



نشر ریاضی

سال ۸، شماره ۱

تاریخ انتشار: اسفند ۱۳۷۵

شماره پیاپی: ۱۵

nashriaz@rose.ipm.ac.ir

مدیر مسؤول: سیاوش شهشهانی

• هیأت ویراستاران:

محمد اردشیر

یحیی تابش

سیاوش شهشهانی

سیامک کاظمی

امیدعلی کرمرزاده

کاوه لاجوردی

• مشاوران این شماره:

محمد باقری، عطاءالله تقاء (آمریکا)، محمدهادی شفیعیها،
علی عمیدی، همایون معین، بهرنگ نوحی (آمریکا)، حمید
وحید، منوچهر وصال

• دستیارفنی: زهرا دلآوری

• طراح: آزاده اصغری

• ناظر چاپ: علی صادقی

• حروفچینی و صفحه‌آرایی: مرکز نشر دانشگاهی

مریم ابراهیم‌آبادی، مریم طاهریان

• لیتوگرافی: مردمک

• چاپ و صحافی: محمدامین (خیابان آزادی-بلوار استاد معین)

فهرست

گزارش

۲

مقاله‌ها

مفهوم رشد در گروهها

۶

محمد ممقانی

دریچه‌ای به حلقه‌های تقسیم

۱۸

سعید اکبری

اثباتی مقدماتی از قضیه اعداد اول

۲۶

نورمن لوینسن

نیوتن دقیقاً چگونه مدارهای سیارات را بررسی کرد؟

۳۷

شرمن استاین

نگاهی به ریاضیات در اسپانیای دوره اسلامی

۴۳

یان هوخندایک

مسأله

بعضی از مسأله‌های محبوب من

۵۰

بال اردوش

مسأله برای حل

۶۱

یحیی تابش

کتاب

تابع زتای ریمان

۶۲

پیتر سرنک

مسأله دهم هیلبرت

۶۴

مجتبی منیری

مسأله ریمان-هیلبرت

۶۶

هلموت رورل

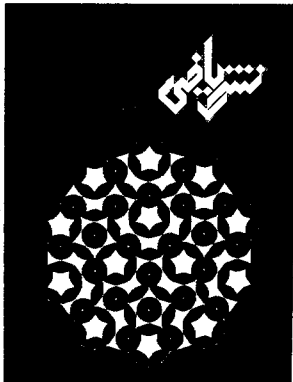
شبه‌بلورها و هندسه

۶۸

چارلز ریدین

دیدگاه

۷۴



روی جلد

نمونه‌ای از آجر فرش پین‌رز

به مناسبت درج مقاله

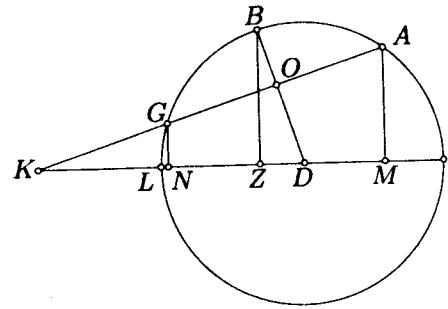
«شبه‌بلورها و هندسه»

کاربردهای ریاضیات در احکام نجوم و هیئت بسیار پیشرفته‌تر از کاربردهای پیش پاافتاده آن در مساحی، امور دیوانی و بازرگانی بود. هفتم از عرضه این دهنمونه (مؤتمن و جیانی) ترسیم نمایی از کار ریاضیدانان اسپانیای اسلامی قرن یازدهم [پنجم] در هندسه و مثلثات بوده است. طی این دوره در ریاضیات هیچ انقلابی صورت نگرفت که با آنچه در دوره باستان و در قرن هفدهم میلادی رخ داد قابل مقایسه باشد. اما با روشهای هندسی دوره باستان و قلمرو شرقی اسلام به صورتی مستقل و خلاق برخورد شد. در این زمینه‌ها، ریاضیدانان اروپای غربی تا فرارسیدن عهد نوزایی از اسلاف خود در اسپانیای اسلامی فراتر نرفتند. بنابراین اسپانیای اسلامی در تاریخ ریاضیات اروپای سده‌های میانه موقعیت منحصر به فردی دارد.

مراجع

1. A. Djebbar, *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XI^e siècle: al-Mu'taman et Ibn Sayyid*, M. Folkerts et al. (eds.), Vestigia Mathematica, Studies in Medieval and Early Modern Mathematics in Honour of H. L. L. Busard. Amsterdam 1993, pp. 79-91.
 2. J. P. Hogendijk, *The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century), an analytical table of contents*, Arch. Internat. Hist. Sci. 41 (1991), 207-281.
 3. ———, *Applied mathematics in 11th century Islamic Spain: Ibn Mu'adh's computation of the astrological houses and rays, to appear in Centaurus*.
 4. A. I. Sabra, *Ibn al-Haytham's lemmas for solving "Alhazen's problem"*, Arch. Hist. Exact Sci. 26 (1982), 299-324.
 5. J. Samsó, *Las Ciencias de los Antiguos en al-Andalus*, Madrid, 1992.
 6. J. P. Hogendijk, "Al-Mu'taman's simplified lemmas for solving 'Alhazen's problem'", in Josep Casulleras, Julio Samsó (eds.), *From Baghdad to Barcelona: Studies in the Islamic Exact Sciences in Honour of Prof. Juan Vernet*, Barcelona: Universitat de Barcelona. 1996 (Anuari de Filologia XIX (1996) B-2), vol. 1, pp. 59-10
 7. M. Villuendas, *La trigonometria europea en el siglo XI. Estudio de la obra de Ibn Mu'ād, El-Kitāb ma'yhūlāt*, Barcelona, 1979.
- *****
- Jan P. Hogendijk, "Mathematics in medieval Islamic Spain", *Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Zürich, Switzerland 1994*, Birkhäuser Verlag, Switzerland (1995) 1568-1580.

