Ludolph van Ceulen en zijn boek *Vanden circkel*: schermutselingen rond het getal π

De eerste Nederlandstalige wiskundeboeken verschenen kort na 1500. In het begin waren het vooral praktijkgerichte boekjes, geschreven door rekenmeesters en landmeters, zoals die ook in de ons omringende landen verschenen. Na de stichting van de Leidse universiteit in 1575 werden de Noordelijke Nederlanden een belangrijk gebied voor de ontwikkeling van wiskundige theorie. Vanaf 1585 begon Simon Stevin met het publiceren van wetenschappelijke literatuur in het Nederlands, zodat de inhoud toegankelijk werd voor lezers die geen Latijn kenden. Zijn voorbeeld werd door velen gevolgd en er ontstond een uitwisseling van kennis tussen geleerden aan de universiteit enerzijds en praktisch georiënteerde rekenmeesters en landmeters anderzijds. Prins Maurits stichtte in 1600 zelfs een Nederlandstalige wiskundeopleiding voor ingenieurs aan de Leidse universiteit. Eén van de docenten aan deze opleiding was Ludolph van Ceulen, die zelf geen academische opleiding had gehad. Zijn boek *Vanden circkel* is een van de bijzondere Nederlandstalige werken met echt nieuwe wiskunde die tussen 1580 en 1660 verschenen.

Van Ceulen werd in 1540 geboren te Hildesheim in Duitsland. Hij vestigde zich als rekenmeester en schermleraar in de Nederlanden en woonde tussen 1578 en 1593 in Delft en daarna in Leiden. Ook na zijn benoeming aan de universiteit bleef hij zijn schermschool aanhouden, om in het onderhoud te voorzien van zijn tweede vrouw en de in totaal dertien kinderen in zijn huisgezin. Hij stierf in 1610.

De kwadratuur van de cirkel

Het begin van *Vanden circkel* gaat over het beroemdste onopgeloste wiskundige probleem uit de Griekse oudheid, de kwadratuur van de cirkel. Dit probleem komt neer op het bepalen van de precieze verhouding $\pi = 3{,}14159\ldots$ tussen cirkelomtrek en middellijn. In de derde eeuw voor Christus had Archimedes aangetoond dat π ligt tussen $3\ {}^{10}/_{71} = 3{,}1408\ldots$ en $3\ {}^{1}/_{7} = 3{,}1429\ldots$ In de 16de eeuw hebben velen geprobeerd π precies uit te rekenen, en zo hun naam te verbinden aan de definitieve oplossing van het beroemde probleem. Een van deze cirkelkwadrateurs was de rekenmeester Simon vander Eycke, oorspronkelijk afkomstig uit Dôle (Frankrijk). In 1584 liet deze in Delft een boekje drukken dat hij opdroeg aan Willem van Oranje en waarin hij beweerde dat $\pi = 3\ {}^{69}/_{484} = 3{,}1425\ldots$ Van Ceulen weerlegde deze kwadratuur in 1585 met een *Kort claar bewijs dat die nieuwe ghevonden proportie eens circkels jegens zyn diameter te groot is ende over zulcx de quadratura circuli des zelven vinders onrecht zy.* In 1586 publiceerde Vander Eycke een nieuwe cirkelkwadratuur, die neerkwam op $\pi = \sqrt{\sqrt{320}-8} = 3{,}1446\ldots$ Van Ceulen reageerde binnen enkele maanden met een *Proefsteen en claerder wederlegging* van het werk van Vander Eycke, die volgens Van Ceulen 'tot dolen geboren' was. Zulke twisten waren een goede manier voor rekenmeesters om in de publiciteit te komen en daardoor leerlingen te trekken.

