L'ETUDE DES SECTIONS CONIQUES DANS LA TRADITION ARABE

Jan P. HOGENDIJK
Université d'Utrecht (Pays-Bas)

Dans la tradition arabe, c'est-à-dire dans la tradition médiévale arabo-islamique, on a étudié la géométrie selon trois points de vue différents: pour des applications pratiques, pour des applications théoriques dans d'autres sciences, comme l'astronomie, l'astrologie et l'optique, et du point de vue des mathématiques pures. On sait relativement peu de choses sur les applications pratiques de la géométrie dans la tradition arabe, par exemple sur la construction des mosaïques ou sur les applications à l'architecture. En tout cas, il semble que l'étude des sections coniques n'ait pas été importante pour les artisans. Il est vrai que les savants arabes ont étudié les relations entre les sections coniques et les cadrans solaires. Mais les artisans ont construit les cadrans solaires au moyen de tables qui donnent la position de l'ombre du gnomon pour une localité donné, pour tous les moments du jour et pour toute position du Soleil. Or, ces tables ont été calculées sans connaissance des sections coniques[1]. Il est aussi vrai que la géométrie pratique a posé des problèmes qui ont été résolus au moyen des sections coniques. Mais ces solutions n'avaient pas une valeur pratique, comme nous le verrons plus loin. Pendant le Moyen-Âge le mouvement elliptique des planètes n'était pas encore connu. Donc on ne trouve guère d'application des sections coniques à l'astronomie. Quelques astronomes du X^e et XI^e siècles, comme Al-Saghānī et Al-Bīrūnī, avaient discuté des variantes de l'astrolabe au moyen des sections coniques[2]. Ces variantes étaient beaucoup plus difficiles à construire et à utiliser que l'astrolabe ordinaire sur lequel sont tracés seulement des lignes droites et des cercles.

Les applications des sections coniques à l'optique sont plus importantes. Déjà dans l'antiquité, les géomètres avaient étudié les miroirs ardents paraboliques[3], et les géomètres arabes ont continué l'étude des miroirs ardents[4]. Ibn al-Haytham a résolu un fameux problème d'optique par l'intersection d'un cercle et d'une hyperbole[5]. Néanmoins, les géomètres arabes ont étudié les sections coniques presque exclusivement pour leur intérêt dans les mathématiques pures.

Nous allons discuter quelques aspects du développement de cette théorie dans la tradition arabe à travers un exemple concret. Pour la compréhension de cet exemple, il sera nécessaire de traiter sommairement quelques préliminaires de la théorie ancienne des sections coniques et de la transmission de cette théorie en arabe.

L'ouvrage fondamental sur la théorie ancienne des sections coniques est les *Coniques* d'Apollonius de Perge (env. 200 avant J.C.)[6]. Cet ouvrage se compose de huit livres, dont les sept premiers ont été l'objet, au neuvième siècle, d'une traduction en arabe qui a été supervisée par les frères Banū Mūsā[7]. Cette traduction n'était pas du tout aisée[8], d'abord parce que les Banū Mūsā ne possèdaient qu'un seul manuscrit grec qui, au surplus, était mauvais ; ensuite parce que, à l'époque des Banū Mūsā, les sections coniques étaient un sujet complètement oublié. Il n'y avait donc personne qui pouvait leur en expliquer la théorie. Les Banū Mūsā eurent d'abord des difficultés à déchiffrer le manuscrit grec. Puis, l'un des trois frères, al-Ḥasan ibn Mūsā, développa lui-même la théorie des sections du cylindre à l'aide d'un plan. Son idée (qui est correcte) était que cette théorie est un peu plus facile et en même temps une introduction à la théorie des sections du cône. Après la mort d'al-Ḥasan, un autre des frères, Aḥmad, découvrit en Syrie un manuscrit grec des quatre premiers livres, avec les commentaires d'Eutocius. A l'aide de ces deux manuscrits et à l'aide de la théorie des sections du cylindre de leur frère décédé, les deux Banū Mūsā restants, Aḥmad et Muḥammad, réussirent finalement à comprendre le texte grec des *Coniques*. Puis, il firent traduire, les quatre premiers livres par Hilāl ibn abī Hilāl al-Ḥimṣī, et les livres 5 à 7 par Thābit ibn Qurra. Les deux Banū Mūsā firent alors la révision finale de la traduction.

Le texte grec des quatre premiers livres des *Coniques* a été préservé par des manuscrits byzantins. Les livres 5 à 7 des *Coniques* ont survécu seulement dans la version arabe, grâce au travail des Banū Mūsā. Notons que le livre 5 des Coniques est un des ouvrages les plus magnifiques (et les plus difficiles) de la mathématique grecque.