* یان پیتر هوخندایک، بخش ریاضی دانشگاه اوترخت، هلند



شکل ۹

AG که در B نصف شده است، و کمان مجهول x را به صورت کمان GL نشان می‌دهیم. مرکز دایره را D می‌نامیم، خطهای AG و DL را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطه K قطع کنند و عمودهای GN و BZ ، AM و BZ را بر DK فرود می‌آوریم. محل برخورد AG و BD را O می‌نامیم. اکنون داریم $\tan(A/2 + x) = BZ : ZD$. با توجه به تشابه مثلثها در شکل، می‌توان نوشت

$$BZ : ZD = KO : OD = (KO : OG) \cdot (OG : OD)$$

همچنین داریم

$$AK : KG = AM : GN = \sin(A + x) : \sin x = c$$

پس

$$KO : OG = (KG + KA) : AG = (c + 1) : (c - 1)$$

بالاخره داریم $OG : OD = \tan A/2$.

در اینجا راه حل مسأله را برای یک حالت خاص شکل بررسی کرده‌ایم. این راه حل قابل تعمیم است: در برخی حالات به جای علامت مثبت در معادله (۱) علامت منفی خواهیم داشت. جیانی این حالت را هم در [۷] بررسی کرده است.

معلوم نیست که آیا جیانی هیچ‌گاه جدولهای نظرات را محاسبه کرد تا آنها را جایگزین جدولهای پیشینیان معروف خود خوارزمی و مجریطی بکند یا نه. اما می‌دانیم که جیانی جدولهایی برای تسویه بیوت در احکام نجوم بر اساس همین روش تدوین کرده است. احکامیان کرة آسمان را به ۱۲ بیت (خانه) تقسیم می‌کردند که شبیه ۱۲ قاج پرتقال بود و طبق نظر جیانی این کار باید به همان روش استوایی که در نظرات به کار می‌رفت انجام می‌شد. کمانهایی از استوا که بین نصف النهار و افق واقع بود باید به سه قسمت ۳۰ درجه‌ای تقسیم می‌شد و از نقاط تقسیم Q' باید نیمدایره‌های $NQ'S$ الی آخر ترسیم می‌شد که مرزهای بیوت بودند. جیانی جدولهایی برای طول سماوی کمانهای VQ به عنوان تابعی از طول سماوی نقطه P روی افق شرقی تنظیم کرد، چنان‌که احکامیان می‌توانستند از روش تسویه بیوت او استفاده کنند.

روشن است که احکام نجوم مسائلی جدی پیش روی ریاضیدانان می‌گذاشت. البته لازم نبود که همه احکامیان از محاسبات ریاضی سر درآورند، اما همیشه لازم بود کسانی با جنبه‌های تخصصی آن آشنا باشند.

کمان VE که «مطلع» P خوانده می‌شود از طریق محاسبه عادی یا با مراجعه به «جدول مطالع» برای عرض جغرافیایی مورد نظر به دست می‌آید. روی استوای آسمانی داریم $EQ = 60^\circ$ ، $EW = 90^\circ$ ، پس با داشتن EV می‌توانیم $Q'V$ و VW را به دست آوریم. با داشتن این کمانها هم می‌توانیم کمانهای زیر را محاسبه یا در جدول پیدا کنیم: VM ، VR (از جدول مطالع مستقیم؛ اینها طولهای مربوط به بعدهای VQ' و VW هستند) و $Q'R$ ، MW (از جدول میلها). از طرف دیگر، $WS = 90^\circ - \phi$ ، پس می‌توان نوشت (کمان WM) - (کمان WS) = (کمان MS). اکنون مقدار این کمیتهای معلوم است: (کمان MS) = a ، (کمان RM) = A ، (کمان $Q'R$) = δ ؛ همچنین می‌دانیم $\phi - 18^\circ = CS$.

مرحله بعدی بحث، فوق‌العاده مهم است.

فرض می‌کنیم (کمان QR) = x . جیبی قضیه کروی متلاوس را به صورت زیر به کار می‌برد:

$$\frac{\sin MQ}{\sin QR} = \frac{\sin MS}{\sin SC} \times \frac{\sin CQ'}{\sin Q'R}$$

متلاوس منجمی یونانی بود که در حوالی سال ۷۰ میلادی [۵۷۰ قبل از هجرت] در رم می‌زیست و متن یونانی کتابش درباره هندسه کروی گم شده ولی ترجمه عربی آن در دست است. خود متلاوس به جای تابع مثلثاتی سینوس، تابع دیگری، یعنی «وتر» را به کار می‌برد که عربها سینوس [=جیب] را که منشأ هندی داشت جایگزین آن کردند. سینوسی که در سده‌های میانه به کار می‌رفت به اندازه یک ضریب ثابت با سینوس امروزی فرق داشت. چون در اینجا با نسبت بین سینوسها سروکار داریم، این ضریب ثابت را می‌توان نادیده گرفت. پس خواهیم داشت

$$\frac{\sin(A+x)}{\sin x} = \frac{\sin a}{\sin \phi} \times \frac{\sin 90^\circ}{\sin \delta}$$

طرف راست این معادله مقدار معلوم c است. پس جیبی باید x را از معادله زیر که در آن A و c معلوم‌اند به دست آورد

$$\frac{\sin(A+x)}{\sin x} = c \quad (1)$$

جیبی در یکی از آثار قبلش [۷] نشان داده بود که چگونه معادله (۱) را می‌توان به معادله زیر تحویل کرد

$$\tan\left(\frac{A}{\psi} + x\right) = \frac{c+1}{c-1} \times \tan \frac{A}{\psi} \quad (2)$$

وی در همان اثر جدولی هم برای تابع تانژانت^۱ به ازای هر درجه تا 89° تنظیم کرده بود^۲. با استفاده از این جدول x را باسانی می‌توان یافت. مسأله فوق داریم $x +$ (کمان RV) = (کمان $Q'V$).

