La géométrie projective de Desargues et les *Coniques* d'Apollonius

Jan P. Hogendijk[1]

Le sujet de cet article est la relation entre un traité sur la géométrie projective d'un géomètre français du XVII^{e} siècle, Girard Desargues, et les *Coniques* d'Apollonius (environ 200 avant J.-C.). Desargues est né à Lyon en 1591. On ne sait presque rien sur sa jeunesse. Vers 1630, il habitait à Paris, où il avait des contacts avec le célèbre Père Mersenne, qui était en relation avec beaucoup de mathématiciens. Desargues a publié des livres sur les mathématiques appliquées de son époque, en particulier sur la perspective, sur la statique, sur la taille de la pierre, sur les cadrans solaires. Il avait de très bonnes relations avec René Descartes. En 1637, Descartes avait publié sa *Géométrie*, qui peut être regardée comme le premier traité sur la géométrie analytique. Descartes y introduit des notations algébriques et y étudie des courbes au moyen des équations. On sait que Desargues a lu cet ouvrage attentivement en 1638. Puis, en 1639, il a publié son *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du Cone avec un Plan*, un traité sur les sections coniques tout à fait différent de la géométrie de Descartes, tant du point de vue de la méthode que du point de vue des résultats.

Ici, nous passons l'histoire curieuse de la publication du *Brouillon Project* sous silence, car elle est rapportée par René Taton dans son édition du texte (pp. 87-90). La plupart des contemporains de Desargues n'ont pas compris le contenu de son *Brouillon Project*, mais il y eut quelques exceptions, comme le jeune Blaise Pascal, qui a publié en 1640 son célèbre essai sur les coniques (contenant son théorème sur l'hexagone inscrit dans une section conique) en s'inspirant de Desargues. Après la redécouverte de la géométrie projective durant le XIX^{e} siècle, les mathématiciens ont reconnu en Desargues l'un des mathématiciens les plus éminents de la tradition française.[2]

Nous allons montrer que l'un des buts du *Brouillon Project* de Desargues était de parvenir à une simplification et une généralisation de la théorie des sections coniques d'Apollonius de Perge. Les quatre premiers livres des *Coniques* d'Apollonius furent publiés (en traduction latine) en 1566, et restèrent pendant la première moitié du XVII^{e} siècle le texte fondamental sur les sections coniques.

[1]Département de Mathématiques, Université d'Utrecht, B.P. 80.010, 3508 TA Utrecht, Pays-Bas

[2]Voir R. Bkouche, Desargues au XIX^{e} siècle, l'influence d'un livre non lu.

Desargues a pu faire sa simplification des *Coniques* grâce à deux notions tout à fait nouvelles pour son époque: la notion de *point à l'infini* et celle de *ligne droite à l'infini*. Certes, Desargues n'était pas le premier mathématicien dans l'histoire qui ait *parlé* des points à l'infini. Avant lui, Johannes Kepler avait déjà dit qu'une parabole a deux foyers, dont l'un est à l'infini.[3] Mais chez Kepler, ce foyer à l'infini reste une idée vague et philosophique, et une spéculation qui reste du point de vue mathématique stérile. Desargues fut, lui, le premier qui ait vraiment démontré quelque chose de profond au moyen de ces points et lignes droites à l'infini.

Desargues donne ses définitions des points et des lignes à l'infini tout au début du *Brouillon Project*:

> Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes en laquelle elles sont toutes paralleles entre elles, il est souvent icy dict que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance infinie en chacune d'elles d'une part & d'autre.
>
> Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs droictes, en laquelle elles sont toutes inclinées à un mesme poinct, il est icy dit, que toutes ces droictes sont entre elles d'une mesme ordonnance, dont le but est à distance finie dans chacune d'elles (Taton, p. 100).
>
> ... Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs Plans, en laquelle ils sont tous parallels entre eux, il est icy dit que tous ces Plans sont d'une mesme ordonnance, dont l'essieu est en chacun d'eux à distance infinie de toutes parts.
>
> Pour donner à entendre l'espece de position d'entre plusieurs Plans, en laquelle ils sont tous inclinez à une mesme droicte, il est icy dit que tous ces Plans sont entre eux d'une mesme ordonnance, dont l'essieu est en chacune d'eux à distance finie (Taton, p. 101).

