* MAB *lijn* DE*. Doe dit alles ook in het knutselmodel (je moet dus* D *met* E_2 *verbinden).*

Valt je iets op (in het model in uitgevouwen situatie)? Wat betekent dit eventueel voor de 'echte' boldriehoek?

Bewijs nu: EF *staat loodrecht op* FD*, en* ED *staat loodrecht op* MA*. (Hint: als een lijn* ℓ *loodrecht staat op twee lijnen* m *en* n *in een vlak, dan staat* ℓ *loodrecht op alle andere lijnen in dat vlak.)*

Hoek α *is de hoek tussen de twee bogen* BA *en* AC*, en omdat dit grootcirkels zijn is* α *nu ook de hoek tussen de twee halfvlakkcn* BAM *en* CAM*. Dus* $\alpha = \angle EDF$ *(Je mag nu in de knutselfiguur* MB_1 *aan* MB_2 *vastplakken, met sellotape o.i.d.)* $\diamondsuit$

Nu kun je proberen allerlei formules af te leiden uit de volgende feiten:

$$\sin\alpha = \frac{EF}{ED}, \cos\alpha = \frac{FD}{ED}, \tan\alpha = \frac{EF}{FD}, \sin a = \frac{EF}{EM}, \cos a = \frac{FM}{EM}, \tan a = \frac{EF}{FM}.$$

en soortgelijke formules voor b *en* c*.*

Opgave 5.7. Leid nu minstens één formule af, die een verband legt tussen drie van de getallen a, b, c, α, β. *

Van de zes elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \}$ van onze boldriehoek is $\gamma = \frac{\pi}{2}$; er zijn nog 5 elementen over. Uit elk paar hiervan zou je alle andere willen afleiden met een formule.

Opgave 5.8. Probeer nu zoveel mogelijk van deze formules te vinden met behulp van de figuur; of door substitutie (bijvoorbeeld als je een formule voor a, b, α hebt, geldt dezelfde formule natuurlijk ook voor b, a, β; of door handige combinatie (bijv. met elkaar vermenigvuldigen, of delen) van voorgaande formules. Probeer alle 10 formules te vinden, één formule voor elk drietal elementen uit de verzameling $\{ a, b, c, \alpha, \beta \}$. (In welke zin zijn dat alle formules?) *

Opgave 5.9. Ga na wat je uit deze formules krijgt door het nemen van limieten, wanneer de driehoek heel klein wordt, dwz $a, b, c \to 0$, waarbij $\gamma = \frac{\pi}{2}$ blijft, en α, β naar constante waarden gaan ongelijk aan 0). Kende je deze formules al? Vind hieruit minstens 3 ezelsbruggetjes om de formules voor de rechthoekige boldriehoek te onthouden. *

5.5 De willekeurige boldriehoek

We bekijken nu de willekeurige boldriehoek met elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma\}$. Deze is in het algemeen bepaald door drie van deze elementen, die op 15 manieren uit deze zes gekozen kunnen worden. De drie andere moeten hier in deze 15 gevallen uit worden afgeleid, en we krijgen dus een behoorlijke formulewinkel.

Een aanschouwelijke manier om een paar van deze formules af te leiden is de volgende:

Gegeven een willekeurige boldriehoek ABC. We trekken door A een grootcirkel loodrecht op BC, die deze boog (of het verlengde ervan) in punt P snijdt. Stel h = boog AP (teken de figuur zelf).

We hebben dan bijvoorbeeld: $\sin\beta = \frac{\sin h}{\sin c}$ en $\sin\gamma = \frac{\sin h}{\sin b}$ zodat $\sin\beta \cdot \sin c = \sin\gamma \cdot \sin b$. en dus $\frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}$. Natuurlijk geldt hezelfde ook voor bijv. a, α, c, γ, zodat (**Sinusregel**)

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma}.$$

We veronderstellen nu even dat de hoeken β en γ beide scherp zijn. Dan valt punt P tussen de punten B en C. Schrijf nu $p =$ boog PC, q=boog PB. Dan is $a = p+q$, en $\cos q = \cos(a-p) = \cos a \cos p + \sin a \sin p$. Verder hebben we uit de formules voor de rechthoekige boldriehoek: $\cos b = \cos h \cdot \cos p$ en $\cos c = \cos h \cdot \cos q$, zodat $\frac{\cos q}{\cos p} = \frac{\cos b}{\cos c}$.

