

# Babylonische astronomie: een vergeten hoofdstuk uit de geschiedenis van de wiskunde.

Jan P. Hogendijk.

## Inleiding.

Het is algemeen bekend dat de Babylonische astronomen uit de periode 500 v. Chr. - 0 een aantal belangrijke dingen aan de ontwikkeling van de wiskunde hebben bijgedragen, die wij nu nog steeds gebruiken. Dit zijn de invoering van een symbool voor 0 als "plaatshouder" (zoals in het getal 104), en de verdeling van de cirkel in 360 graden, van een graad in 60 minuten en een minuut in 60 seconden. De verdeling van de cirkel is ontstaan doordat de Babylonische astronomen de schijnbare baan van de zon ten opzichte van de vaste sterren in 12 gelijke tekens (Ram, Stier enz.) van elk 30 graden verdeelden, en doordat zij een sexagesimaal (zestigdig) talstelsel gebruikten. Hoe belangrijk deze bijdragen ook zijn, ze zijn maar het topje van een ijsberg van verfijnde wiskundige methoden, die in de Babylonische astronomie vanaf ca. 500 v. Chr. werden gebruikt. Dit opstel heeft als doel hiervan enkele voorbeelden te geven. Omdat deze wiskundige methoden in een astronomische context verborgen zijn, worden ze in de meeste boeken over geschiedenis van de wiskunde niet vermeld. Echter: ook in het verre verleden werd interessante wiskunde vaak gevonden buiten de grenzen van wat bekend staat als het vak "wiskunde".

We beginnen met een korte historische inleiding. Het Babylonisch cultuurgebied ligt in het tweestromenland, de dalen van de Eufraat en de Tigris, grotendeels in het tegenwoordige Irak. Omstreeks 3000 v. Chr. werd daar het spijkerschrift ontwikkeld. In de volgende eeuwen is de Babylonische wiskunde ontstaan, vóór 2000 v. Chr. was het sexagesimale getalsysteem ontwikkeld en kon men kwadratische vergelijkingen oplossen. Met praktische problemen had dit weinig te maken, wiskunde was een vak dat terwille van zichzelf werd beoefend en aan de scholen voor schrijvers werd onderwezen.

De Babylonische astronomie is van veel latere datum. (Wanneer we hier over astronomie spreken, bedoelen we steeds astronomie waarin wiskundige methoden werden gebruikt.) Vanaf ca. 750 v. Chr. werden systematisch eenvoudige waarnemingen gedaan, uiteraard met het blote oog, bijvoorbeeld van maansverduisteringen, zichtbaarheid van de maansikkel en planeten, conjuncties van planeten met sterren, opkomst en ondergang van hemellichamen, enz. Deze waarnemingen werden geregistreerd in archieven van kleitabletten in spijkerschrift. Vanaf ongeveer 500 v. Chr. werden rekenmethoden ontwikkeld om astronomische verschijnselen te berekenen en te voorspellen. De bloeitijd van de Babylonische astronomie was in de periode 400-100 v. Chr. Het spijkerschrift was toen inmiddels een dode taal geworden, die nog wel werd gebruikt voor o.a. wetenschappelijke doeleinden. Tot het begin van onze jaartelling werden tabellen opgesteld aan de hand van deze methoden.

Onze bronnen voor de kennis van de Babylonische astronomie zijn kleitabletten en fragmenten daarvan, gevonden bij verschillende opgravingen, en op legale manier of eventueel via de zwarte handel in diverse musea terechtgekomen. Veel van deze tabletten zijn zwaar beschadigd. Tabletten zijn gepubliceerd en beschreven in diverse boeken, die met afkortingen ACT, LBAT enz. zullen worden aangegeven, de complete verwijzingen zijn te vinden aan het eind van dit opstel.

Voor ons van belang zijn twee soorten astronomische tabletten:

1. Tabellen. Deze groep is verreweg de grootste, en we zullen enkele voorbeelden bespreken. Tabellen bestaan uit een aantal kolommen, en ze zien er in wezen als volgt uit:

$i_1$	$a_1$	$b_1$ .....
$i_2$	$a_2$	$b_2$ .....
.		
.		
$i_n$	$a_n$	$b_n$ .....

Hierin zijn  $i_k$  rangnummers (bijvoorbeeld opeenvolgende maanden van een jaar), en  $a_k, b_k$  grootheden die functies zijn van die rangnummers (bijv.  $b_k$  is de positie van de zon in de dierenriem aan het eind van de (gemiddelde) maand). De tabellen kunnen tot 18 kolommen bevatten.