Ces définitions sont données sans aucune explication, et elles devaient sans doute être assez mystérieuses pour les contemporains de Desargues. Desargues a utilisé les notions nouvelles de point à l'infini et de droite à l'infini pour simplifier la théorie des sections coniques d'Apollonius, comme

[3]Voir R. Bkouche, La naissance du projectif, p. 241-242

nous allons le voir ci-dessous.[4] Mais il est nécessaire d'expliquer d'abord la structure de la théorie d'Apollonius.

Au commencement du premier livre de ses *Coniques*, Apollonius définit un cône de la manière suivante. Il prend un cercle et un point fixé, qui ne se trouve pas dans le plan du cercle. Il considère une ligne droite qui passe toujours par le point fixé et qui tourne autour la circonférence du cercle. Cette ligne décrit une surface qui consiste en deux nappes. Le *cône* est le solide compris entre la surface, le cercle et le point fixé. Le point fixé est appelé le *sommet* du cône et le cercle la *base* du cône. Si on coupe le cône (ou, plus précisément, l'une des nappes de la surface conique) avec un plan qui ne passe pas par le sommet, la figure d'intersection est un cercle ou une courbe qu'Apollonius appelle *section conique*.

Pour étudier les sections coniques, Apollonius introduit la notion de *diamètre*, avec ses *ordonnées* (figure 1, pour l'ellipse).

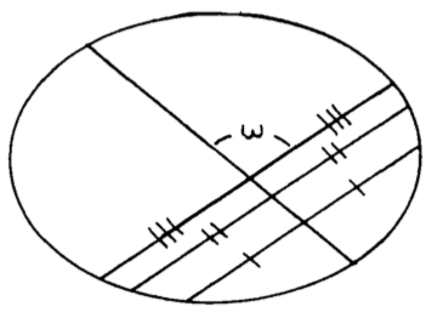

Figure 1

Cette notion est historiquement liée à la conception moderne de coordonnées. Apollonius appelle *diamètre* d'une courbe toute ligne droite qui coupe en deux parties égales tout segment de droite mené entre deux points de la courbe et ayant une direction fixée. Il appelle les moitiés de ces segments les *ordonnées* correspondant à ce diamètre. Il est évident que toute ligne droite passant par le centre d'un cercle est un diamètre (dans le sens d'Apollonius) de ce cercle, et que les ordonnées correspondantes sont les segments de droite entre le diamètre et le cercle qui sont perpendiculaires à ce diamètre.

[4]Cet exposé est un résumé de mon article ‹‹ Desargues' *Brouillon Project* and the *Conics* of Apollonius ›› (voir la bibliographie).

Apollonius démontre dans le premier livre de ses *Coniques* un théorème analogue pour les sections coniques. Pour une ellipse[5], il existe un point, le *centre* de cette ellipse, tel que chaque ligne droite passant par le centre sera un diamètre de l'ellipse. Les ordonnées correspondant à ce diamètre seront toujours parallèles aux tangentes par les deux points d'intersection du diamètre avec l'ellipse. Apollonius démontre l'existence et l'unicité de ces tangentes d'une manière rigoureuse. Pour la parabole et l'hyperbole, Apollonius prouve des théorèmes analogues: une parabole a une série de lignes parallèles comme diamètres; pour toute hyperbole, il existe un point (le centre) tel que toute droite passant par le centre qui coupe l'hyperbole est un diamètre de l'hyperbole (voir le premier livre des *Coniques* pour tous les détails).

Desargues a trouvé la démarche d'Apollonius peu élégante, et c'est la raison pour laquelle nous allons commencer par examiner les démonstrations d'Apollonius.

D'abord, Apollonius démontre (*Coniques* I:7) dans l'espace que chaque section conique a *un* diamètre, qu'il appelle *diamètre principal* (figure 2).

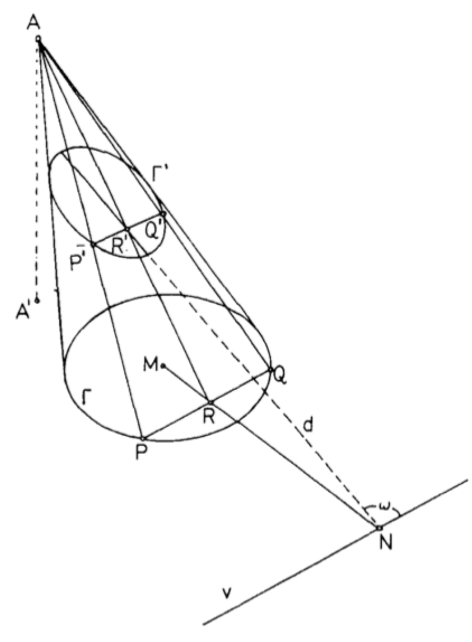

Figure 2

[5] C'est-à-dire une section conique finie (voir ci-dessous pour la nomenclature).