جیبی معادله (۲) را از معادله (۱) با استدلال هندسی زیر به دست آورد (شکل ۹، [۷، شکل ۴]). روی یک دایره میناکمان معلوم A را به صورت کمان

۱. جیبی برای تانژانت نام خاصی نداشت و آن را به عنوان نسبت سینوس به کسینوس ذکر می‌کرد.

۲. همچنین برای هر ربع درجه بین 89° و $89^\circ 45'$.

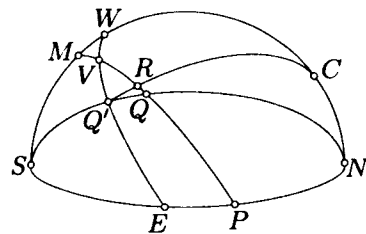
این جدولها بعداً یعنی در حوالی سال ۱۰۰۰ [۳۹۰]، به وسیله مهمترین ریاضیدان اسپانیای اسلامی آن دوره یعنی مسلم بن احمد مجریطی (مجریط صورت معرب مادرید است) برای قرطبه محاسبه شده‌اند. مجریطی جدولهای خوارزمی را برای یک عرض جغرافیایی دیگر و با یک روش ریاضی پیچیده‌تر (اما همچنان تقریبی) مجدداً محاسبه کرد.

اکنون به بحث درباره محاسبه دقیق نظرات کواکب طبق روش استوایی جیبی می‌پردازیم [۳]. او یکی از بهترین ریاضیدانان قرن یازدهم بود که منصب قضاوت نیز داشت. وی در جیبان^۱ [با تلفظ اصلی «خائن»] که در جنوب اسپانیاست زندگی می‌کرد.

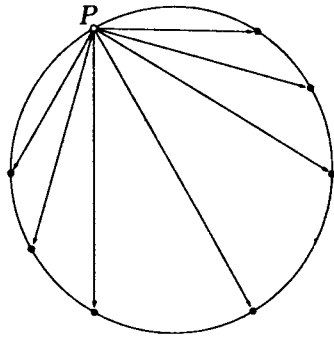
برای سهولت توضیح، فرض می‌کنیم که سیاره P روی افق شرقی قرار دارد و نقطه اعتدال بهاری به نصف‌النهار نزدیک است. حالت کلی هم چندان دشوارتر از این نیست در اینجا به بیان پاره‌ای از محاسبات که در زمان جیبی معمول بود نمی‌پردازیم. و برای وضوح نمادهای امروزی جبر را به کار می‌بریم. منبع من متن عربی منتشرشده‌ای از جیبی درباره «نظرات» کواکب است که نسخه خطی منحصر به فرد آن در اسپانیای (مسیحی) قرن سیزدهم کتابت شده است.

شکل ۸ ربعی از کره آسمان را که بالای افق و در طرف شرق نصف‌النهار است نشان می‌دهد. همه کمانهای این شکل، کمانهای دایره‌های عظیمه یعنی فصل مشترک کره با صفحه‌های گذرنده از مرکز آن هستند. نقاط S ، E ، N ، N' ، P' «تصویر» آن بر نقطه شرق یعنی E می‌افتد. نقطه C قطب شمال آسمانی است. $NCWMS$ نصف‌النهار است که دایره البروج را در M و استوای آسمانی WVE را در W قطع می‌کند. نقطه V ، نقطه اعتدال بهاری است. پس $\angle PVE = \epsilon$ ، همان میل دایره البروج است که در نجوم عربی مقدارش را معمولاً $23^\circ 35'$ می‌گرفتند. همچنین $\phi - 90^\circ = \angle VES$ که در آن ϕ عرض جغرافیایی است که آن هم معلوم فرض می‌شود (فرض بر آن است که محل راصد در نیمکره شمالی، بین استوا و دایره شمالگان است). توجه کنید که $\phi = CN$. همچنین فرض می‌کنیم که کمان VP یعنی طول ستاوی P معلوم است.

برای محاسبه نظر «تسدیس راست» P ، کمان EQ' را برابر با 60° روی استوای آسمانی جدا می‌کنیم و نیمدایره $SQ'N$ را رسم می‌کنیم تا دایره البروج را در Q قطع کند. اکنون می‌خواهیم VQ را محاسبه کنیم. جیبی کمان CQ' را رسم می‌کند تا دایره البروج را در نقطه R قطع کند. چون C قطب شمال آسمانی است و Q' بر استوا قرار دارد، $\angle CQ'V$ قائمه است.