2. Procedureteksten. Dit is een veel kleinere groep (fragmenten van) teksten, die het recept geven, waarmee bijvoorbeeld  $a_{n+1}$  uit  $a_n$  wordt afgeleid, in de stijl van een computerprogramma. We zullen straks in een voorbeeld zien, dat deze teksten vaak frustrerend weinig verdere informatie bevatten.

Wat we niet hebben (en wat we natuurlijk graag gehad zouden willen hebben) zijn teksten, waarin de motivatie van deze recepten en de hieraan ten grondslag liggende theorie wordt uitgelegd. Wat dit betreft zijn we goeddeels op onze eigen ideeën en speculaties aangewezen. Hier ligt een valkuil, want begrippen die wij gemakkelijk of "natuurlijk" vinden, hoeven niet in de Babylonische astronomie gebruikt te zijn. Zo zullen in het vervolg vaak grafieken gebruikt worden als hulpmiddel, maar men moet daarbij bedenken dat op geen enkele Babylonische astronomische tablet een grafiek voorkomt.

De moderne studie van Babylonische astronomie begon omstreeks 1880, toen de eerste astronomische tabletten ontcijferd en begrepen werden door drie geleerde Duitse Jezuïeten: J. N. Strassmaier, J. Epping en F. X. Kugler. In de twintigste eeuw is grote vooruitgang geboekt, vooral door samenwerking van wiskundigen en assyriologen, zoals bijvoorbeeld O. Neugebauer (wiskundige en assyrioloog), A. Sachs (assyrioloog) en B. L. van der Waerden (wiskundige). We begrijpen nu een aantal aspecten van de Babylonische astronomie, maar veel is nog duister, en er kan op dit gebied nog interessant onderzoek worden gedaan.

## Getallen in spijkerschrift.

Het lezen van spijkerschrift is erg gecompliceerd, maar getallen vormen een uitzondering. We zullen het getalsysteem hier uitleggen, en met deze informatie kan de lezer zelf het grootste deel van de hierna gereproduceerde tabletten (Figuur 1) ontcijferen.

Voor het noteren van getallen gebruikten de wiskundigen omstreeks 2000 v. Chr. twee tekens:

𐎶 (spijker), met waarde 1,

𐎵 (winkelhaak) met waarde 10.

Hiermee worden de getallen 1 t/m 59 gevormd, zoals in het volgende voorbeeld:  $43 = \lll \text{𐎶𐎶𐎶}$ .

Het getal 60 wordt weer als 𐎶 genoteerd, 61 als 𐎶 𐎶, met enige ruimte tussen de spijkers. Zo gaat het verder:  $2601 = 43 \times 60 + 21$  is

$\lll \text{𐎶𐎶𐎶} \lll \text{𐎶}$ . Het getal 3600 is opnieuw 𐎶, enzovoort. Hetzelfde systeem wordt voor breuken gebruikt: 𐎶 =  $1/60$ , het getal