Supposons que la section conique est l'intersection du cône avec un plan Γ', qui coupe le plan de la base Γ du cône en une droite v (si Γ et Γ' sont parallèles, l'intersection est un cercle, cas qui ne nous intéresse pas). Il mène une perpendiculaire MN du centre M du cercle de la base à la droite v. L'intersection du plan passant par M, N et le sommet A du cône coupe le cône selon un triangle (qu'il appelle *triangle par l'axe*, l'axe étant AM) et le plan Γ' selon une ligne d. Prenons un segment de droite $P'Q'$, où P' et Q' sont des points sur la section conique, et $P'Q'$ étant parallèle à v. Appelons R' le point d'intersection de $P'Q'$ avec d. Les droites AP', AQ' et AR' coupent la base du cône aux points P, Q et R. Puisque PQ et $P'Q'$ sont parallèles, PQ est perpendiculaire à MN, donc $PR = RQ$. Par similitude, $P'R' = R'Q'$. On en conclut que d est un diamètre, le *diamètre principal* de la section conique, et que ses ordonnées sont parallèles à la droite v.

Il est important de remarquer ici que l'angle (constant) ω entre le *diamètre principal* d et ses ordonnées $P'R'$ etc. n'est en général pas un angle droit. C'est le cas seulement si la projection perpendiculaire A' du sommet A sur le plan Γ de la base se trouve sur la droite MN.[6]

Supposons maintenant que d coupe la section conique en deux points B et D (figure 3, dans laquelle le cône et les *primes* de P, R sont omis).

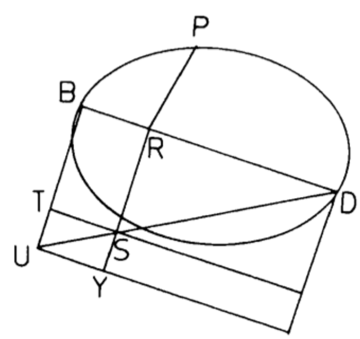

Figure 3

Dans la proposition 13 du livre 1, Apollonius construit, à partir du cône et du plan Γ', un certain segment $p = BU$, perpendiculaire à BD, tel que, pour toute ordonnée PR qui correspond au diamètre d, le carré de PR est égal au rectangle $BRST$, dont un côté est l'abscisse BR et l'autre la perpendiculaire

[6]Plusieurs historiens modernes ne semblent pas avoir compris que ω n'est en général pas un angle droit. Voir note 9 ci-dessous.

RS, où S est sur la diagonale UD et RS est perpendiculaire à d. Apollonius appelle ce rectangle ‹‹le rectangle RT appliqué suivant la droite UB, ayant la droite BR comme largeur, et *diminué* de la figure TY, semblable au rectangle délimité sous les droites DB, BU››[7]. Apollonius donne à cette section conique le nom *elleipsis*, ce qui signifie *diminution*.

La relation $PR^2 = BRST$ de *Coniques* I:13 peut aussi être exprimée comme suit:
$PR^2 = p \cdot RB - \frac{p}{BD} RB^2$. Cette équation rappelle l'équation moderne de l'ellipse sous la forme $y^2 = p \cdot x - \frac{p}{a} x^2$.[8]

Apollonius définit C comme le milieu de BD (figure 4).

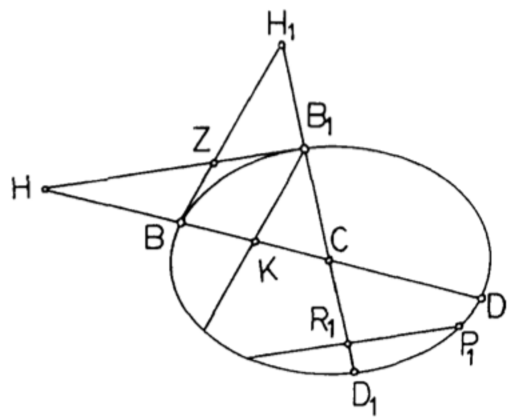

Figure 4

Il veut démontrer que toutes les autres lignes droites passant par C sont aussi des diamètres de l'ellipse. Il prouve les théorèmes suivants d'une manière purement planimétrique, ce qui veut dire que le cône n'intervient plus dans les démonstrations, qui reposent entièrement sur la relation $PR^2 = BRST$ de *Coniques* I:13.