Les éléments suivants de la théorie d'Apollonius de l'hyperbole seront nécéssaires pour la compréhension de la construction arabe ci-dessous. Si un cône est coupé selon une hyperbole (la terminologie est moderne), comme dans la figure 1, Apollonius appelle chaque branche une hyperbole, et les deux branches "deux sections opposées". Il démontre dans le livre premier des Coniques la propriété suivante d'une manière stéréométrique:

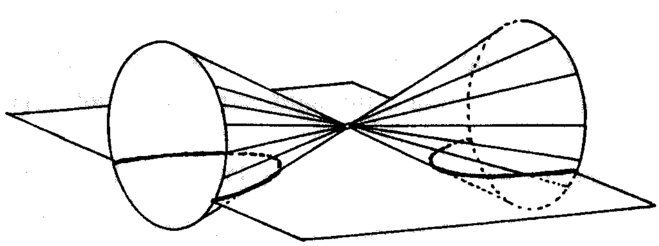

Figure 1

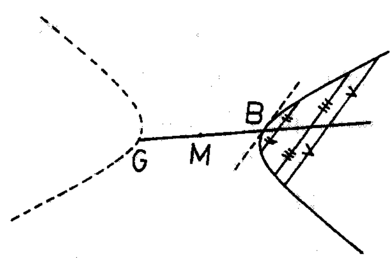

Figure 2

(1) Chaque section conique a un diamètre, c'est-à-dire une ligne droite qui coupe en deux parties égales tout segment de droite mené entre deux points de la conique qui a une certaine direction fixée (Coniques I:7, figure 2). Il appelle les moitiés de ces segments les ordonnées correspondant à ce diamètre. Dans la figure 2, BG est un diamètre qui coupe une hyperbole en B et la section opposée (l'autre branche) en G.

Soit M le milieu de BG. Apollonius démontre par des méthodes planimétriques que:

(2) L'hyperbole a une tangente passant par le point B, et cette tangente est parallèle aux ordonnées du diamètre GB (Coniques I:17,32).

(3) Chaque ligne droite passant par M est un dimètre de l'hyperbole, et les ordonnées d'un diamètre B_1G_1 arbitraire (figure 3) sont toujours parallèles à la tangente passant par B_1 (Coniques I:47).

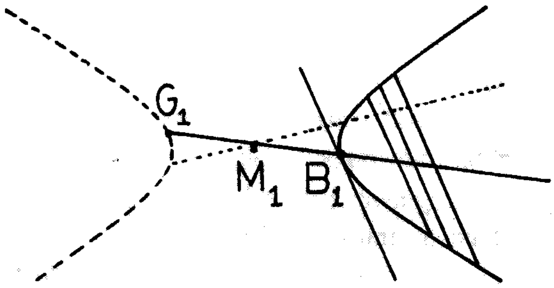

Figure 3

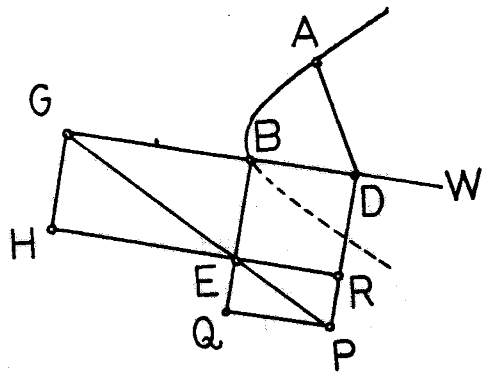

Figure 4

Nous considérons maintenant une hyperbole ayant comme diamètre la ligne BG qui coupe l'hyperbole en B et la section opposée en G, comme dans la figure 4. Soit AD une ordonnée arbitraire. Apollonius démontre qu'il existe un segment fixe BE, perpendiculaire à BG, indépendant du choix de l'ordonnée AD, tel que pour toute ordonnée AD le carré de AD a la même aire que le rectangle BDPQ qui est défini comme suit: on mène GE et la perpendiculaire à GB par D. Soit P l'intersection de ces deux lignes, et soit le point Q sur BE tel que PQ//DB. Apollonius démontre que AD^2=BD. PQ stéréométriquement pour le diamètre original BG de la figure 2 (Coniques I:12) et planimétriquement pour les autres diamètres B_1G_1 de la figure 3 (Coniques I:50).

Si on pose AD = y, BD = x, BG = d, BE = p

on a rectangle BDRE = BD. BE = x.p,

RP/RE = BE/BG = p/d, RE=BD=x, donc RP=px/d et ERPQ=px^2/d, de sorte que

(4) y^2=BDPQ = px + px^2/d.

Cette expression ressemble à l'équation cartésienne de l'hyperbole, mais il faut remarquer que le système des coordonnées n'est en général pas orthogonal, parce que AD n'est pas toujours perpendiculaire à BD. L'identité (4) explique l'origine du terme arabe qaṭ^c zā'id pour désigner l'hyperbole: le rectangle BDPQ est appelé par Apollonius "le rectangle appliqué à BE ayant comme largeur BD et excédant (en arabe: za'id) par un rectangle ERPQ semblable au rectangle GBEH constant. Dans la formule (4), px est le rectangle appliqué à p (=BE), ayant comme largeur x (=BD), et px^2/d est l'excédent. Pour l'ellipse Apollonius a démontré l'équivalent de l'équation

$y^2=px-px^2/d$, ce qui explique le terme arabe qaṭ^c nāqiṣ, "section déficiente" (ici px^2/d est le "défaut"). Pour la parabole on a $y^2=px$, de sorte qu'il n'y a ni défaut ni excès. Ainsi la parabole s'appelle en arabe al-qaṭ^c al-mukāfi', section suffisante. On voit que les traducteurs arabes ont choisi une traduction des mots *Grecs elleipsis, parabolè et hyperbolè* qui en préserve le sens. Ils n'ont pas simplement transcrit les termes, comme les traducteurs latins l'ont fait.