شکل ۸

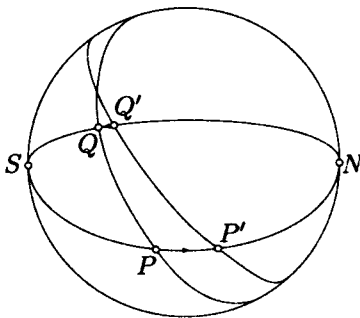


شکل ۶

می‌نامیم. مفهوم این اصطلاح به قرار زیر است. ابتدا سیاره P را که بر دایره البروج واقع است بر نقطه P' که برخوردگاه استوای آسمانی^۱ با نیمدایره عظیمه گذرنده از P و نقطه شمال N و نقطه جنوب S بر افق است، تصویر می‌کنیم. از P' زاویه‌های ۶۰° ، ۹۰° ، ۱۲۰° ، ۱۸۰° را روی استوای آسمانی در هر دو طرف جدا می‌کنیم (در شکل ۷ داریم $\angle P'Q' = ۶۰^\circ$). برای هر یک از هفت نقطه Q' که به این روش پیدا می‌کنیم، تصویر وارون به دست می‌آوریم: نیمدایره عظیمه $NQ'S$ را می‌کشیم و برخوردگاه آن را با دایره البروج Q می‌نامیم. بدین ترتیب، بر اساس روش «استوایی»، سیاره واقع در نقطه P هفت شعاع نظر به هفت نقطه Q می‌تاباند.

اگر $P'Q'$ برابر با ۶۰° ، ۹۰° ، یا ۱۲۰° باشد، کمان PQ مقدار متغیری دارد که تنها وابسته به طول سماوی P نیست، و گرچه عجیب می‌نماید، به عرض جغرافیایی راصد و وقت (محلی) نیز بستگی دارد. (پس به این نتیجه نسبتاً غریب می‌رسیم که تابش شعاعهای نظر هر سیاره از دیدگاه راصدهای مختلف روی زمین متفاوت است. ظاهراً احکامیان اشکالی در این امر نمی‌دیدند.)

روش «استوایی» تعیین نظرات کواکب علی‌رغم دشواریش (یا شاید درست به همین سبب) کاملاً رایج بود. در قرن نهم [سوم] خوارزمی جدولهایی برای محاسبه نظرات کواکب طبق روش استوایی، با استفاده از تقریبی خام، برای بغداد تهیه کرد. این خوارزمی همان ریاضیدان معروفی است که کتابی در جبر نوشته است و اصطلاح ریاضی الگوریتم صورت تحریف‌شده نام او است.



شکل ۷

۶. جتانی و مفهوم «نظرات کواکب» در احکام نجوم

داشتن تصور روشنی از وضع ریاضیات در اسپانیای اسلامی بدون توجه به کاربردهای آن در نجوم و احکام نجوم میسر نیست. برای نمونه، مسأله‌ای علمی از احکام نجوم را که به وسیله ابوالقاسم محمد ابن معاذ جتانی ریاضیدان قرن یازدهم [پنجم] حل شده است^۱، مطرح می‌کنم. احکام نجوم امروزه شبه علم به شمار می‌آید، ولی در تاریخ ریاضیات سده‌های میانه بسیار مهم بود، زیرا یکی از زمینه‌های عمده‌ای بود که ریاضیات در آن کاربرد مشخص داشت. ابتدا چند نکته مقدماتی از نجوم را یادآوری می‌کنم.

در نظریه‌های سیاره‌ای دوره باستان و سده‌های میانه، مواضع سیارات بر کره آسمان، با مختصاتی به نام «طول سماوی» و «عرض سماوی» بیان می‌شد. در اینجا دایره اصلی مبدأ، دایره البروج یعنی مسیر ظاهری خورشید حول زمین در زمینه ثابت است. نقطه صفر روی دایره البروج، نقطه اعتدال بهاری، یعنی موضع خورشید در آغاز بهار، و طول سماوی هر سیاره کمان بین نقطه اعتدال بهاری و تصویر قائم سیاره بر دایره البروج است. این کمان در جهت حرکت خورشید اندازه‌گیری می‌شود. در اینجا به عرض سماوی یعنی کمانی که اندازه انحراف سیاره از دایره البروج را نشان می‌دهد کاری نداریم. در دوره اسلامی، نظریه قابل قبولی برای پیش‌بینی طول سماوی خورشید، ماه و سیارات روی دایره البروج در هر مکان و در هر لحظه از زمان وجود داشت و کتابچه‌های فراوانی در توضیح محاسبات لازم، شامل جدولهای مورد نیاز برای این کار موجود بود. هر چند که نجوم آن دوره زمین مرکزی — و نه خورشید مرکزی — بود، این امر بر دقت پیش‌بینی‌های مذکور اثر نمی‌گذاشت.

اکنون به توضیح مفهوم «نظر»^۲ در احکام نجوم می‌پردازیم. فرض اساسی احکام نجوم سده‌های میانه این بود که خورشید، ماه و سیارات بر حوادث روی زمین اثر می‌گذارند و از موقعیت این اجسام آسمانی می‌توان آینده را با میزانی از احتمال پیش‌بینی کرد. این پیش‌بینی‌ها بسیار پیچیده بودند و یکی از چیزهای مختلفی که در احکام نجوم باید در نظر گرفته می‌شد، صورت‌تندیهای خاص بین سیارات بود که آنها را نظرات کواکب می‌نامیدند. مفهوم این اصطلاح بدین قرار است. احکامیان معتقد بودند که هر سیاره از موضع خود بر دایره البروج هفت «شعاع نظر» به سوی سایر نقاط دایره البروج می‌تاباند. (بر اساس نظریه باستانی رؤیت، انسان از طریق تاباندن شعاعهای نظر از چشم خود، و نه به خاطر ورود نور به چشمش اشیا را می‌بیند.) اگر سیاره دیگری به اندازه کافی به انتهای این شعاع نظر نزدیک باشد، به وسیله سیاره اول «دیده» (در لاتین adspectus) می‌شود، و در این صورت می‌گویند دو سیاره ناظر به یکدیگرند.