Delen en invullen van $\cos q$ levert $\frac{\cos c}{\cos b} = \cos a + \sin a \tan p$.

Nu herinneren we ons dat voor rechthoekige boldriehoeken geldt $\cos \gamma = \frac{\tan p}{\tan b}$. Dit gebruiken we om de $\tan p$ te verdrijven. We vermenigvuldingen nu alles met $\cos b$ en krijgen tenslotte (**Cosinusregel**):

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Opmerkingen:

Voor bijvoorbeeld β stomp en γ scherp, en ook voor γ stomp en β scherp, is de formule nog steeds juist, zoals men gemakkelijk nagaat. Voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$ krijgen we de cosinusregel voor de rechthoekige boldriehoek.

Opgave 5.10. Laat zien dat je door limietovergang (denk aan heel kleine driehoekjes, dus $a, b, c \to 0$, γ constant,) hieruit de cosinusregel voor een vlakke driehoek krijgt, en voor $\gamma = \frac{\pi}{2}$ door Taylorontwikkeling de stelling van Pythagoras. *

Tenslotte kan er ook een tangensregel worden afgeleid: We hebben $\tan \beta = \frac{\tan h}{\sin q}$ en $\tan \gamma = \frac{\tan h}{\sin p}$. Hieruit krijgen we op een soortgelijke manier als boven eerst $\frac{\tan \gamma}{\tan \beta} = \frac{\sin(a-p)}{\sin p} = \frac{\sin a}{\tan p} - \cos a$. Nu vullen we in $\tan p = \cos \gamma \tan b$ in de rechthoekige boldriehoek ACP. Vermenigvuldig daarna alles met $\cos \gamma$, hieruit volgt (**Tangens-regel**):

$$\frac{\sin \gamma}{\tan \beta} = \frac{\sin a}{\tan b} - \cos a \cos \gamma.$$

Hiermee kunnen alle benodigde formules worden afgeleid, gebruik makende van de volgende principes:

- Triviale substituties. Dit is hierboven al toegepast bij de sinusregel. We vonden daar een formule voor b, β, c, γ. Natuurlijk mogen we (b, β) met (a, α) verwisselen, want dit betekent alleen dat we de notatie veranderen. Dus krijgen we dezelfde formule voor a, α, c, γ. Enzovoort. Algemeen kunnen we dus de zijden (a, b, c) permuteren en de hoeken (α, β, γ) op dezelfde manier.

- Pooldriehoek. In paragraaf 5.7 zal het volgende worden aangetoond. Als er een boldriehoek is met elementen $\{ a, b, c, \alpha, \beta, \gamma \}$, dan is er ook een boldriehoek met elementen $\{ \pi - \alpha, \pi - \beta, \pi - \gamma, \pi - a, \pi - b, \pi - c \}$. De hoeken van de pooldriehoek zijn dus 180^o minus de zijden van de boldriehoek zelf, en omgekeerd.

  Dit is een vreemd principe, dat niet lijkt op iets wat in de "gewone" Euclidische vlakke meetkunde geldt.

  Je kunt daarom in een ware formule invullen $a = \pi - \alpha'$, $b = \pi - \beta'$, $c = \pi - \gamma'$, $\alpha = \pi - a'$, $\beta = \pi - b'$, $\gamma = \pi - c'$ en je krijgt dan opnieuw een ware formule als je alle accenten weglaat.

  (Opmerking: Dit principe is bij een rechthoekige boldriehoek niet bruikbaar, waarom niet?)

5.6 Opgaven over willekeurige boldriehoeken

Opgave 5.11. [Vluchtroutes] De kortste afstand tussen twee punten op de aardbol is langs de grootcirkel tussen die twee punten (vergelijk opgave 5.5). Als je de geografische coördinaten van die punten weet, kun je de kortste afstand en een aantal andere gegevens berekenen. We doen dit twee keer, eerst voor Schiphol ($\lambda = 4^o48'$ O.L., $\beta = 52^o18'$ N.B.) en New York, John F. Kennedy Airport ($\lambda = 73^o47'$ W.L., $\beta = 40^o38'$ N.B.). Let op, de ene heeft Oosterlengte en de tweede Westerlengte! *

a. Bereken de lengte van de boog tussen Schiphol en New York JFK langs de grootcirkel; en hieruit de vliegafstand in kilometers tussen die twee plaatsen (neem de aardomtrek als 40.000 km aan).