Pour comprendre la construction d'al-Kūhī ci-dessous, trois termes techniques doivent être définis (figure 4):

(a) Le segment BG est appelé le "côté transverse" (ḍil^c mujānib) ou 'diamètre transverse" (quṭr mujānib);

(b) Le segment BE est appelé le "côté droit" (ḍil^c qā'im)

(c) Si W est un point sur le prolongement rectiligne de AD, l'angle ADW est appelé "angle des ordonnées" (zāwiya al-tartīb). Si cet angle est droit, le diamètre s'appelle axe.

Apollonius démontre aussi que, pour chaque paire de segments perpendiculaires BG, BE et pour chaque angle a, il existe une hyperbole ayant pour diamètre transverse BG, pour côté droit BE et comme angle des ordonnées a. En d'autres termes, il construit la base circulaire et le sommet d'un cône qui coupe le plan selon l'hyperbole désirée (Coniques I:54,55).

Les géomètres de la tradition arabe ont appliqué la théorie d'Apollonius des sections coniques dans la solution de beaucoup de problèmes géométriques. Avant le milieux du X^e siècle, les géomètres posédaient déjà quelques textes contenant de telles constructions, mais ces constructions étaient toutes d'origine ancienne. Dès le milieu du X^e siècle, les géomètres d'Irak et d'Iran ont commencé à découvrir des solutions nouvelles. D'abord, c'est le problème de la construction d'un heptagone régulier qui semble avoir joué le rôle le plus important[9]. Les géomètres arabes connaissaient en effet un texte attribué à Archimède, dans lequel la construction de l'heptagone est réduite au problème suivant: dans un carré donné ABGD, construire une ligne droite AEZH comme dans la figure 5, de telle sorte que les triangles AEB et GZH aient la même aire. Le texte ne donne aucune indication sur la méthode de construction de la ligne AEZH; cette construction est d'ailleurs impossible au moyen de la règle et du compas. En conséquence, les géomètres arabes ont estimé que la construction attribuée à Archimède n'était pas complète.

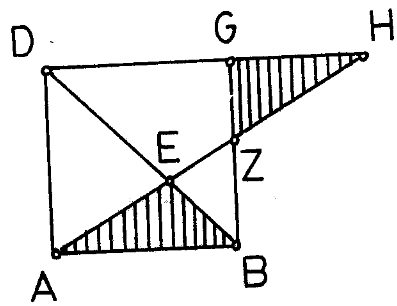

Figure 5

Un peu avant 968, le jeune géomètre Abū'l-Jūd annonça qu'il avait découvert une construction de l'heptagone au moyen de la règle et du compas (ce qui est impossible). L'erreur dans sa construction sera découverte par al-Sijzī et corrigée par al-ᶜAlā ibn Sahl au moyen des sections coniques. L'histoire de cette construction est assez amusante, parce qu al-Sijzī semble avoir donné à al-ᶜAlā ibn Sahl des informations incomplètes sur la construction d'Abū'l-Jūd, de sorte qu'al-ᶜAlā ne pouvait pas savoir qu'il s'agit de l'heptagone. Puis, Abū'l-Jūd a accusé al-Sijzī de plagiat, et on peut lire à ce sujet des calomnies intéressantes dans les manuscrits mathématiques de cette période. Plusieurs géomètres ont inventé des constructions de la ligne AEZH, par exemple aL-Sāghānī (voir p. 10 ci-desous). En tout état de cause, l'histoire de l'heptagone régulier a montré aux géomètres du dixième siècle que l'on pouvait résoudre des problèmes même si les anciens n'en avaient pas trouvé la solution. Cette idée de progrès dans la géométrie a réellement stimulé la recherche des autres problèmes. Je vais vous présenter l'exemple le plus court et le plus élégant que je connaise: il s'agit de la trisection de l'angle qui a été découverte par Abū Sahl al-Kūhī vers 968 (et qui a été peu après plagiée par al-Sijzī)[10]. Je ne vous donnerai pas le texte original d'Al-Kūhī, qui est très long, mais un résumé anonyme qui se trouve dans un manuscrit à Manisa (Turquie)[11]. Ce résumé est un appendice à la reconstruction du huitième livre perdu des *Coniques* par Ibn al-Haytham (965-1041)[12]. Le texte arabe édité et une traduction française se trouvent à la fin de cet article.

Ce problème de la trisection avait déjà été étudié dans l'antiquité grecque et il est devenu fameux parce que l'on ne pouvait pas le résoudre au moyen de la règle et du compas. Les géomètres grecs ont trouvé plusieurs solutions au moyen d'autres instruments, plus compliqués que le compas[13]. Une solution ancienne au moyen des sections coniques a été traduite en arabe par Aḥmad ibn Mūsā, et la même solution a été révisée (ou bien traduite d'un autre texte) par Thābit ibn Qurra[14]. Cette solution est plus compliquée que celle d'al Kūhī, qui sera présentée maintenant.