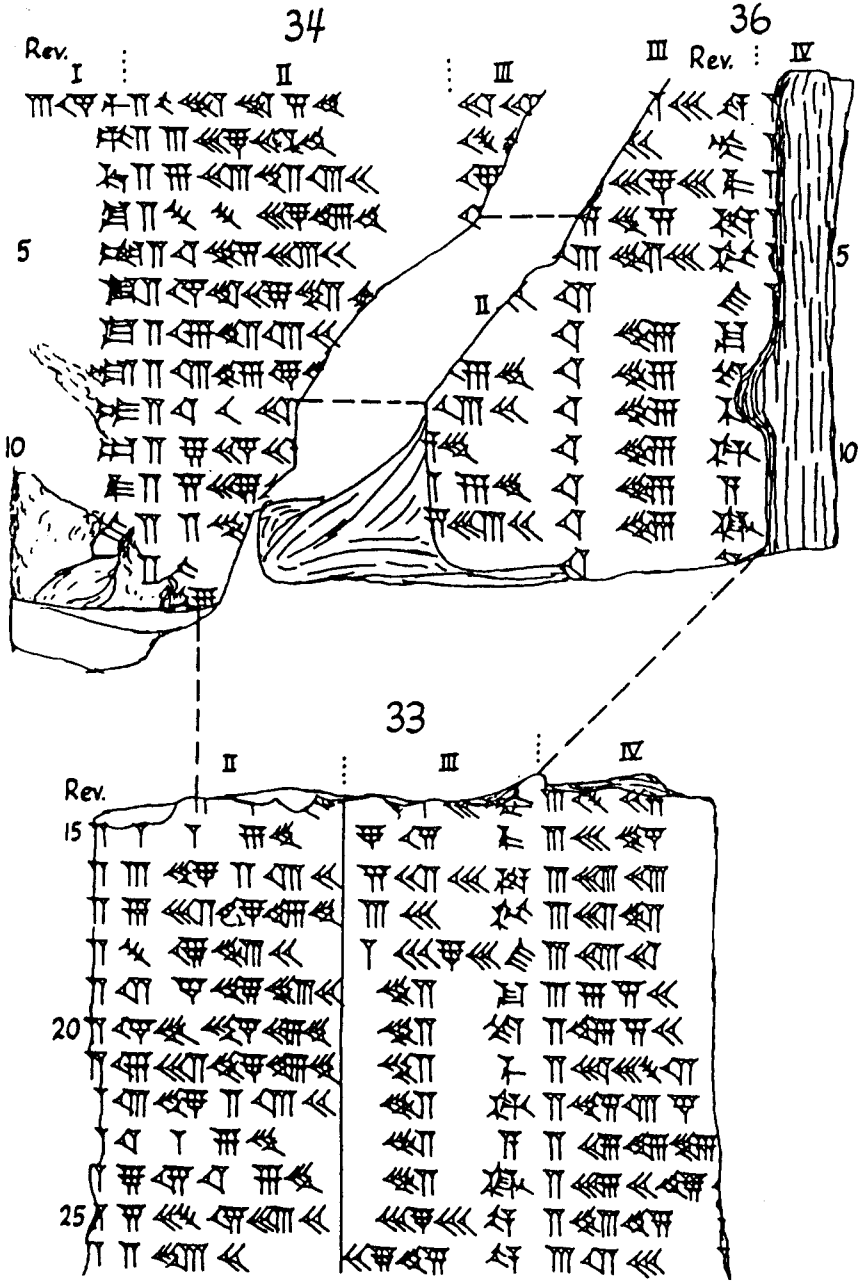
$1/8 = 7/60 + 30/3600$  wordt genoteerd als  $\text{𐎶𐎶𐎶} \lll \lll$ . Er is geen symbool dat met onze decimale komma overeenkomt, en  $\text{𐎶𐎶} \lll$  kan ook betekenen  $7 \times 60 + 30 = 450$ , of  $7 \times 60 + 30/60$ , enz. Het symbool 𐎶 kan dus  $60^n$

betekenen voor ieder geheel getal  $n$ . Hoe we een getal moeten lezen moet uit de context blijken. Na 500 v. Chr. werd door de Babylonische astronomen een symbool 𐎶 ingevoerd voor de nul (als plaatshouder), kennelijk om verwarring in de vaak zeer uitgebreide berekeningen te voorkomen. Het getal  $7 \times 3600 + 0 \times 60 + 30$  werd door de astronomen genoteerd als  $\text{𐎶𐎶𐎶} \text{𐎶} \lll \lll$ , hierbij geeft 𐎶 aan dat de plaats van de zestigtallen leeg blijft. Aan het eind van een getal staat nooit een 𐎶, dus 60 blijft 𐎶. De Babyloniërs hebben nooit een equivalent van onze decimale komma ingevoerd.

In de meeste gevallen wordt voor de transcriptie van getallen in spijkerschrift het systeem van O. Neugebauer gevolgd. Hierin scheidt men sexagesimalen door een komma, en men zet een puntkomma om het gehele deel van het breukdeel te scheiden.

Voorbeeld:  $\text{𐎶} \text{𐎶} \lll$  wordt getranscribeerd als 1,0;30 als men gelooft dat er  $1 \times 60 + 30/60$  bedoeld wordt. Deze transcriptie houdt al een interpretatie in, want er zou ook 1, 0, 30 (=3630) of 1; 0, 30 ( $1 + 1/120$ ) bedoeld kunnen zijn.

De lezer kan nu zelf aan de slag gaan met de getallen in Figuur 1.



Figuur 1. Fragmenten 33, 34 en 36 uit LBAT, die samen een tabel vormden. Met dank aan Brown University Press, Providence R. I.