b. Bereken nu, in graden nauwkeurig, welke richting het vliegtuig moet volgen zodra het in Schiphol is opgestegen. Zou je dit verwachten? (Merk op dat New York op dezelfde breedte ligt als midden Italië.)

c. Bereken nu de geografische coördinaten van het meest Noordelijke punt van de vlucht route. (Hint: trek een grootcirkelboog uit de Noordpool loodrecht op de grootcirkelboog van Schiphol naar New York JFK. Waarom weet je zeker dat die boog de grootcirkel tussen Schiphol en New York snijdt?) Zoek dit meest noordelijke punt op de kaart op. Welke grote stad (van meer dan 100.000 inwoners) ligt hier het dichtste bij? Schat de minimale afstand tussen deze stad en de kortste vluchtroute Schiphol-New York. Heeft dit een maatschappelijke toepassing?

We bekijken nu al deze zaken (afstand, Noordelijkste punt) voor Schiphol en Vancouver ($\lambda = 123^o06'$ W.L., $\beta = 49^o10'$ N.B.), een grote stad aan de Canadese westkust. Schat eerst de afstand vanuit je intuïtie, voordat je aan de berekeningen begint. Bereken nu de afstand langs de grootcirkel en de geografische coördinaten van het Noordelijkste punt van de route. Zoek dit punt op de kaart op. Welke twee eilanden liggen hier liet dichtste bij? (Je hoeft geen minimale afstanden te schatten en geen grote plaatsen aan te geven, die zijn er niet in dat gebied). Schat nu ook de afstand als je van Schiphol in de Oost-Westrichting naar Vancouver vliegt, neem daarbij aan dat Schiphol en Vancouver allebei op ongeveer 50^o Noorderbreedte liggen. Zo krijg je een idee wat de route langs de grootcirkel bespaart.

Opgave 5.12. [Mekka] Gegeven de geografische coördinaten van Utrecht ($\lambda = 5^o7'$ O.L., $\beta = 52^o6'$ N.B.), en Mekka ($\lambda = 39^o49'$ O.L., $\beta = 21^o26'$ N.B.). De Moslims moeten in de richting van Mekka bidden. Bereken welke richting dit is vanuit Utrecht, in graden nauwkeurig. *

5.7 Pooldriehoeken

Opgave 5.13. Noem in de figuur van opgave 5.3 S en S' de snijpunten van de twee cirkels $\mathcal{C}_1$ en $\mathcal{C}_2$. Stel dat die cirkels een hoek α maken. *

Punten S en S' zijn natuurlijk polen van een cirkel $\mathcal{C}_3$. Welk verband vermoed je tussen $\mathcal{C}_3$ en de punten P, P', Q, Q'? Welk verband vermoed je tussen α en de bogen tussen bijvoorbeeld P en Q? Kun je deze verbanden beredeneren?

Aan de hand van deze opgave zal de lezer weinig moeite hebben met de nog ontbrekende theorie van pooldriehoeken, die nodig is om de formulewinkels in het geval van de willekeurige boldriehoeken binnen de perken te houden.

Bij een gegeven boldriehoek zal de pooldriehoek op één of andere manier moeten worden samengesteld uit de polen van de zijden van de boldriehoek. Nu is er het probleem dat elke grootcirkel twee polen heeft, en je krijgt dus bij een gegeven boldriehoek ABC 8 punten waaruit je in elk geval een aantal mogelijke pooldriehoeken $A'B'C'$ zou kunnen kiezen. Er zijn diverse methoden om deze moeilijkheden te overwinnen, wij kiezen een laag bij de grondse.

We beginnen met de boldriehoek ABC, en we concentreren ons eerst op zijde AB. Deze verdeelt de bol in twee helften, en op precies één van die helften ligt punt C. We noemen nu C' de pool van zijde AB die op dezelfde helft ligt als C. Evenzo wordt A' de pool van BC die aan dezelfde kant van cirkel BC ligt als A, en B' wordt de pool van AC die aan dezelfde kant van cirkel AC ligt als B.