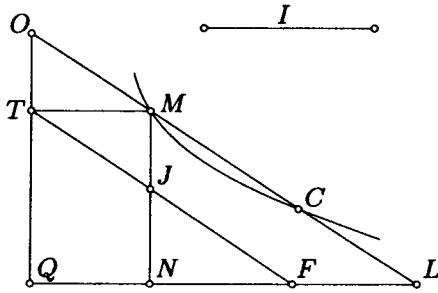
برای محاسبه نظرات سیاره‌ها دو روش وجود داشت. بر اساس روش ساده‌تر، این هفت شعاع به نقاطی از دایره البروج با فواصل زاویه‌ای ۶۰° ، ۹۰° ، ۱۲۰° ، ۱۸۰° در هر دو جهت می‌تابیدند (شکل ۶). پس دو سیاره ناظر به یکدیگرند اگر تقاضل طولهای سماوی آنها ۶۰° الی آخر باشد. این روش به مسأله‌های ریاضی جالبی منجر نمی‌شود.

بسیاری از احکامیان دوره اسلامی، به دلایلی که بر من روشن نیست، روش پیچیده‌تری را قبول داشتند که من آن را روش «استوایی» تعیین نظرات

۱. برای اطلاع بیشتر درباره جتانی نگاه کنید به: ابوالقاسم قربانی، زندگینامه ریاضیدانان دوره اسلامی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران، ۱۳۴۵، صص ۲۱۷، ۲۱۸ — م.

۲. ابوریحان بیرونی در التفهیم (چاپ هاشمی، بابک، تهران، ۱۳۶۲، ص ۳۴۵) معادل فارسی «نگریستن» را برای نظر به‌کار برده است — م.

۱. استوای آسمانی برخوردگاه کره آسمان است با صفحه‌ای که از محل ناظر بر محور عالم یعنی بر خط گذرنده از قطبهای شمال و جنوب آسمان عمود شود.



شکل ۳

و $TF = ML$ پس $FJ = ML - OM$. طبق خاصیتی از هذلولی داریم: $OM = CL$. پس $FJ = MC = I$. توجه کنید که این مسئله را با خطکش و پرگار نمی‌توان حل کرد.

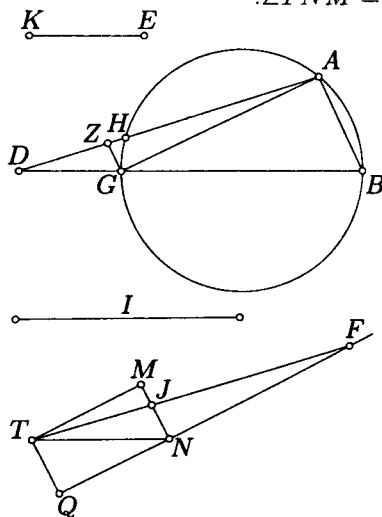
این هیشم هندسه‌دان مصری، در حوالی سال ۱۰۴۰ [۴۳۰] این ترسیم را به صورت نسبتاً پیچیده‌ای جزو یک رشته قضایای مقدماتی برای مطالعه بازتاب در آینه‌های کروی در کتاب مناظر خود به کار برد.

این هیشم دایره‌ای به قطر مفروض BG و نقطه مفروض A را بر این دایره در نظر می‌گیرد (شکل ۴). پاره خط EK نیز مفروض است. او می‌خواهد خط راستی گذرنده از A رسم کند که دایره را در H و قطر را در D قطع کند به طوری که $DH = EK$. نقطه D خارج از دایره فرض می‌شود.

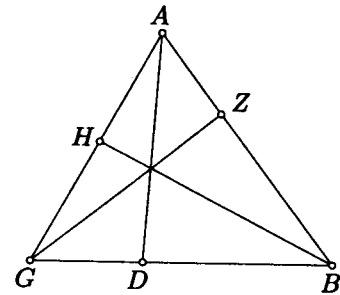
ایده اصلی کار بدین قرار است. ابتدا DH را دلخواه فرض می‌کنیم. این هیشم خط GZ را موازی با BA می‌کشد که DH را در Z قطع می‌کند. او نشان می‌دهد که $BG : DH = AZ : DG$ (از ذکر جزئیات چشم می‌پوشم).

بنابراین $DH = EK$ اگر و تنها اگر $AZ : DG = BG : EK$. متأسفانه طول DG را نمی‌دانیم، ولی اندازه زاویه‌های به رأس G معلوم است: $\angle ZGA = \angle GAB = 90^\circ$ و $\angle DGZ = \angle GBA$.

این هیشم در اینجا یکی از شگردهای مورد علاقه‌اش را به کار می‌برد که عبارت از ترسیم شکلی کمکی مشابه با شکل اصلی است. پاره خط NT را به طول معلوم دلخواه اختیار می‌کنیم و مستطیل $TMNQ$ را چنان می‌سازیم که $\angle TNM = \angle DGZ$.



شکل ۴



شکل ۲

یک نقطه قطع می‌کند اگر و تنها اگر

$$(BZ : ZA) \cdot (AH : HG) = (BD : DG)$$

(این حکم با دو بار استفاده از قضیه مئلائوس اثبات می‌شود.) این قضیه به نام جووانی سوا که آن را در سال ۱۶۷۸ میلادی بیان کرد خوانده شده، ولی شاید اکنون باید نام آن را به «قضیه مؤتمن» تغییر دهیم.