- L'ordonnée par C est un diamètre de l'ellipse, et les ordonnées correspondant à ce diamètre sont parallèles à BD (*Coniques* I:15).

[7] C'est-à-dire le rectangle $BRYU$ diminué du rectangle $TSYU$ (Voir Ver Eecke p. 30; les notations sont adaptées à la figure 3).

[8] Il est à remarquer que les 'coordonnées' sont chez Apollonius en général obliques ($\omega \neq 90^o$).

- La droite par B parallèle aux ordonnées PR de la figure 3 est tangente à la section conique, c'est-à-dire que B est le seul point commun de cette droite avec l'ellipse et que chaque autre droite par B qui n'est pas parallèle aux ordonnées coupe l'ellipse en un point différent de B (*Coniques* I:17,32).

- Apollonius considère l'ordonnée KB_1 par un point K sur le segment BD qui ne coïncide pas avec C, B ou D, et il choisit un point H sur l'extension rectilinéaire de BD, comme dans la figure 4. La droite B_1H a un seul point (B_1) commun avec l'ellipse si et seulement si $DK : KB = DH : HB$ (*Coniques* I:34,36). Il suit que l'ellipse a une tangente en B_1.

- Supposons maintenant que $DK : KB = DH : HB$, de sorte que B_1H sera la tangente. La droite B_1D_1 par C est un diamètre de l'ellipse et les ordonnées correspondantes (comme P_1R_1 dans la figure 4) sont parallèles à la tangente B_1H (*Coniques* I:47).

- Apollonius définit un segment p' perpendiculaire à B_1D_1 par la relation $\frac{p_1}{2B_1H} = \frac{ZB_1}{B_1H_1}$, où Z et H_1 sont les intersections de la tangente par B avec la tangente par B_1 et le diamètre B_1D_1. Il démontre que si $P'Q'$ est une ordonnée correspondant au nouveau diamètre B_1D_1, le carré de P_1R_1 est égal à un rectangle $BR_1S_1T_1$, défini comme $BRST$ dans la figure 3 (*Coniques* I:50). Cette relation peut donc être écrite comme $P_1R_1^2 = p_1 \cdot R_1B_1 - \frac{p_1}{B_1D_1}R_1B_1^2$.

A la fin de *Coniques* I:51, Apollonius remarque:

> «Il est manifeste que toutes les choses démontrées plus haut comme se présentant dans les sections rapportées aux diamètres principaux se présentent encore si l'on adopte d'autres diamètres» (Ver Eecke, p. 96).

Autrement dit, le diamètre principal a perdu sa position privilégiée, car tous les autres diamètres ont exactement les mêmes propriétés. Il est aussi facile de voir que pour tout diamètre de l'ellipse, on peut trouver un cône qui coupe le plan de cette ellipse de sorte que ce diamètre soit le *diamètre principal*.

Plusieurs historiens n'ont pas compris l'essence de cette démonstration, lourde il est vrai, d'Apollonius, et ont conséquemment mal interprété les rapports entre Apollonius et Desargues.[9]

Desargues n'aimait pas la position privilégiée du diamètre principal dans les démonstrations d'Apollonius. Dans une lettre au Père Mersenne du 4 avril 1638, il dit:

> j'ay trouvé que ... par un seul et mesme discours ... on voit ... une pareille generation en toutes especes de plates coupes de cones, de toutes especes de lignes droites qui ont et reçoivent des ordonnées, comme diametres et autres[10] ... sans employer pour cela aucun des triangles par l'essieu ny faire distinction d'un principal diametre d'avec les autres (Taton, pp. 83-84).

Apollonius n'a pas pu obtenir tous les diamètres en même temps que le diamètre principal pour la raison suivante. On considère la projection centrale ayant comme centre le sommet A du cône. Dans la figure 2, le diamètre principal d de la section conique est la projection du diamètre MN du cercle de la base. Par contre, le centre de l'ellipse n'est en général pas la projection du centre M du cercle. En conséquence, les autres diamètres de la section conique ne sont pas les projections des autres diamètres du cercle.

Dans le *Brouillon Project* de 1639, Desargues a surmonté cette difficulté grâce à ses notions nouvelles de point à l'infini et de droite à l'infini. Nous allons ci-après décrire l'idée fondamentale de sa généralisation; toutefois nous n'y suivrons pas l'ordre du texte du *Brouillon Project*.