Definitie 5.1 [pooldriehoek]. Driehoek $A'B'C'$ heet de pooldriehoek van driehoek ABC. We geven de elementen van de pooldriehoek aan door accenten (dus $a' = B'C'$, $\alpha' = \angle B'A'C'$, enz.)

Wat zou de pooldriehoek van $A'B'C'$ zijn? Om deze vraag te beantwoorden merken we op, dat elk van de punten A', B' en C' door drie eigenschappen uniek bepaald is, te weten

$$\begin{array}{lll} BA' = 90^o & CA' = 90^o & AA' < 90^o \\ CB' = 90^o & AB' = 90^o & BB' < 90^o \\ AC' = 90^o & BC' = 90^o & CC' < 90^o. \end{array}$$

Dit kunnen we als volgt anders rangschikken:

$$\begin{array}{lll} B'A = 90^o & C'A = 90^o & A'A < 90^o \\ C'B = 90^o & A'B = 90^o & B'B < 90^o \\ A'C = 90^o & B'C = 90^o & C"C < 90^o. \end{array}$$

Conclusie: de pooldriehoek van $A'B'C'$ is weer ABC.

Bekijk nu de oorspronkelijke driehoek ABC, en verbind punt A met het middelpunt M van de bol. We bekijken vlak MAB met lijn MC', die loodrecht staat op dat vlak. Als we vlak MAB samen met lijn MC' over een hoek $\alpha = \angle BAC$ om de as MA roteren, dan komt vlak MAB op vlak MAC terecht, en lijn MC' komt op een lijn MD' terecht, zodat $\angle C'MD' = \alpha$. Lijn MD' staat loodrecht op vlak MAC. Zou D' nu de pool zijn van zijde AC van boldriehoek ABC?

Antwoord: nee, want B en D' liggen aan verschillende kanten van grootcirkel AC. Daarom ligt B' diametraal tegenover D', met als gevolg dat $a' = C'B' = \pi - \alpha$.

We concluderen nu ook $c' = \pi - \gamma$, $b' = \pi - \beta$.

Evenzo $a = a'' = \pi - \alpha'$, $b = b'' = \pi - \beta'$, $c = c'' = \pi - \gamma'$.

We hebben in dit hoofdstuk maar een zeer klein deel van de bolmeetkunde behandeld. Meer informatie is te vinden in de boeken in de literatuurlijst. Nog één slotopmerking: in de vlakke meetkunde hebben we $\alpha + \beta + \gamma = \pi$ voor elke driehoek, in de bolmeetkunde niet. Daar geldt het volgende merkwaardige resultaat, als we de hoeken in radialen meten:

$\alpha + \beta + \gamma - \pi = \frac{O}{R^2}$ waarin O de oppervlakte van de boldriehoek ABC is en R de straal van de bol.

Opgave 5.14. Dit kun je zelf bewijzen door de grootcirkels die de zijden van boldriehoek ABC zijn te verlengen. Zo ontstaan er een aantal boltweehoeken. Een boltweehoek met hoek α heeft oppervlakte $\alpha \cdot 2R^2$. Je moet nu de bol zien te overdekken met een aantal tweehoeken (waarvan je de oppervlakte weet) plus of min een aantal keer de oppervlakte van boldriehoek ABC. Literatuur: Molenbroek. $*$

5.8 De formules van de boldriehoeksmeting

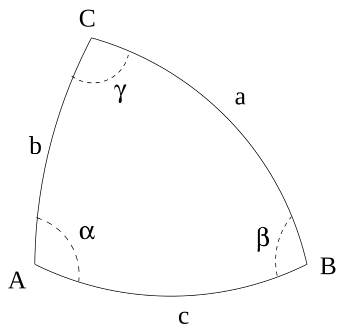
In de bijlage bij dit hoofdstuk is een lijst formules van de boldriehoeksmeting opgenomen. De volgende opgaven hebben de bedoeling de structuur en de bruikbaarheid van die formules te illustreren.