Door de ruzie met Vander Eycke begon Van Ceulen zich echt voor π te interesseren. Van Ceulen kende geen Latijn, maar in 1586 vertaalde de Delftse burgemeester Jan de Groot de π-bepaling van Archimedes voor hem in het Nederlands. Al in hetzelfde jaar verhoogde Van Ceulen de nauwkeurigheid van π tot 20 decimalen. Hiervoor deed hij een onvoorstelbare hoeveelheid rekenwerk, die in de eerste hoofdstukken

VANDEN CIRCKEL.

Daer in gheleert werdt te vinden de
naeste Proportie des Circkels-diameter tegen synen Omloop / daer
door alle Circkels (met alle Figueren / ofte Landen met cromme Linien besloten) recht
ghemeten kunnen werden. Item aller Figueren-syden in den Circkel beschreven/
Beginnende van den 3 / 4 / 5 / 15 hoeck / in Irrationale ghetallen te brengen/
al hadde de Figuer veel hondert-duysent hoecken. Item des
7 / 11 / 13 / 17 / 19 / 23 Hoecx syden / ende wat syden ofte
Coorden men begeerdt / welcker Boge groot zijn
Graden / Minuten / Secunden / &c.
Naer elcx behaghen.

Noch de Tafelen SINVVM, TANGENTIVM, ende SECANTIVM, met
het gebruyck van dien, hoogh-noodigh voor de Land-meters : Met veel ande-
re konstighe stucken, dierghelijcke noyt in druck uytghegheven.

**Ten laetsten van Interest / met alderhande Tafelen daer toe dienen-
de / met het ghebruyck / door veel constighe Exempelen gheleerdt /
ende door 't gheheele werck bewesen / ende gheproeft.**

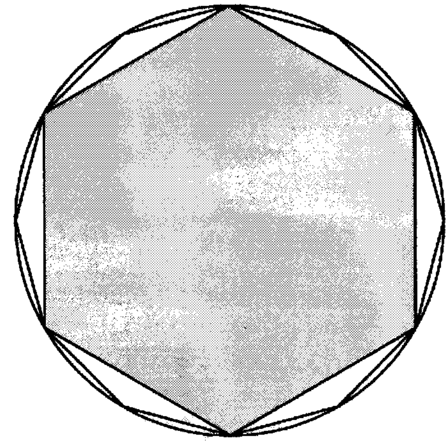
Alles door LVDOLPH van CEVLEN, gheboren in HILDESHEIM,
beschreven, ende inden druck ghebracht.

TOT DELF,

Ghedruckt by Jan Andriesz. Boeckvercooper / woonende aen 't
Marct-veldt / in 't Gulden ABC. Anno 1596.

Ludolph van Ceulen, *Vanden circkel*, 1596 van *Vanden circkel* wordt toegelicht. Het idee komt op het volgende neer. Archimedes was begonnen met de ingeschreven regelmatige zeshoek in de cirkel. De omtrek hiervan is drie keer de middellijn. Vervolgens liet hij zien hoe men hieruit de omtrek kon berekenen van de ingeschreven regelmatige 12-hoek.

Daaruit kon weer de omtrek van de ingeschreven regelmatige 24-hoek worden berekend, enzovoort. Hoe groter het aantal zijden, hoe meer de veelhoek op de cirkel lijkt. Bij elke verdubbeling van het aantal zijden moet eenmaal een vierkantswortel getrokken worden uit een al eerder berekend getal; Archimedes stopte bij de 96-hoek.


Cirkel met ingetekende zes- en twaalfhoek

Scaliger weerlegd

Van Ceulen begon met een ingeschreven regelmatige 15-hoek, die ook kan worden uitgerekend, zoals we hierna nog zullen zien, al is de berekening wel iets moeilijker dan bij de zeshoek. Hij verdubbelde de zijden 31 keer totdat hij de 32212254720-hoek kreeg. Om de omtrek hiervan met de vereiste nauwkeurigheid te berekenen moest hij in totaal 35 keer een vierkantswortel trekken, meestal in 40 decimalen nauwkeurig. Zo toonde hij aan dat in een cirkel met middellijn een 1 met 20 nullen, de omtrek ligt tussen 314.159.265.358.979.323.846 en 314.159.265.358.979.323.847. Op de voorplaat van *Vanden Circkel* staan deze getallen onder het portret van Van Ceulen, tegen de achtergrond van attributen uit de schermschool.