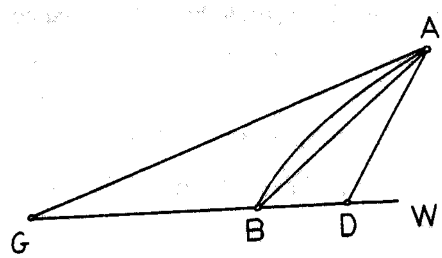

Figure 6

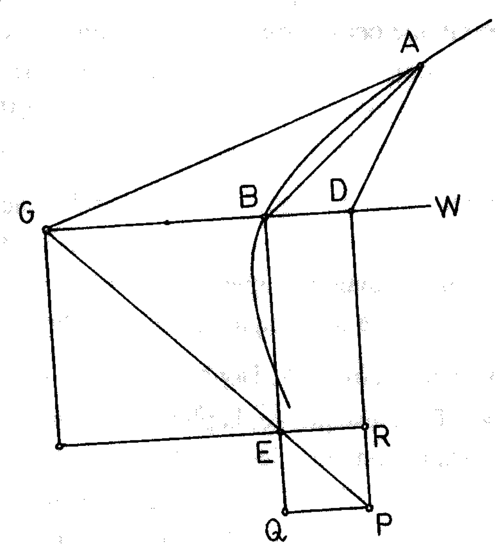

Figure 7

Supposons que l'angle donné soit $a=\alpha$. Al-Kūhī choisit d'abord un segment arbitraire GB (figure 6, comme dans le manuscrit). Puis il construit l'hyperbole passant par B ayant comme diamètre transverse le segment GB, comme côté droit un segment égal à GB (BE dans la figure 7, trait discontinu), et ayant comme angle des ordonnées l'angle a. L'existence de cette hyperbole a été demontrée par Apollonius. Puis il construit le point A sur l'hyperbole tel que AB=BG (on peut trouver A comme point d'intersection de l'hyperbole et du cercle ayant pour centre B et pour rayon BG). Il mène alors l'ordonnée AD, puis il joint A à G et à B, et il affirme que $\angle DAB = a/3$. Sadémonstration est la suivante.

Il dit d'abord: $GD.DB:AD^2=d:p$, où d=BG est le diamètre transverse et p=BE le côté droit. C'est une conséquence du fait que $AD^2=$ rectangle BDPQ car GD.DB : BDPQ = GD.DB : PD.DB = GD:PD = GB:EB = d:p, comme Apollonius le démontre dans ses *Coniques*. Puisque d=p=BG, il s'ensuit que $GD.DB=AD^2$.

al-Kuhi dit que les triangles ADB, GDA sont donc semblables, ce qui est une conséquence de AD:DB=GD:AD et $\angle ADB = \angle GDA$. Comme les triangles sont semblables,

on a $\angle G = \angle DAB$.

Puisque AB=BG, on a $\angle G = \angle BAG$, donc

$\angle ABD$ (angle extérieur) $= \angle G + \angle BAG = 2\angle G$. Donc $\angle ABD = 2\angle DAB$.

Finalement, si W est sur le prolongement rectiligne de BD,
on a

$a = \angle ADW$ (angle extérieur) $= \angle ABD + \angle DAB = 3\angle DAB$. Donc $\angle DAB = a/3$.

A ce stade, on peut se poser la question de savoir comment l'hyperbole peut être tracée. Al-Kūhī a écrit une oeuvre sur la construction des sections coniques au moyen d'un instrument qu'il appelle le "compas parfait" (al-birkār al-tāmm)15. Ce compas consiste en deux branches, comme un compas ordinaire. Il y a toutefois deux différences entre le compas ordinaire et le compas parfait (figure 8). D'abord, la première branche d'un compas parfait peut être fixée par rapport au plan du papier, selon un angle arbitraire $b=\beta$. L'autre différence est que la seconde branche consiste en un tube droit et une plume qui peut coulisser dans le tube, de sorte que l'extrémité de la plume touche toujours le plan du papier. La première branche du compas correspond à l'axe d'un cône, et al-Kūhī l'appelle l'axe du compas. La seconde branche peut être fixée par rapport à l'axe du compas selon un angle arbitraire $g=\gamma$. Donc, si la seconde branche tourne autour de l'axe, elle décrit la surface d'un cone. En conséquence, la plume trace une section conique sur le plan du papier.

Dans son ouvrage sur le compas parfait, al-Kūhī donne des indications détaillées sur la construction d'une hyperbole au moyen de cet instrument16. Nous savons donc comment il aurait répondu à la question: Comment peut-on décrire l'hyperbole qui intervient dans sa trisection de l'angle? D'abord il faut trouver l'axe et le sommet de l'hyperbole. Revenons à la figure (figure 9).