Opgave 5.15. Welke formules leggen een verband tussen vier (van de zes) elementen van een boldriehoek? Zo'n formule kan gebruikt worden, om een der elementen te berekenen als de andere drie gegeven zijn. Ga na welke formules geschikt zijn om op die manier a te berekenen. Idem voor α. Komen alle mogelijke combinaties van drie gegeven elementen voor? $*$

Opgave 5.16. Er komen ook formules voor in de lijst die een relatie geven tussen vijf elementen. Welke zijn dat? Zo'n formule kan niet gebruikt worden om een element uit drie gegeven elementen te bepalen. Bedenk hoe en waarvoor zulke formules wel gebruikt kunnen worden. $*$

Opgave 5.17. Zelfde vraag voor formules die relaties geven tussen zes elementen. $*$

5.9: Formules



5.9.1 Formules voor een rechthoekige boldriehoek

In een rechthoekige boldriehoek met c als hypotenusa ($\gamma = \frac{\pi}{2}$) gelden de volgende formules.

$$\begin{array}{ll}
\cos c = \cos a \cos b & \\
\cos c = \cot \alpha \cot \beta & \frac{\pi}{2} < \alpha + \beta < \frac{3\pi}{2} \\
\cos \alpha = \cos a \sin \beta & -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2} \\
\cos \beta = \cos b \sin \alpha & -\frac{\pi}{2} < \alpha - \beta < \frac{\pi}{2}
\end{array}$$

$$\sin \alpha = \frac{\sin a}{\sin c}, \quad \sin \beta = \frac{\sin b}{\sin c}, \quad \sin a, \sin b \leq \sin c$$

$$\cos \alpha = \frac{\tan b}{\tan c}, \quad \cos \beta = \frac{\tan a}{\tan c},$$

$$\tan \alpha = \frac{\tan a}{\sin b}, \quad \tan \beta = \frac{\tan b}{\sin a}$$

5.9.2 Formules voor een willekeurige boldriehoek

In een willekeurige boldriehoek gelden de volgende algemene formules. Uiteraard kunnen vanwege symmetrieoverwegingen in alle formules a, b en c verwisseld worden, mits α, β en γ op overeenkomstige manier worden verwisseld.

a. Sinusregel: $\sin a : \sin b : \sin c = \sin\alpha : \sin\beta : \sin\gamma$.

   Zijde-cosinusregel: $\cos a = \cos b \cdot \cos c + \sin b \cdot sinc \cdot \cos\alpha$.

   Hoek-cosinusregel: $\cos\alpha = -\cos\beta \cdot \cos\gamma + \sin\beta \cdot \sin\gamma \cdot \cos\alpha$.

b. hoogteformule: $\sin a \cdot \sin\beta = sinb \cdot \sin\alpha = \sin h_c$.

c. $\sin a \cdot \cos\beta = \cos b \cdot \sin c - \sin b \cdot \cos c \cdot \cos\alpha$

   $\sin\alpha \cdot \cos b = \cos\beta \cdot \sin\gamma + \sin\beta \cdot \cos\gamma \cdot \cos a$

d. De vergelijkingen van Delambre en Gauss:

$$\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b+c}{2} = \sin\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cos\frac{a}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}$$
$$\cos\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2} = \sin\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$
$$\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2} = \cos\frac{a}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2}$$

e. De vergelijkingen van Napier

$$\tan\frac{b+c}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2} = \tan\frac{a}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{b+c}{2} = \cot\frac{\alpha}{2}\cos\frac{b-c}{2}$$

$$\tan\frac{b-c}{2}\sin\frac{\beta+\gamma}{2} = \tan\frac{a}{2}\sin\frac{\beta-\gamma}{2}$$

$$\tan\frac{\beta-\gamma}{2}\sin\frac{b+c}{2}=\cot\frac{\alpha}{2}\sin\frac{b-c}{2}$$

f. De oppervlakte Δ van de boldriehoek wordt gegeven door $\Delta = R^2(\alpha + \beta + \gamma - \pi)$.

5.10 Literatuurlijst

C. von Braunmühl, *Vorlesungen über Geschichte der Trigonometrie,* 2 vols, 1900,1903. Nachdruck in einem Band, Niederwalluf: Sandig, 1971.

Heinrich Dörrie, *Ebene und sphärische Trigonometrie*, München: Oldenbourg, 1950.