Zo'n reusachtige berekening was in de hele geschiedenis van de wiskunde nog nooit uitgevoerd. Volgens eigen zeggen had Van Ceulen deze in 1586 al voltooid en het resultaat aan tien wiskundigen laten zien, waaronder Rudolf Snel, hoogleraar wiskunde aan de Leidse universiteit, en de reeds genoemde Simon Stevin. Van Ceulen brak hiermee het wereldrecord in de π-bepaling: de Iraanse wiskundige Jamshīd Kāshī had in 1420 16 decimalen berekend, maar zijn werk was in Europa onbekend.

In *Vanden circkel* rekent Van Ceulen π in totaal vier keer uit, met verschillende rijen veelhoeken. Hij begint met een tienhoek, een vierkant, een zeshoek en een 15-hoek, en eindigt bij een 10485760-hoek, een 1073741824-hoek, een 6442450944-hoek en de al genoemde 32212254720-hoek. Hieruit krijgt hij vier benaderingen van π in 12, 16, 18 en 20 decimalen. Van Ceulen geeft geen verklaring van dit overbodige werk, maar zijn perfectionisme heeft vermoedelijk te maken met een nieuwe tegenstander die inmiddels op het toneel was verschenen. De beroemde Leidse hoogleraar Joseph Scaliger had namelijk in juni 1594 zijn *Cyclometria elementa duo* in Leiden laten drukken. Scaliger was in veel zaken deskundig maar niet in wiskunde, al dacht hij zelf van wel. Zijn boek is een monument van geleerdheid, met figuren in rode inkt en veel alinea's in het Grieks tussen de Latijnse tekst. De twee cirkelkwadraturen in zijn boek (die neerkomen op $\pi = \sqrt{10} = 3{,}162\ldots$ en $\pi = 9/5\sqrt{3} = 3{,}118\ldots$) zijn beide fout en bovendien met elkaar in strijd. Toen het boek verscheen liet Van Ceulen de fouten onmiddellijk aan Scaliger weten, met de suggestie het boek uit de winkels te laten halen om zijn eer te redden. Maar Scaliger weigerde kritiek te accepteren van een schermmeester die niet eens Latijn kende.

Omdat Van Ceulen vier onafhankelijke berekeningen van π gaf waarvan de resultaten met elkaar overeen stemden, zou nu voor iedere lezer duidelijk zijn wie gelijk had. Dat de berekeningen niet in het Latijn en Grieks waren gesteld deed er uiteraard niet toe; Van Ceulen zegt 'Maar den ghenen die willen, ende gheen verstandt