Dans ses définitions de diamètre et d'ordonnées, Apollonius s'intéresse à trois points P, R, Q collinéaires tels que $PR = RQ$. Desargues va, lui,

---

[9] M. Chasles dit dans son *Aperçu*, p. 79: ‹‹C'est que ce théorème [un théorème de Desargues], par sa nature, permettait à Desargues de considérer, sur un cône à base circulaire, des sections tout à fait arbitraires, sans faire usage du triangle par l'axe, comme le dit Pascal; tandis que les Anciens, et tous les écrivains après eux, n'avaient coupé le cône que par des plans perpendiculaires à ce triangle par l'axe. Cette grande innovation nous paraît être le principal mérite du traité des coniques de Desargues››. Chasles pense que le plan Γ' est toujours perpendiculaire au triangle par l'axe AMN, c'est-à-dire que $\omega = 90^o$. En conséquence, il pense que le *diamètre principal* est toujours un axe de la section conique.

Taton dit (p. 166, note): ‹‹La figure [de Desargues] est faite dans le cas d'un diamètre principal dans le seul but de pouvoir s'appliquer également au théorème suivant relatif aux foyers››. Comme Chasles, Taton pense que le diamètre principal est toujours un axe de la section conique. Cette erreur est répétée dans le commentaire mathématique de Field and Gray, p. 57.

[10] La définition d'ordonnées de Desargues est plus générale que celle d'Apollonius, voir ci-dessus, et voir Taton p. 84, note.

s'intéresser à quatre points collinéaires P, Q, R, S tels que $PR : RQ = PS : SQ$. Il appelle ces quatre points (ou, plus précisément, les deux paires P, Q et R, S) *quatre points en involution*. Si le point S est à l'infini, on a $PR : RQ = 1{:}1$, de sorte que $PR = RQ$. La relation d'Apollonius $PR = RQ$ devient un cas particulier de la relation plus générale de Desargues, si on ajoute le point S à l'infini.

Pour quatre points situés dans le fini, les géomètres grecs ont connu la relation que Desargues appelle *quatre points en involution* (voir la *Collection Mathématique* de Pappus d'Alexandrie, Livre VII, prop. 131, ed. Jones pp. 264-267). Mais comme il n'y a pas chez eux la moindre trace de l'idée de points à l'infini, ils n'ont pas pu concevoir la relation $PR = RQ$ comme cas particulier de quatre points en involution.

L'idée générale de quatre points en involution a l'avantage suivant. Si on considère trois points P, R et Q sur une droite ℓ tels que $PR = RQ$, et si on les projette à partir d'un centre A sur une droite ℓ', on a en général $P'Q' \neq Q'R'$; $P'Q$ et $Q'R'$ sont égales seulement si l et l' sont parallèles (comme dans la figure 2). Par contre, si on projette de la même manière quatre points P, Q, R et S en involution (dont un point peut être à l'infini) sur une droite ℓ sur quatre points P', Q', R' et S' d'une autre droite ℓ', les points P', Q', R' et S' sont eux aussi quatre points en involution, comme Desargues le démontre. Si le point S est à l'infini, le point S' ne l'est pas, sauf si ℓ et ℓ' sont parallèles.

Au moyen de sa relation de quatre points à l'infini, Desargues généralise les notions d'Apollonius de diamètre et d'ordonnées de la manière suivante.

On considère un cercle ou une section conique fixée (figures 5, 6).

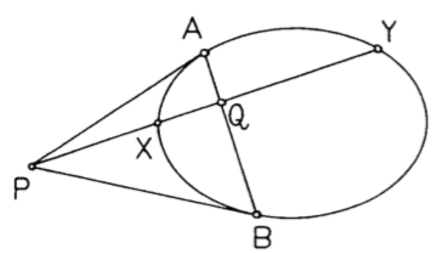

Figure 5

Une droite ℓ est appelée *traversale* avec comme *but* le point P si pour toute ligne droite passant par P qui coupe la droite ℓ en Q et la section conique en X et Y, les deux paires P, Q, et X, Y sont quatre points en involution. Desargues appelle les droites $PXQY$ les *ordonnées* correspondant à cette *traversale.* Le *traversale* et le *but* correspondent aux notions modernes de polaire et de pôle.