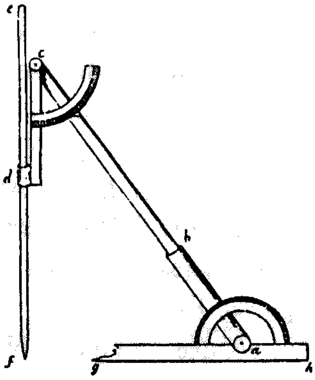

Figure 8 (Woepcke, l'Algèbre d'Omar Alkhayyāmī, p. 56).

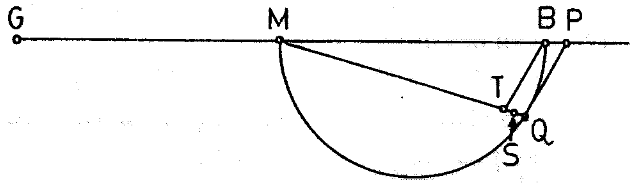

Figure 9

Soit M le milieu de BG, et traçons un demi-cercle sur la base MB. Puis, construisons une tangente au cercle qui fasse avec GB l'angle a; soit PQ cette tangente. Menons MQ et une ligne parallèle à PQ par B, qui coupe MQ en T. Finalement, il faut construire S entre T et Q de sorte que $MS^2=MT.MQ$. Al-Kūhī montre que S sera le sommet de l'hyperbole et MS son axe. Il précise que cette méthode de construction du point S a déjà été donnée par Apollonius (Coniques I:55).

Il faut maintenant décrire une hyperbole ayant pour centre M, pour sommet S, pour axe MS, pour diamètre (ou côté) transverse 2MS et pour côté droit un segment égal au diamètre transverse (on peut démontrer que tout côté droit d'une telle hyperbole est égal à son côté transverse; c'est pourquoi cette hyperbole est appelé "équilatère" - ayant des côtés égaux). La construction de cette hyperbole est assez compliquée. Al-Kūhī construit d'abord les angles b et g du compas dans une figure préliminaire (figure 10).

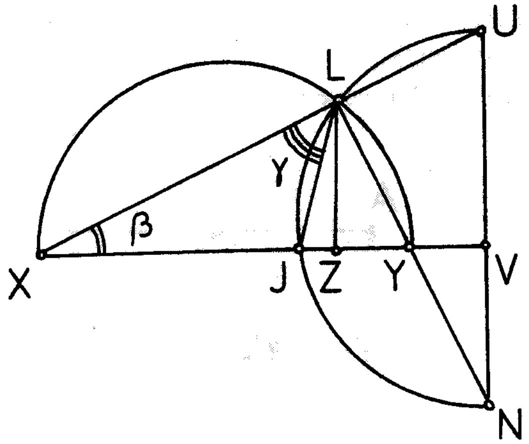

Figure 10

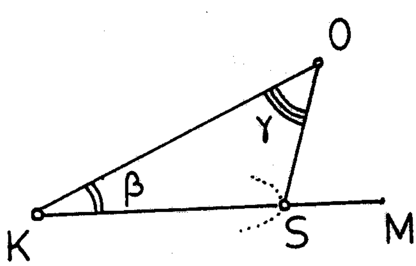

Figure 11

Soit a la longueur de l'axe du compas. On pose ZY=YV; maintenant, il faut construire X sur le prolongement rectiligne de ZY de sorte que $XY.XZ/XV.VY = a^2/MS^2$. Pour la construction de X, al-Kūhī renvoie à son ouvrage "sur la détermination des points sur des lignes suivant des rapports dont les termes sont des surfaces", qui est aujourd'hui perdu. Puis on construit le demi-cercle XLY, la perpendiculaire LZ à XY, la droite UVN perpendiculaire à KYV déterminée en sorte que XLU et LYN soient des droites, le demi-cercle ULN; soit J le point commun de ce cercle et de XV. Alors, al-Kūhī prend $\gamma = \angle XLJ$ et $\beta = \angle LXJ$. Alors (figure 11), il place son compas de sorte que l'axe KO soit dans le plan perpendiculaire au plan du papier passant par MS, et que KO fasse un angle b par rapport au plan du papier, la seconde branche faisant, elle, un angle g avec KO. Si alors S est le point de rencontre de cette branche avec le plan du papier, la rotation du compas fera que la plume décrira l'hyperbole désirée, comme le démontre al-Kūhī.

Cette construction est assez compliquée. Il est vraisemblable qu'al-Kūhī n'a jamais divisé un angle en trois parties égales au moyen d'un compas parfait de la manière qu'il enseigne. Comme bien d'autres géomètres de la tradition arabe, il s'intéressait surtout à la géométrie pure, en tant que science des verités éternelles, concernant des figures inaltérables que l'on peut concevoir par l'imagination et non par les figures que l'on construit sur le papier. On peut aussi remarquer que dans les figures des manuscrits arabes, les sections coniques sont toujours réprésentées par des arcs de cercles. C'est aussi le cas dans le manuscrit des *Coniques* d'Apollonius copié par Ibn al-Haytham, et qui est aujourd'hui à Istanbul.