DE Oorsake deser mijnder ervindinghe / is den hoogh-gheleerden Adriaen van Romen / Doctoor / ende Professoor / nu ter tijdt tot Wirtzburgh /in't Landt te Francken. Den selven / my neffens andere constighe vergheliickinghe in Cos (dievergheliicken tot desen tijden niemandt heeft connen ontbinden) begheerde de syden van den ghelijck-sydighe Figuere (in den Circkel ghescreven) hebbende 9 / ende 45 houcken. De vergheliickinge in Cos / hebbe ick gesolveert / ende aen den voornoemden Adriaen ghesonden: Maer de begheerde syden / dochten mijn onwinbaer te wesen / werde nochtans ghedronghen (overmits des Mans vrientlicke begheeren) daer op te arbeyden / ende te soecken / soo langhe dat ick eenen wegh vonde / buyten Cos / daer door ick tot mijn begheeren (daer Godt de eer af moet hebben) quam / ende vandt: Alsmen neemt voor den Diameter eenes Circkels 20000000000000000 / dat dan voor een syde des 9 houck / in den Circkel ghescreven / moeste meer comen als 6840402866513374 / ende minder als 6840402866513375. Ende voor een syde des 45 houck / moet comen 1395129474882506 te cort / ende 1395129474882507 te lanck. Dese overghesonden / ende hebbe daer naer uyt syn schrijven verstaen / dat hy dese / ende andere op vergheliickinghe brenghen conde: Te weten / alsmen voor een syde des 9 houck neemt 1 ℞ / comt 3 ℞ − 1 ℭ ghelijck ✓ 3 / comt voor 1 ℞ ofte syde des 9 houck / als boven. Item hy heeft my ghesonden volghende vergheliickinghe / als 9 ℞ − 30 ℭ + 27 ß − 9 B ß + 1 C ℭ ghelijck ✓ 3. Ende 2 is ghelijck 7 ℞ − 14 ℭ + 7 ß − 1 B ß. De waerde van 1 ℞ hebbe ick met grooter arbeyt ghesocht / (Oorsake mijn onbekent was / tot wat eynde dese twee laetste vergelijckinge streckten) ende gevonden voor 1 ℞ in der eerster [illegible] te cleyn / ende 7 op't eynde te lanck. In der laetster vergheliickinghe ghevonden voor 1 ℞ [illegible] te cleyn / ende [illegible] te groot. Daer naer hebbe ick volghende swaere vraghen ontfangen / als 225 ʒ − 4200 ʒʒ + 30940 ʒ ℭ − 119340 ʒʒʒ + 277134 ʒ ß − 419900 ʒʒ ℭ + 436050 ʒ B ß − 319770 ʒʒʒʒ + 168245 ʒ C ℭ − 63756 ʒʒ ß + 17250 ʒ C ß − 3250 ʒʒʒ ℭ + 405 ʒ D ß − 30 ʒʒ B ß + 1 ʒ C ß / ghelijck 1 [illegible] − ✓ [illegible] − ✓ [illegible] − ✓ [illegible].

Hier hebbe ick eerst de Quadraet-wortel ghetrocken over beyde syden / ende ghevonden uyt de Cossische Caracteren 15 ʒ − 140 ℭ + 378 ß − 450 B ß + 275 ℭℭ − 9 C ß + 1 D ß − 1 ℭ ß / ghelijck [illegible] / ende voor de waerde van 1 ℞ ghevonden [illegible] te cleyn / ende een op't eynde te groot. Nae dese hebbe ick ontfanghen / volghende constighe Vraghe. Daer zijn 9 ghetallen ABCDEFGHI van de welcke A / doet ✓ 3. Alsmen voor B settet 1 ℞ / dan zijn 3 ℞ − 1 ℭ ghelijck aen A / ende voor C een ℞ geset / dan zijn 5 ℞ − 5 ℭ + 1 ß gelijck ✓ 3. Alsmen voor D set't 1 ℞ / dan is

Van Ceulens oplossing van een vraagstuk van Adriaan van Roomen

hebben van desen, die moghen mijn onordentlijck ende simpel maniere van schrijven verachten, de reste sal voor haer-luyden bestaende blijven.' Verderop in *Vanden circkel* weerlegt Van Ceulen de tweede kwadratuur van Scaliger in een hoofdstuk met 'konstighe stucken den Circkel aengaende, geproponeert, ende gevonden door een hoogh-gheleerdt Man' die hij verder niet bij name noemt, maar die Scaliger geweest moet zijn. Het feit dat dit niet eerder is opgemerkt geeft overigens aan dat de geschiedenis van de Nederlandstalige wiskunde nog grotendeels *terra incognita* is. Van Ceulen weerlegt ook Scaligers andere foute kwadratuur $\pi = \sqrt{10}$, maar verwijst hierbij naar de reeds overleden Franse theoloog Carolus Bovellius (of Bouvelles), die in het begin van de 16de eeuw hetzelfde had beweerd. Vermoedelijk hadden Scaliger en Van Ceulen er allebei belang bij het meningsverschil niet te laten escaleren. In de jaren na 1596 hebben zij diverse keren samengewerkt in commissies die ingesteld waren door het Leidse stadsbestuur.