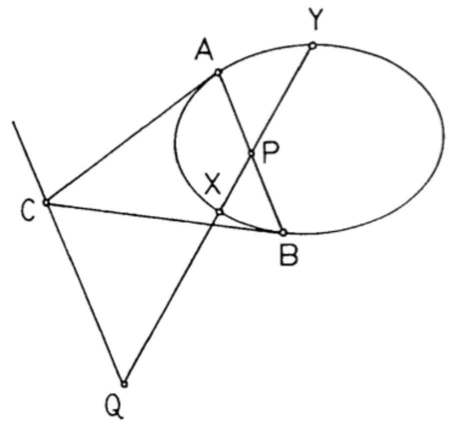

Figure 6

Il suit immédiatement des théorèmes *Coniques* III:37-38 que pour tout point P qui n'est pas sur la circonférence de la section et qui ne coïncide pas avec le centre, mais qui est en dehors de la section (prop. 37, figure 5) ou dans l'intérieur de la section (prop. 38, figure 6) il existe une ligne droite ℓ telle que (dans la terminologie de Desargues) ℓ est *traversale* de la section conique et P est le *but* correspondant. Dans la figure 5, $\ell = AB$, et dans la figure 6, $\ell = QC$.[11]

Naturellement, le point P ne peut pas être à l'infini pour Apollonius. Si pour Desargues, le point P est à l'infini, les lignes $PXQY$ sont toutes parallèles, et on a $XQ = QY$. Dans ce cas, AB devient un diamètre d'Apollonius, et les *ordonnées* de Desargues deviennent les *ordonnées* d'Apollonius.[12]

Apollonius démontre que pour toute section conique, il existe un point (le centre) tel que toute ligne droite qui passe par ce point est un diamètre de la section conique. Pour traduire ce théorème dans le langage des *traversales, buts* et *ordonnées*, Desargues s'est demandé si le centre pouvait être considéré comme le *but* d'une *traversale.* Supposons que P est le centre et qu'il existe une ligne droite $PXQY$ coupant d'une part la section conique en X et en

[11] Desargues ne suit pas la méthode de démonstration d'Apollonius.

[12] C'est sans doute la raison pour laquelle Desargues a utilisé le mot *ordonnées.*

Y et d'autre part une droite ℓ (qui sera la *traversale*) en Q de telle manière que les paires P, Q et X, Y soient quatre points en involution. Puisque P est le centre, on a $PX = PY$, de sorte que Q doit être un point à l'infini. En conséquence, la *traversale* ℓ du centre P est la ligne droite à l'infini. Grâce à la notion de droite à l'infini, Desargues a ainsi pu concevoir le théorème d'Apollonius comme conséquence immédiate des théorèmes généraux suivants (voir aussi la première citation de Desargues ci-dessous):

1. Tout point P qui n'est pas sur la circonférence de la section conique est le *but* d'une *traversale* ℓ, et toute droite ℓ qui n'est pas tangente à la section conique est la *traversale* d'un *but* P.

2. Si un point P est le *but* d'une *traversale* ℓ, un point Q est sur ℓ si et seulement si la *traversale* de Q passe par P (c'est un théorème bien connu dans la théorie moderne des pôles et polaires d'une section conique).[13]

Lorsque ces deux théorèmes ont été démontrés, on peut définir le centre d'une section conique comme *but* P de la droite ℓ à l'infini. Si une droite d passe par P, son *but* Q doit être sur ℓ, d'où il suit que d est un diamètre dans le sens d'Apollonius.

Toute section conique peut être obtenue comme intersection d'un cône (à base circulaire) avec un plan, c'est-à-dire comme projection centrale du cercle à la base du cône. Si on démontre les théorèmes (1) et (2) pour ce cercle, il suit immédiatement que ces théorèmes sont valables pour une section conique, parce que tout dépend de la relation de *quatre points en involution*, qui est invariante par projection.

Ici se termine ma description de l'idée de base de Desargues. En réalité, la démarche de Desargues dans son *Brouillon Project* est encore plus générale. Desargues démontre un théorème pour le cercle qui est moins particulier que (1) et (2), et que les mathématiciens modernes ont appelé *théorème de Desargues pour un quadrangle inscrit*. Ce théorème concerne une relation entre six points collinéaires, relation que Desargues appelle *six points en involution*, et dont la relation de *quatre points en involution* est un cas particulier. Si on projette *six points en involution*, leurs projections sont aussi *six points en involution*.

Le théorème de Desargues pour un quadrangle inscrit dans un cercle devient le suivant (figure 7).

[13] On peut déduire de *Coniques* III:38 quelques cas particuliers de ce théorème.