La plupart des solutions arabes des problèmes géométriques au moyen des sections coniques peuvent être considérées comme des élaborations et des applications de la théorie d'Apollonius. Mais il y a de belles exceptions a cette règle, comme l'inscription par al-Kūhī d'un pentagone équilatéral dans un carré[17]. On peut facilement retrouver sa construction à l'aide des indications suivantes. Si PQRST est un pentagone équilatéral inscrit dans un carré ABCD, comme dans la figure 12, le point P est le milieu de AB, et le milieu M de RS est aussi le milieu de DC. Les points P et M sont donc a connus. AL-Kūhī considère alors le parallèlogramme UMRQ et le point U. On a alors PQ=QR=RS=ST= TP=2RM=2QU=UM.

Puisque UM=2QU, U est sur une hyperbole ayant pour foyer M, pour directrice AD et une excentricité égale à 2. Comme ces concepts n'étaient pas expliqués dans les Coniques d'Apollonius, al-Kūhī devait déterminer le sommet, l'axe, et le "côté droit" de cette hyperbole. Puisque UQ=QP/2, U est aussi sur une autre hyperbole, de sorte que U peut être déterminé comme point d'intersection de deux hyperboles connues.

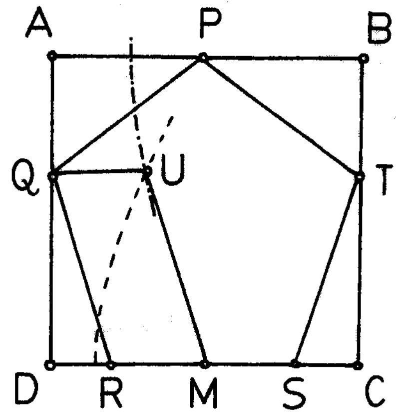

Figure 12

Les géomètres arabes ont aussi utilisé les sections coniques pour la solution des équations du troisième degré[18]. Al-Māhānī, qui vivait vers 860, fut le premier à avoir réduit un problème géométrique à une équation algébrique du troisième dégré. Il s'agissait du problème auxiliaire de la proposition 4 du deuxième livre de l'ouvrage sur la sphère et le cylindre d'Archimède. Vers 940, Abū Ja^{c}far al-Khāzin résolut l'équation d'al-Māhānī au moyen de sections coniques. Il est possible que la solution d'Abū Ja^{c}far était inspirée par le commentaire d'Eutocius, qui donne une solution du problème d'Archimède au moyen de sections coniques; car nous savons qu'Abū Ja^{c}far a connu ce commentaire[19]. Après Abū Ja^{c}far, plusieurs mathématiciens arabes résolurent des équations du troisième degré au moyen de sections coniques. Ces solutions s'appuyent sur des propriétés simples des sections coniques. Quelques géomètres arabes, notamment al-Kūhī et Ibn al-Haytham, ont étudié les aires de segments de coniques, ainsi que les volumes et les centres de gravité de certains solides de révolution engendrés par des sections coniques[20]. al-Sijzī a également fait des recherches sur l'intersection de ces solides de révolution avec des plans. Les textes d'al-Sijzī sur les solides de révolution et plusieurs autres traités arabes sur les sections coniques n'ont pas encore été étudiés[21]. En conséquence, nos connaissances historiques sur ce sujet sont assez incomplètes. Un nombre considérable de traités nettement plus difficiles n'ont pas été retrouvés. Par exemple, selon l'auteur anonyme d'un manuscrit Persan du XIII^{e} siècle[22], Ibn al-Haytham avait écrit un traité sur la construction, au moyen d'une parabole et d'une hyperbole, d'un triangle rectangle dont la somme de la hauteur et du plus petit côté est égale à l'hypoténuse (figure 13). Aucun manuscrit de ce traité n'est connu. L'auteur anonyme nous informe qu'Ibn al-Haytham a été inspiré par la géométrie pratique, car ce type de triangle était nécessaire pour la construction exacte d'une mosaïque (figure 14) (on connaissait déjà des constructions approximatives excellentes de ce type de mosaïque au moyen de la règle et du compas). L'exemple de ce texte d'Ibn al-Haytham n'est pas un cas isolé. Il reste beaucoup a découvrir car la tradition arabe sur les sections coniques était très riche.

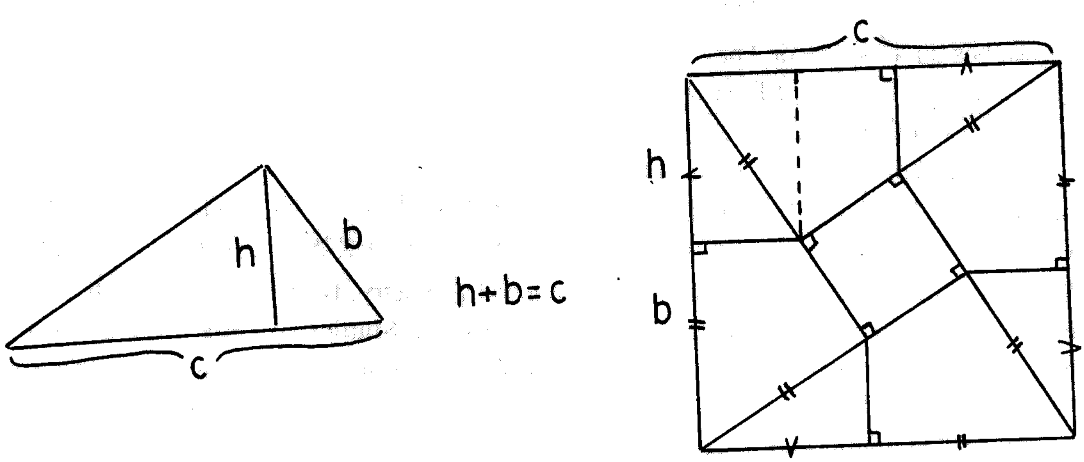

Figure 13 et 14.