در بخشهای موجود از کتاب استكمال، مؤتمن هیچ‌گاه کارها و قضیه‌های خودش را از آنچه برگرفته از منابع دیگر است جدا نمی‌کند. در ریاضیات عربی به قدرت به نسبت‌های ناهمساز بر می‌خوریم، اما می‌دانیم که این نسبت‌ها در اثر گمشده اقلیدس درباره پورسمها که صورتی از آن به عربی برگردانده شد، وسیعاً به کار رفته بود. بنابراین تصور می‌کنم که مؤتمن قضیه نسبت‌های ناهمساز خود را از ترجمه عربی یک اثر یونانی که اکنون بر جای نمانده گرفته است (اگر چنین باشد، اطلاعات تازه‌ای درباره ریاضیات یونانی از یک منبع مربوط به اسپانیای اسلامی قرن یازدهم [پنجم] کسب کرده‌ایم). دقیقاً نمی‌دانم که قضیه منسوب به سوا را می‌توان به مؤتمن نسبت داد یا نه.

تنها چند قضیه نسبتاً پیچیده دیگر هست که آنها را با اطمینان نسبی می‌توان به مؤتمن نسبت داد. اکنون درباره نمونه‌ای بحث خواهیم کرد که صورت ساده‌شده‌ای است از یک ترسیم عرضه‌شده به وسیله ابن هیشم (هندسه‌دانی که در اوایل قرن یازدهم [پنجم] در مصر فعال بود)، که مبتنی بر ترسیمی از یونان باستان است. توضیحی که در پی می‌آید قدری وقت‌گیر خواهد بود، ولی ارزش آن را دارد زیرا تصویری از قابلیت مؤتمن در ریاضیات به دست می‌دهد. سعی می‌کنم مطالب کلی را عرضه کنم و از پرداختن به جزئیات برهانها که به تناسبها و مثلثهای مشابه مربوط می‌شود خودداری کنم. در نمادگذاری از آنچه ابن هیشم به کار برده است پیروی می‌کنم [۴، صص ۳۱۵-۳۱۸].

ترسیم مربوط به یونان باستان چنین است (شکل ۳). مستطیل $TQNM$ و پاره خط راست I مفروض‌اند. می‌خواهیم پاره خط TJF را که MN را در J و امتداد QN را در F قطع می‌کند چنان رسم کنیم که $FJ = I$. راه حل: یک هذلولی گذرنده از M با مجانبهای TQ و QN رسم می‌کنیم. (در دوره باستان و سده‌های میانه، تنها یک شاخه هذلولی در نظر گرفته می‌شد.) دایره‌ای به مرکز M و به شعاع I می‌کشیم. محل تقاطع این دو را C می‌نامیم. اکنون TF را به موازات MC رسم می‌کنیم. این همان خط مطلوب است. اثبات آن آسان است: MC را امتداد می‌دهیم تا QT را در O و QN را در L قطع کند. بنا به خواص متوازی‌الاضلاعها، $TJ = OM$

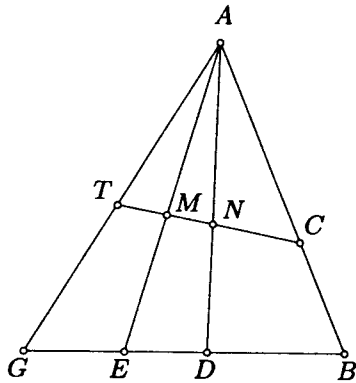
موضوع، افتادگی داشت. در سال ۱۹۹۵ میلادی، نسخه کاملی از استكمال که در قرن سیزدهم [هفتم] تهیه شده، یافته شد. مؤتمن در کتاب استكمال مبانی ریاضیات را با رعایت ترتیب فلسفی و با همه برهانهای مربوط به آنها عرضه می‌کند. این اثر تا حدی شبیه کتاب اصول ریاضیات^۱ بورباکی است. مؤتمن بخش اعظم مطالب کتاب استكمال خود را از آثار موجود اقلیدس، ارشمیدس، آپولونیوس و ریاضیدانان دیگری از دوره باستان یا از قلمرو شرقی جهان اسلام گرفته است. با این حال، پاره‌ای قضایا «تازه» اند، بدین معنی که در هیچ یک از نوشتارهای دوره باستان و سده‌های میانه که می‌شناسیم یافت نمی‌شوند. دو مثالی که در پی می‌آید هنوز در هندسه نوین مطرح است:

(۱) (شکل ۱) در «قضیه ۱۶ از باب ۳ از نوع ۱ از نوع ۳» مؤتمن مثلث ABG و نقاط D و E را بر قاعده آن و قاطع $TMNC$ را که AG را در T ، AE را در M ، AD را در N و AB را در C قطع می‌کند، در نظر می‌گیرد.^۲ او ثابت می‌کند که

$$(TC : CN) \cdot (NM : MT) = (GB : BD) \cdot (DE : EG)$$

به بیان امروزی، این کهنترین بیان موجود از پایایی منطقی (تصویر مرکزی) نسبت‌های ناهمساز، در صورت نسبتاً تعمیم یافته آن است. (اثباتی مربوط به یونان باستان برای حالت خاصی که در آن B و C بر هم منطبق باشند، در مجموعه ریاضی پاپوس اسکندرانی وجود دارد.)