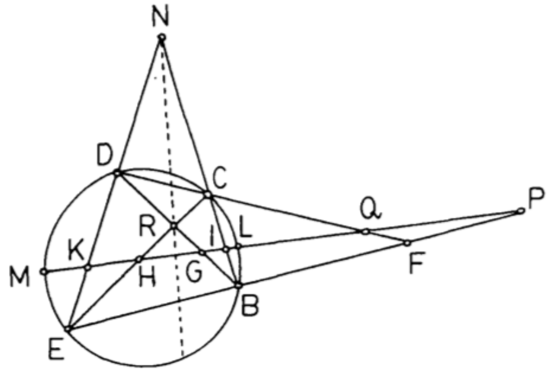

Figure 7

Soient D, C, B et E quatre points arbitraires sur la circonférence d'un cercle et R, F et N les points d'intersection respectifs de BD et EC, BE et DC, BC et DE; traçons une droite arbitraire qui coupe BE, DC, BC, BD, EC, DE en P, Q, I, G, H, K et le cercle en L et M, et considérons les paires $P, Q; I, K; G, H; L, M$; alors toute combination des trois paires forme six points en involution (c'est-à-dire que $\frac{PI \cdot PK}{QI \cdot QK} = \frac{PG \cdot PH}{QG \cdot QH}$ etc.). Puisque les projections centrales de six points collinéaires en involution sont aussi six points en involution, le théorème reste valable pour toute section conique. Desargues en déduit (1) et (2) pour toute section conique.

Bien que les *Coniques*, ou plus précisement, le désir d'améliorer les *Coniques*, eût été une motivation importante pour Desargues, il faut souligner que le *Brouillon Project* contient aussi des théorèmes sur les sections coniques qui n'étaient pas inspirés directement par les *Coniques* (comme le théorème sur le quadrangle inscrit ci-dessus). Quelques-uns de ces théorèmes vont bien au-delà de ce que l'on trouve dans les *Coniques*.

Dans le *Brouillon Project*, Desargues fait mention des *Coniques* une fois seulement (Taton, p. 178). Néanmoins, l'influence des *Coniques* est bien visible par quelques références implicites du *Brouillon Project*, comme le montrent les deux exemples suivants[14]. (Desargues utilise le terme *coupe de rouleau* pour section conique, un *rouleau* étant un cône ou un cylindre).

> (1) Quand en un plan, aucun des poincts d'une droicte n'y est à distance finie, cette droicte y est à distance infinie. Dautant qu'en un plan le poinct nommé centre d'une coupe de rouleau

[14]Pour d'autres exemples, voir mon article ⟨⟨Desargues' *Brouillon Project* and the *Conics* of Apollonius⟩⟩, pp. 24-26.

> n'est qu'un cas d'entre les innombrables buts d'ordonnance de droictes, il ne doit estre icy jamais parlé de centre de coupe de rouleau (Taton, p. 140).
>
> (2) D'où suit qu'au plan d'une quelconque coupe de rouleau toute droicte à l'égard de cette coupe est traversale de droictes ordonnées à quelque but dont une diametrale, autrement diametraversale, n'est qu'un cas. Et que tout point à l'égard de cette coupe y est le but de quelques droictes ordonnées d'une traversale dont le but des diametrales n'est qu'un cas (Taton, p. 154).

Il est aussi intéressant de remarquer que Desargues donne, vers la fin du *Brouillon project*, la construction suivante, mathématiquement superflue, dont le seul but est de remplacer les propositions du premier livre des *Coniques* (comme I:7, figure 2) par une construction stéréometrique de *tous* les diamètres de la section conique en même temps (figure 8)[15]:

> Estant donnée de grandeur & de position une quelconque coupe de rouleau à bord courbe E, D, C, B pour assiette ou base d'un quelconque rouleau, dont le sommet soit aussi donné de position, & qu'un autre plan en quelconque position aussi donnée coupe ce rouleau, & que l'essieu[16] 4,5, de l'ordonnance de ce plan de coupe avec le plan d'assiette ou base soit aussi donné de position, la figure qui vient de cette construction en ce plan de coupe est donnée d'espece & de position, ...
>
> Car ayant par le sommet de ce rouleau mené un plan parallel au plan de coupe, ce plan de sommet donne au plan de l'assiette du rouleau une droicte NH, parallele à la droicte 4,5, laquelle NH, est traversale d'une ordonnance de droictes ML, BC, TV, dont le but F, est donné de position.
>
> Et la droicte menée par le sommet du rouleau & ce but F est l'essieu de l'ordonnance des plans qui engendrent les diametrales de la figure que cette construction donne au plan de coupe dont

[15] Desargues donne une figure plus compliquée, qui sert à illustrer plusieurs théorèmes de son *Brouillon Project*.