Remerciements

Je remercie les Dr. A. Djebbar (Paris) et Dr. J. Sesiano (Lausanne), qui ont bien voulu corriger le Français et qui ont fait des remarques utiles sur le contenu.

Notes

1. Voir D. A. King, Islamic astronomical instruments, London 1987, 10-11.

2. Voir R. Lorch, "Al-Sāghānī's treatise on projecting the sphere", dans D. A. King, G. Saliba (eds). From deferent to equant. A volume of studies in the history of science in the ancient and medieval Near East in honor of E.S. Kennedy, New York 1987, pp. 237-252.

3. G.J. Toomer, Diocles on Burning Mirrors, New York etc., 1976. Voir aussi J. Sesiano, "Les miroirs ardents de Dioclès", Museum Helveticum 45 (1988), 193-202 ; O. Neugebauer, "Note on Diocles Burning Mirror", in J.L. Berggren, B.R. Goldstein (eds). From ancient omens to statistical mechanics, Festschrift for A. Aaboe, Copenhagen 1987, 37-42 ; J.P. Hogendijk, "Diocles and the geometry of curved surfaces", Centaurus 28 (1985) 169-184.

4. Voir par exemple J.L. Heiberg, E.J. Wiedemann, "Ibn al-Haytham's Schrift über parabolische Hohlspiegel", Bibliotheca Mathematica 3. Folge, 10 (1909-10), 201-237.

5. A. I. Sabra, "Ibn al-Haytham's lemmas for solving Alhazen's problem", Archive for History of Exact Sciences 26 (1982), 299-304.

6. Edition du texte grec: J.L. Heiberg, Apollonii Pergaei quae exstant cum commentariis antiquis, 2 vols, Leipzig 1891-1893. Traduction française: P. Ver Eecke, Les Coniques d'Apollonius de Perge, Bruges 1923.

7. Edition du texte arabe et traduction anglaise: G.J. Toomer, Apollonius Conics Books V to VII. The Arabic translation of the lost Greek original in the version of the Banu Musa. New York etc. 1990, 2 vols.

8. Pour l'histoire de cette traduction voir la préface des Banū Mūsā dans G.J. Toomer, Apollonius Conics (note 7), vol. 2, pp. 620-629.

9. Voir A. Anbouba, "tasbī^{c} al-dā'ira" (en Arabe), et "Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4^{e} siècle de l'hégire" dans Journal for the History of Arabic Science 1 (1977), 352-384 ; 2(1978), 264-269; J.P. Hogondijk, "Greek and Arabic constructions of the regular heptagon", Archive for History of Exact Sciences 30 (1984), 197-330.

10. Pour les manuscrits de la construction d'al-Kūhī voir F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, Band V (Mathematik bis ca. 430H.), 318-319 no.6. Pour le texte Arabe d'une version voir A. Sayili, "The trisection of the angle by Abū Sahl al-Kūhī", Belleten 26 (1962), 693-700 ; W. Knorr, Textual studies in ancient and medieval geometry, Boston 1988, 339-340. Je trouve peu convaincante la discussion par M. Knorr (Textual Studies, p. 308-309) sur les relations hypothétiques entre la trisection d'Al-Kūhī et une trisection de Pappus d'Alexandrie, Collections Mathématiques, IV: 43-44.

11. N. Terzioglu, Das achte Buch zu den Conica des Apollonius von Perge. rekonstruiert von Ibn al-Haysam. Istambul 1974.

12. Texte arabe et traduction anglaise dans J.P. Hogendijk, Ibn al-Haytham's Completion of the Conics. New York etc. 1985.

13. Voir par exemple T.L. Heath, A history of Greek mathematics, Oxford 1921 vol. 1, 235-244.

14. Voir J.P. Hogendijk, "How trisections of the angle were transmitted from Greek to Islamic geometry", Historia mathematica 8 (1981) 417-438, and W. Knorr, Textual studies... (note 10), 326-334.

15. Edition du texte arabe et traduction française: F. Woepcke, "Trois traités arabes sur le compas parfait", Notices et extraits des manuscrits de la Bibliothèque Impériale et autres bibliothèques 22 (1874) 1-175, reimprimé dans: F. Woepcke, Etudes sur les mathématiques arabo-islamiques, Frankfurt 1986 (Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften) vol. 2, pp. 560-734.

16. Voir F. Woepcke, "Trois traités arabes..." (note 15), 90-99, 129-137 (Etudes vol. 2, 649-658, 688-696).

17. Pour le texte arabe et traduction anglaise voir J.P. Hogendijk, "Al-Kūhī's construction of an equilateral pentagon in a given square", Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften 1 (1985) 100-144.