(۲) قضیه منسوب به سوا^۳ (شکل ۲) در حاشیه کتاب استكمال به عنوان «قضیه ۱۸ از باب ۳ از نوع ۱ از نوع ۳» بیان و اثبات شده است.^۴ مثلث ABG را با نقاط D بر ضلع BG ، H بر ضلع AG و Z بر ضلع AB در نظر می‌گیریم. در این صورت، سه پاره خط AD ، BH و GZ یکدیگر را در



شکل ۱

1. Éléments de Mathématique

۲. در ریاضیات یونان باستان و سده‌های میانه مفهوم عدد حقیقی وجود نداشت. در ریاضیات این دوره‌ها، پاره خط مفهومی بنیادی است؛ پاره خط دارای طول نیست، بلکه خود یک طول (مثبت) است. پاره خطها را می‌توان با یکدیگر مقایسه کرد و نظریه‌ای در باب نسبت‌های بین پاره خطها وجود داشت. نسبتها را می‌شد مرتب کرد، و نسبت بین دو پاره خط با نسبت بین دو عدد صحیح قابل مقایسه بود. همه خطهای راست کراندار بودند؛ هر خط راست را می‌شد به‌طور نامحدود امتداد داد، ولی خط راست بی‌پایان وجود نداشت.

3. Ceva

۴. چون قضیه با شماره ذکر شده، جزو متن اصلی بوده که هنگام کتابت ابتدا به اشتباه از قلم افتاده است.

سده‌های میانه رونویسی شده است، که در آنجا نجوم عربی مطالعه می‌شد (مثلاً در بار آلفونسوی خردمند در قرن سیزدهم [هفتم]). چند تا از این متنها تنها به صورت ترجمه‌های لاتینی یا عبری آنها که در سده‌های میانه فراهم آمده بر جای مانده‌اند. همچنین می‌توان رد پای ریاضیات قرن یازدهم [پنجم] را در آثار مؤلفان متأخرتر (از اسپانیای مسلمان یا مسیحی یا شمال آفریقا) یافت. با این همه، مدارک موجود در این زمینه بسیار ناقص است و تاریخچه ریاضیات در قرن یازدهم را باید با تلفیق اطلاعات جزئی و پراکنده‌ای از اینجا و آنجا ترسیم کرد. هنوز همه منابع مربوط به آن دوره مطالعه نشده و نسخه‌های خطی زیادی هست که باید ویرایش و ترجمه بشود. پژوهشگران متعددی در سراسر جهان روی این مطالب کار می‌کنند. مهمترین مرکز پژوهش در زمینه علوم اسپانیای اسلامی، بخش زبان عربی دانشگاه بارسلون به مدیریت خولیو سامسو^۱ است. این مرکز تعدادی از منابع را ویرایش و منتشر کرده و خولیو سامسو اخیراً نخستین تحقیق معتبر درباره علوم اسپانیای اسلامی را که شامل نتایج کارهای انجام شده تا سال ۱۹۹۲ میلادی است به انتشار رسانده است [۵].

۴. اشارات کلی

در تاریخ ریاضیات اسپانیای اسلامی، بین حساب و جبر از یک سو، و هندسه و مثلثات از سوی دیگر می‌توان تمایزی قائل شد. در حساب و جبر، ظاهراً اسپانیای اسلامی از شرق عقبتر بود. ریاضیدانان قرن یازدهم [پنجم] متناهی از شرق را به کار می‌بردند که در خود شرق منسوخ شده بود، مثل محاسب و جبر خوارزمی (حدود ۲۱۵ هجری). دستاوردهای تازه‌تر ریاضیات مشرق زمین در اسپانیای اسلامی شناخته شده نبود. در هندسه و مثلثات اوضاع به قرار دیگری بود. ریاضیدانان اسپانیای اسلامی در سطحی هم‌تراز همکاران خود در شرق اسلامی کار می‌کردند و از بسیاری یافته‌های جدید در شرق باخبر بودند. در اینجا قصد ندارم نام همه ریاضیدانها را با آثارشان و کارهایی که در هندسه و مثلثات کرده‌اند ردیف کنم، زیرا برای غیرمتخصصان ملال‌آور خواهد بود.^۲ به جای این کار، دو نمونه مشخص را به‌طور نسبتاً مشروح بررسی خواهیم کرد.

۵. مؤتمن و کتاب استكمال او

اولین نمونه‌ای که عرضه می‌کنم، مؤتمن بن هود، پادشاه سرقسطه (در شمال شرقی اسپانیا) است که در سال ۱۰۸۵ [۴۷۸ هجری] درگذشت. حکومت سرقسطه یکی از خرده حکومتهایی بود که از تجزیه اسپانیای اسلامی در قرن یازدهم پدید آمده بودند. مؤتمن در عین حال ریاضیدان هم بود و کتاب ریاضی مفصلی به نام کتاب الاستكمال نوشت [۱]. تا مدتها تصور می‌شد که این اثر از بین رفته است، اما بخشهای متعددی از آن چندی پیش در چهار نسخه خطی عربی بی‌نام و نشان یافته شد [۲]. این نسخه‌ها در وضعیت بسیار نامطلوبی نگهداری شده بود زیرا مهمترین آنها (در کینهاک) آسیب دیده و بسیاری از برگهای آن گم شده بود. در نتیجه، متنی که در دسترس ما بود در یازده

1. Julio Samsó

۲. پس درباره نوعی اسطرلاب که زرقالی ابداع کرد و مطالب زیادی درباره آن نوشته شده، سخن نخواهم گفت. این نوع اسطرلاب مثل اسطرلاب معمولی بر اساس تسطیح کره طراحی می‌شود ولی قطب تصویر در آن به جای قطب شمال، نقطه اعتدال بهاری است.