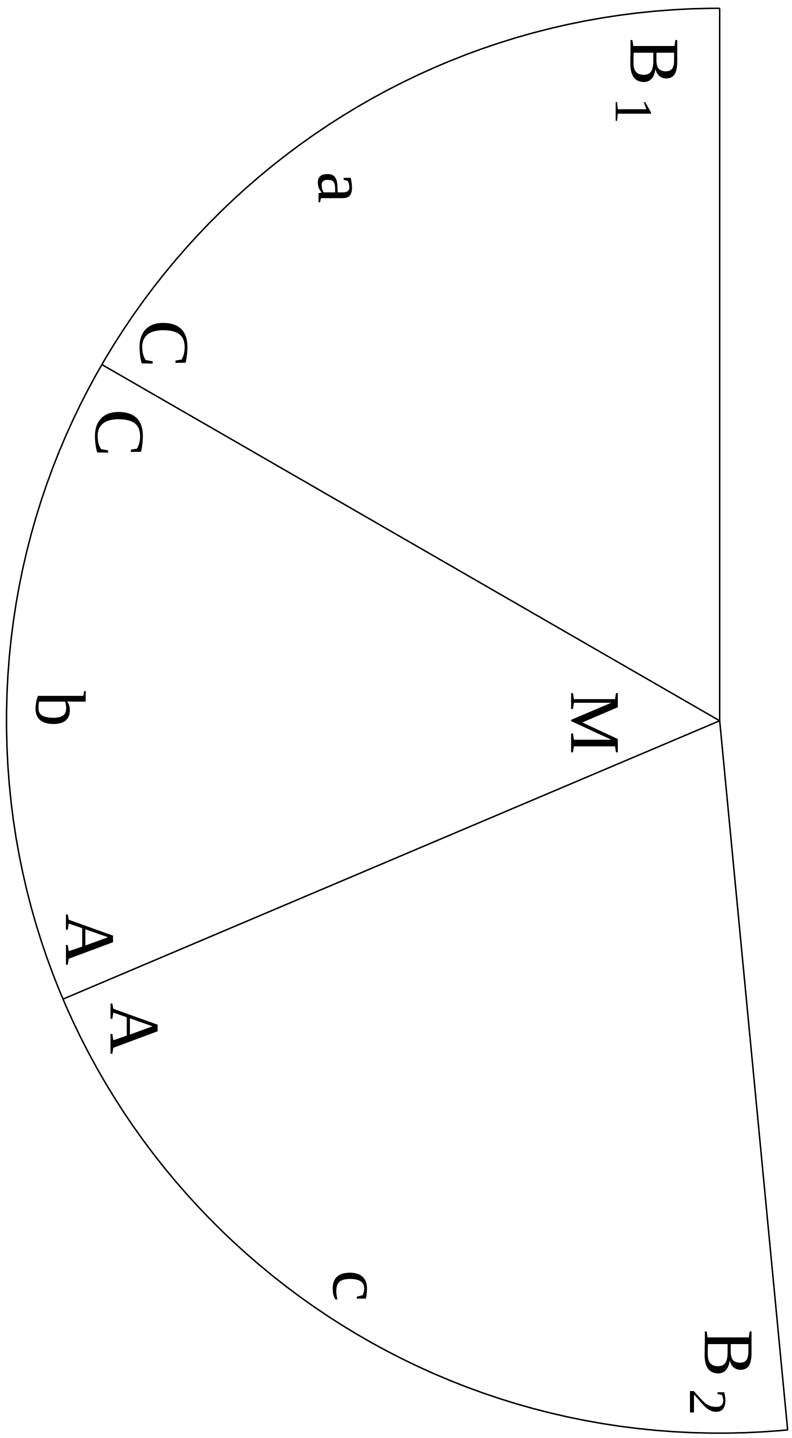
J.P.Hogendijk, Middeleeuws Islamitische methoden voor het vinden van de richting van Mekka, *Nieuwe Wiskrant* (juni 1993), pp. 45-52.

Kuno Fladt, *Elementargeometrie, 3. Teil. Der Stoff der Obersekunda und Prima* (Darstellende Geometrie, Trigonometrie und analytische Geometrie). Leipzig und Berlin: Teubner, 1931. [zie blz. 97-137. Sehr gründlich.]

P. Molenbroek, *Leerboek der stereometrie.* Groningen-Batavia: Noordhoff, 1946. [zie blz. 56-64, 264-291]

W.M. Smart, *Textbook on spherical astronomy, sixth edition* Cambridge: Cambridge University Press, 1977 [zie pp. 1-24, toepassingen ook daarna].

5.11 Werkblad


B_1
a
C
C
b
M
A
A
c
B_2