[16] C'est-à-dire l'intersection du plan de section avec le plan de la base.

la droicte[17] qui passe au sommet & au but des diametrales de la base du rouleau n'est qu'un cas (Taton, p. 158).

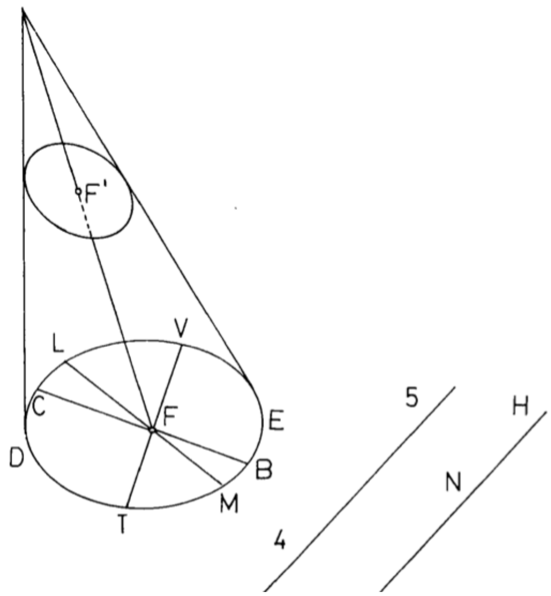

Figure 8

Dans cette proposition, Desargues construit le centre d'une section conique directement dans le cône. Le plan de la section coupe le plan de la base selon une droite $4, 5$ (Desargues utilise les chiffres 4 et 5 pour indiquer les points dans la figure). Il mène un plan par le sommet, parallèle au plan d'intersection; ce plan coupe le plan de la base en une droite NH qui sera parallèle à $4, 5$. Il construit le pôle F de la droite NH par rapport au cercle[18] de la base. Notons que ce pôle est sur la droite par le centre du cercle perpendiculaire à NH, de sorte que le plan passant par le sommet, le centre du cercle et le point F coupe le cône selon le *triangle par l'axe* d'Apollonius. Si la droite passant par F et le sommet coupe le plan de la section en F', ce point F' sera le pôle (le *but*) dont la polaire (la *traversale*) est la projection de MN à partir du sommet sur le plan de la section. Puisque MN est parallèle au plan de la section, cette projection est la droite à l'infini. En conséquence,

[17]Desargues aurait dû dire: le plan, c'est-à-dire le plan par le sommet du cône, le centre de la section conique et le centre de la base. C'est le plan du triangle par l'axe dans la terminologie d'Apollonius.

[18]Ici, la base peut aussi être une section conique arbitraire.

F' est le centre de la section conique. L'intersection du plan de la section conique avec le plan passant par F, le sommet et le centre du cercle à la base est le 'diamètre principal' d'Apollonius. Dans *Coniques* I:7, Apollonius a pu construire seulement le diamètre principal d'une section conique dans le cône. Dans la proposition ci-dessus, Desargues a pu montrer, au moyen de ses notions nouvelles de point à l'infini et de droite à l'infini, que tous les diamètres de la section conique pouvaient être construits en même temps. Une grande simplification de la théorie d'Apollonius a ainsi été achevée.

Je remercie J. Sesiano (Lausanne) qui a bien voulu lire et corriger le texte de cet article.

Bibliographie.

R. Bkouche. Desargues au XIX^{e} siècle. L'influence d'un livre non lu, pp. 207-217 dans: J. Dhombres et al. (edd.) *Desargues et son temps.* Paris (Albert Blanchard), sans date.

R. Bkouche. La naissance du projectif. De la perspective à la géométrie projective, pp. 239-285 dans: R. Rashed (ed.) *Hommage à Jules Vuillemin.* Paris (sans date).

J. Field, J. Gray, *The geometrical work of Girard Desargues.* New York etc. (Springer) 1987.

J.P. Hogendijk. Desargues' *Brouillon Project* and the *Conics* of Apollonius. *Centaurus* **34** (1991), 1-43.

A. Jones. *Pappus of Alexandria. Book 7 of the* Collection. New York etc. (Springer), 1986.

R. Taton. *L'Oeuvre Mathématique de G. Desargues. Textes publiés avec une introduction biographique et historique.* Paris (Presses Universitaires de France) 1951.

P. Ver Eecke. *Les Coniques d'Apollonius de Perge. Ouvrages traduites pour la première fois du Grec en Français avec une introduction et des notes.* Paris (Albert Blanchard), nouveau tirage, 1963.