Nieuwe wiskunde

Van Ceulen was behalve rekenwonder ook ontdekker van nieuwe wiskundige theorie. Hiermee loste hij problemen op die werden aangeleverd door Adriaan van Roomen. Deze uit Leuven afkomstige geleerde hield zich bezig met het berekenen van trigonometrische tabellen, die in de sterrenkunde werden gebruikt. Twee basisgrootheden in zulke tabellen zijn de zijde van de ingeschreven regelmatige 180-hoek en 10800-hoek in een cirkel. (De keuze van het getal 180 heeft te maken met het feit dat de cirkel sinds de Babyloniërs in $2 \times 180 = 360$ graden verdeeld wordt, vermoedelijk omdat het zonnejaar ongeveer 360 dagen duurt.) Van Roomen had ontdekt dat deze onbekende zijden wortels zijn van moeilijke vergelijkingen, ver boven het niveau van de wiskunde in de huidige middelbare school en in het eind van de 16de eeuw. Er waren geen oplosmethodes voor deze vergelijkingen bekend. In *Vanden circkel* verhaalt Van Ceulen, dat hij een 'sware vraghe' van Van Roomen ontving die in moderne notatie op het volgende neerkomt:

Bereken een getal x dat voldoet aan de vergelijking

$$225x^2 - 4200x^4 + 39040x^6 - 119340x^8 + 277134x^{10} - 419900x^{12} + 436050x^{14} - 319770x^{16} + 168245x^{18} - 63756x^{20} + 17250x^{22} - 3250x^{24} + 405x^{26} - 30x^{28} + x^{30} = 1\tfrac{3}{4} - \sqrt{5/16} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{45/64}}.$$

Van Roomen had in de vergelijking een uitdaging verstopt, die door Van Ceulen herkend werd: de vergelijking kan vereenvoudigd worden tot

$$15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 90x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = \sqrt{1\tfrac{3}{4} - \sqrt{5/16} - \sqrt{1\tfrac{7}{8} - \sqrt{45/64}}}.$$

Deze nieuwe vergelijking is trouwens nog moeilijk genoeg. De wortelvorm na het gelijkteken is de zijde van de regelmatige 15-hoek in een cirkel met straal 1. Van Ceulen ontdekte een methode voor het uitrekenen van wortels van zulke vergelijkingen, en hij berekende hiermee een wortel x in 15 decimalen. Deze x was de zijde van de regelmatige 225-hoek in de cirkel, en hiermee kwam Van Roomen een stap verder in de richting van de 10800 (= 48 maal 225) -hoek.

Van Roomen en Van Ceulen onderhielden hartelijke contacten, en kregen plezier in regelmatige veelhoeken en de bijbehorende vergelijkingen. Ze hebben de zijden van alle veelhoeken tot en met de regelmatige 80-hoek in vele decimalen bepaald, waarbij Van Roomen de ingewikkelde vergelijkingen opstelde en Van Ceulen het moeilijke rekenwerk deed. De resultaten staan in hoofdstuk 14 van *Vanden circkel*. Van Ceulen geeft aan dat hij zijn algemene rekenmethode voor het oplossen van vergelijkingen zou publiceren in een groot werk, dat echter nooit verschenen is. Utrechtse wiskundestudenten hebben de resultaten van Van Ceulen met moderne wiskunde en computerberekeningen geanalyseerd. Zij hoopten dat kleine fouten in de wortels x een inzicht in Van Ceulens rekenmethode zouden kunnen geven. Helaas waren de resultaten van Van Ceulen van zo hoge kwaliteit dat de methode er niet meer uit kon worden afgeleid.