18. Voir la préface à l'algèbre d'Omar Al-Khayyāmī, dans R. Rashed, A. Djebbar, L'oeuvre algébrique d'al-Khayyām, Aleppo 1981, 11-12 (traduction), 1-2 (texte arabe), et F. Woepcke, L'algèbre d'Omar Alkhayyāmī, Paris 1851, 2-3 (trad. et texte arabe) = Woepcke, Etudes... (note 15), vol. 1, 74-75, 251.

19. Voir G.J. Toomer, Diocles on burning mirrors (note 3), 23.

20. H. Suter, "Die Abhandlungen Thābit ibn Kurras und Abū Sahl al-Kūhī's über die Ausmessung der Paraboloïde", Sitzungsberichte der Physikalisch-Medizinischen Sozietät zu Erlangen 48/49 (1916-17), 186-227, réimpression dans H. Suter, Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam, Frankfurt 1986 (Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften), vol.2, 435-476 ; H. Suter, "Die Abhandlung über die Ausmessung des Paraboloïdes von el-Ḥasan b. el-Ḥasan b. el-Haitham", Bibliotheca Mathematica 3. Folge 12 (1911-12), 289-332, réimprimé dans H. Suter, Beiträge..., vol. 2, 369-412 ; Pour le texte arabe voir R. Rashed, "Ibn al-Haytham et la mesure du paraboloïde", Journal of the History of Arabic Science 5 (1981), 191-262. Pour les centres de gravité voir J. Sesiano "Note sur trois théorèmes de Mécanique d'al-Qūhī et leur conséquence, Centaurus 22 (1979) 281-297 ; J.L. Berggren, "The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Isḥāq al-Ṣābī: a translation with commentary", Journal of the History of Arabic Science 7 (1983), 39-124.

21. F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, Band V, 331 nos. 3,4,5.

22. N. Bulatov, Geometricheskaya garmonizatsiya v arkhitekture srednei Azii, Moscou 1978, 331 (voir aussi Mathematical Reviews 90c:01009).

Texte Arabe édité.

إذا أردنا أن نأخذ من زاوية معلومة ثلثها وصفنا (١) قطعا زائدا ضلعه القائم مثل قطره المجانب وزاوية ترتيبه مثل الزاوية المعلومة وليكن قطع أ ب وقطره المجانب ب جـ ونخطّ في القطع خطًا مثل خط ب جـ وهو خطّ ب أ ونخرج خطّ أ د على الترتيب . فأقول ان زاوية د أ ب الزاوية المطلوبة (٢) . برهانه ان نسبة ضرب جـ د في د ب إلى مربع خطّ أ د كنسبة المجانب إلى القائم والمجانب فرضناه مثل القائم فضرب جـ د في د ب مثل مربع أ د فيكون لذلك مثلث أ د ب شبيها بمثلث أ د جـ فزاوية د أ ب مساوية لزاوية جـ وزاوية أ ب د مثلا زاوية جـ لأن أ ب مثل ب جـ فزاوية أ ب د مثلا زاوية د أ ب . ولأن الزاوية الخارجة من (٣) كل مثلث مثل الداخلتين (٤) لها تكون لذلك زاوية د أ ب ثلث الزاوية المفروضة . وذلك ما أردنا أن نبين .

(١) وصفنا (٢) المطلوبة : المعلومة . (٣) الخارجة من : الخارجين .

(٤) مثل الداخلتين المقابلتين : مثلا الداخلين المقابلين .

Traduction.

Si nous voulons prendre le tiers d'un angle connu, nous décrivons1 une hyperbole telle que son côté droit soit égal à son diamètre transverse et que son angle des ordonnées soit égal à l'angle connu (Figure 15). Soit AB la section et BG son diamètre transverse. Nous traçons dans la section (conique) une ligne égal à la ligne BG ; soit BA celle-ci. Nous menons la ligne ordonnée AD. je dis que l'angle DAB est l'angle demandé2. preuve de cela: Le rapport du produit de GD et DB au carré de la ligne AD est égal au rapport du (côté) transverse au (côté) droit. Mais nous avons posé le (côté) transverse égal au (côté) droit. Donc le produit de GD et DB est égal au carré de AD. De ce fait, le triangle ADB est semblable au triangle ADG. Donc l'angle DAB est égal à l'angle G. Et l'angle ABD est deux fois l'angle G, puisque AB est égal à BG. Donc l'angle ABD est deux fois l'angle DAB. Et puisque l'angle extérieur de chaque triangle est égal à (la somme des) deux angles intérieurs qui lui sont opposés, l'angle DAB sera de ce fait un tiers de l'angle supposé. C'est ce que nous voulions montrer.

1. Le manuscrit a: "nous posons". Je préfère la lecture "nous décrivons" parce que ce terme est utilisé souvent dans la littérature arabe sur les sections coniques. Par exemple, al-Sijzī a écrit un 'traité sur la description (waṣf) des sections coniques".

2. Selon le manuscrit DAB est "l'angle connu", ce qui est absurde. Il faut donc corriger le texte.

Figure 15