۱. نگاهی به ریاضیات در اسپانیای دوره اسلامی

یان پیتر هوخندایک*

ترجمه محمد باقری

اسپانیای اسلامی از بغداد خیلی دور بود و مدتی طول کشید تا پای علم به آنجا برسد. در قرن دهم میلادی [چهارم هجری] در اسپانیای اسلامی شوق فراوانی برای آموختن علم وجود داشت و در پایتخت یعنی شهر قرطبه، کتابخانه‌ای با بیش از ۴۰۰۰۰۰ جلد کتاب دایر بود. در آن زمان ریاضیات و نجوم در سطح مقدماتی و در حد کاربردهای روزمره مثلاً در احکام نجوم و تعیین اوقات آموخته می‌شد. در حوالی سال ۱۰۰۰ میلادی [۳۹۰ هجری] توجه به نجوم و ریاضیات نظری در آنجا عمیقتر شد. قرن یازدهم میلادی [پنجم هجری] دوره طلایی علوم در اسپانیای اسلامی است. بعد از قرن یازدهم میلادی، وسعت اسپانیای اسلامی کاهش یافت و فعالیت علمی در آن رو به افول گذاشت.

مسیحیان طی قرنهای یازدهم و دوازدهم میلادی [پنجم و ششم هجری] بخش بزرگی از اسپانیای کنونی را باز پس گرفتند: طلیطله در سال ۱۰۸۵ میلادی [۴۷۸ هجری] و سرقسطه در ۱۱۱۸ [۵۱۲ هجری] تسخیر شد. پایان گرفتن سلطه مسلمانان بر این نواحی به معنای پایان یافتن کامل سنت علمی آنان نبود و در قرن دوازدهم میلادی [ششم هجری] دست‌نوشته‌های عربی فراوانی در اسپانیا به لاتین ترجمه شد. به ندرت کسانی از اهمیت این امر در تاریخ ریاضیات آگاه‌اند. در اوایل سده‌های میانه ریاضیات عملاً در اروپای غربی وجود نداشت: نکات معدودی از ریاضیات مقدماتی در متنها و دایرةالمعارفهای لاتین ذکر می‌شد، اما کمتر کسی با طرز اثبات قضیه‌ها آشنا بود. از طریق ترجمه‌های لاتینی قرن دوازدهم [ششم] بود که مسیحیان با ریاضیات به‌عنوان علمی استنتاجی روبه‌رو شدند. دوران خلافت در ریاضیات در اسپانیای اسلامی درست پیش از تسلط مجدد مسیحیان بر بخش اعظم اسپانیا و نهضت ترجمه‌ای که ذکرش رفت قرار می‌گیرد.

۳. منابع و اوضاع تحقیق

پاره‌ای از آثار ریاضیدانان و منجمان قرن یازدهم [پنجم] به‌صورت اصلی عربی به دست ما رسیده است. نسخه‌های خطی این آثار به دست خود مؤلفان نوشته نشده، بلکه بعدها در جهان اسلام یا در اسپانیای مسیحی

۱. مقدمه

از قرن هفتم تا یازدهم میلادی [اول تا پنجم هجری]، بخش وسیعی از اسپانیا و پرتغال کنونی جزو ممالک اسلامی به‌شمار می‌آمد. در این نوشتار همه‌جا منظورم از «اسپانیای اسلامی» آن بخش از شبه‌جزیره ایبری است که در قلمرو حکومت اسلامی بود. اسپانیای اسلامی اصطلاح کاملاً درستی نیست، زیرا در اوایل سده‌های میانه، اسپانیا وجود نداشت، اما کانونهای مهم علمی آن سرزمین در سده‌های میانه (قرطبه [کوردوبا]، سرقسطه [ساراگوسا]، طلیطله [تولدو])^۱ همگی در اسپانیای کنونی واقع‌اند. تا همین اواخر، نظر رایج چنین بود که اهمیت اسپانیا در تاریخ ریاضیات تنها به‌خاطر نقش آن در انتقال ریاضیات از عربی به لاتین بوده است. طی پانزده سال اخیر مطالعه منابع خطی منتشرنشده، این دیدگاه را دگرگون کرد. اکنون می‌دانیم که در اسپانیای اسلامی طی قرن یازدهم میلادی [پنجم هجری] ریاضیدانان خلافتی می‌زیستند. در این مقاله خواهم کوشید تا تصویری از کار آنان در خواننده ایجاد کنم. فرض را بر آن می‌گذارم که خواننده هیچ‌گونه آشنایی قبلی با تاریخ ریاضیات ندارد و مطلب را با اشاراتی کلی درباره زمینه تاریخی موضوع آغاز می‌کنم.

۲. زمینه تاریخی

یونانیان باستان، پیش از سال ۳۰۰ قبل از میلاد هندسه را به‌صورت یک دستگاه استنتاجی در آوردند. ریاضیات یونان تا قرن سوم میلادی شکوفایی داشت و از آن پس رو به افول گذاشت. رومیها به ریاضیات نظری توجهی نداشتند و سنت ریاضیات یونانی به رکود گرایید تا آنکه دوباره به دست مسلمانان احیا شد. در حوالی سال ۸۰۰ میلادی [۱۸۵ هجری] خلفای بغداد این شهر را به‌صورت پایتخت علمی جهان در آوردند. به دستور آنان بسیاری از متنهاى ریاضی و نجومی یونانی (از جمله اصول اقلیدس، آثار ارشمیدس، آپولونیوس و غیره) و همچنین آثاری به سانسکریت از هند، به عربی ترجمه شد. این سرآغاز علوم عربی — یعنی علوم نوشته‌شده به عربی — بود. هنگام به‌کار بردن اصطلاحی چون «ریاضیات عربی» باید به‌خاطر داشته باشیم که سهم عمده‌ای از آن، حاصل کار ریاضیدانان غیر عرب به‌ویژه ایرانیان بود.

1. Córdoba, Zaragoza, Toledo