Opdracht aan Prins Maurits

Vanden circkel bevat nog veel meer: 45 bladzijden met trigonometrische tabellen (totaal 16200 getallen in 7 decimalen). Deze tabellen, die traditioneel gebruikt werden in de sterrenkunde, waren volgens Van Ceulen ook 'hoogh-nodig voor landmeters'. Deze nieuwigheid zorgde ervoor dat landmeters veel moeilijkere wiskunde moesten gaan gebruiken dan ze gewend waren. Daarna presenteert Van Ceulen een lijst met 100 'konstige (d.w.z. wiskundige) vraghen'. Dit zijn problemen waarbij wel een of meer antwoorden gegeven worden, maar niet de oplosmethode, die door de lezers diende te worden gereconstrueerd. Over sommige van deze problemen is in Nederland nog tot 150 jaar na *Vanden circkel* verder gediscussieerd. Het eind van *Vanden* *circkel* is een verhandeling over rentebetalingen, met problemen die nog steeds actueel zijn: als ik per jaar een vast bedrag kan betalen (rente en aflossing), wat is dan het maximumbedrag dat ik bij gegeven rentestand kan lenen voor het kopen van een huis? *Vanden circkel* is opgedragen aan Prins Maurits, die, in de woorden van Van Ceulen, 'niet alleen een lief-hebber deser heerlijcker konst is: maar een recht verstandt der selver heeft'. Na het verschijnen van *Vanden circkel* heeft Van Ceulen zijn benadering van π verder verfijnd tot in 35 decimalen. De decimalen werden gepubliceerd op zijn grafsteen in de Pieterskerk in Leiden. De oorspronkelijke steen is in de 19de eeuw verdwenen, maar in het Wereld Wiskundejaar 2000 is een replica in de Pieterskerk onthuld door Prins Willem Alexander. De weduwe van Van Ceulen heeft in 1615 een nieuwe Nederlandse uitgave van *Vanden circkel* laten drukken, en het boek is in 1619 voor een deel in Latijnse vertaling uitgegeven door Willebrord Snellius.

Latere wiskundigen hebben aangetoond dat de decimalen van π die Van Ceulen gevonden had, correct waren, maar op eenvoudigere manier konden worden berekend. Het eindoordeel over de cirkelkwadrateurs is geveld in 1882. Toen is aangetoond dat π een transcendent getal is: dit betekent dat we π wel kunnen benaderen met breuken en wortels, maar dat de uitkomst nooit precies zal zijn. De droom van Vander Eycke en Scaliger was dus een illusie.

Beknopte literatuurlijst

Een digitale versie van *Vanden circkel* staat op de website van het Göttinger Digitalisierungszentrum (http://gdz.sub.uni-goettingen.de).

– Friedrich Katscher, 'Einige Entdeckungen über die Geschichte der Zahl Pi sowie Leben und Werk von Christopher Dybvad und Ludolph van Ceulen'. In: *Denkschriften, Österreichische Akademie der Wissenschaften, Mathematisch-Naturwissenschaftliche Klasse* 116 (1979) afl. 7, p. 85-132.

STCN-*beschrijving*

Ceulen, Ludolph van (1539-1610)
Vanden circkel. *By Ludolph van Ceulen*. Delf, *printed by* J. Andriesz., 1596. 2°: $\bullet^4$ $+^2$A-S^4 T^2 V-2E^4 2F^2.
Vingerafdruk: 159602 - *a1 + sc : a2 +2. nder - b1 A e : b2 2F. de$
Typografische kenmerken: gedrukte titelpagina, lettertype gotisch, illustraties op de titelpagina, illustraties binnen de collatie
Trefwoorden: wiskunde
Exemplaren:
Amsterdam, Universiteitsbibliotheek: 721 H 11
Delft, Technische Universiteit: TR 508403 (lacks title-page; incomplete)
Leiden, Universiteitsbibliotheek: 672 A 5, 1190 A 37
Londen, British Library: 8531.g.9