## De beweging van de zon.

We zullen nu vrij uitgebreid ingaan op een eenvoudig Babylonisch recept voor het voorspellen van de positie van de zon. Hierbij komen verschillende essentiële aspecten van de Babylonische astronomie aan de orde. We bespreken drie stukken van een tabel waar niet de positie van de zon zelf voorkomt, maar die van het punt precies  $180^\circ$  daarvandaan. De tabel dient namelijk voor het precies bepalen van het tijdstip van volle maan, en de volle maan staat (vanuit de aarde gezien) diametraal tegenover de zon.

De posities zijn berekend volgens een theorie voor de beweging van de zon, die door Neugebauer met de naam "systeem A" wordt aangeduid. De tabel is gedeeltelijk bewaard op drie brokstukken die ooit deel uitmaakten van één tablet. We bespreken juist deze brokstukken omdat ze niet te erg beschadigd zijn (ook al lijkt dat misschien op het eerste gezicht anders), en omdat er ook een bijbehorende proceduretekst bekend is. De spijkerschrift-originelen zijn in Figuur 1 weergegeven, de transcriptie is in Figuur 2. De lezer kan de getallen in de transcriptie zelf controleren! De punten ..... geven beschadigingen op de tabletten aan, of plaatsen waar het spijkerschrift onduidelijk is.

Als we de drie fragmenten als stukjes van een puzzel aan elkaar leggen, passen ze niet mooi, omdat er in de loop der eeuwen allerlei beschadigingen zijn opgetreden. Toch weten we met zekerheid dat de drie ooit deel uitgemaakt hebben van één tablet, want de getallen in de diverse kolommen die erop staan passen wel precies bij elkaar (dit zal verderop duidelijk worden). Het is zelfs mogelijk de ontbrekende waarden te reconstrueren door berekening, de lezer kan dit voor de tweede en derde kolom (na het lezen van het volgende) zelf proberen. De drie brokstukken waren delen van een tablet voor de berekening van volle manen voor twee jaar. In de eerste kolom staan het jaartal en de maand. Het jaar  $3,14 = 194$  is gerekend in de Seleucidische jaartelling. Jaar  $n$  in deze jaartelling begint in het voorjaar van  $(312-n)$  voor Christus, dus de tabel is voor de periode voorjaar van 118 v. Chr. tot het voorjaar van 116 v. Chr. De namen van de Babylonische maanden geven we hier met Romeinse cijfers I, II enz. weer. De Babylonische maanden worden door de schijn gestalten van de maan bepaald, en een nieuwe maand begon in principe een of twee dagen na nieuwe maan, bij het zien van de nieuwe maansikkel. Het Babylonische jaar bestond uit een geheel aantal maanden (12 of 13). Dit aantal werd zo gekozen dat het jaar altijd in het voorjaar begon, niet te ver van het moment waarop de zon in het lentepunt staat, dat wil zeggen wanneer dag en nacht even lang zijn (zie HAMA I, 353-363). Het Babylonische jaar was dus een zonnejaar van niet-constante lengte.

De tweede kolom (in de moderne literatuur meestal  $\Phi$  genaamd) zal verderop worden behandeld. In het origineel (Figuur 1) is de nul in de eerste regel duidelijk te zien. De "5" in de eerste regel is een schrijffout, die wij kunnen verbeteren op grond van de onderliggende wiskundige structuur; er moet een 6 staan. Let ook op de vorm van de negens in regel 4.

(jaar) (maand)	(Φ)	(zon+180°)	(lengte dag)
3,14	I	2, 0, 51, 51, 6, 40	21,22,30 weegs .....
	II	2, 3, 37, ..., 40	19;30 schor .....
	III	2, 6, 23, 42, 13, 20	17,37,30 boogs .....
	IV	2, 9, 9, 37, 46, 40	15,45 steenb .....
	V	2, 11, 55, 33, 20	13,52,30 waterm .....
	VI	2, 14, 41, 28, 53, 20	12 vissen .....
	VII	2, 16, 42, 13, 20	11,56 ram .....
	VIII	2, 13, 56, 17, 46, 40	11,56 stier .....
	IX	2, 11, 10, 22, 13, 20	11,56 tweel .....
	X	2, 8, 24, 2., 40	11,56 kreeft .....
	XI	2, 5, 38, ..1, 6, 40	11,56 leeuw .....
	XII	2, 2, 5.....5, 33, 20	11,56 maagd .....
	.....	2, 0, .....	11 w..... .....
.....	.....	....., 58, .....	.....30 schor 3, 19, 2..
	.....	2, 1, 1, 6, 40	7, 15 boogs 3, 30, 54
	.....	2, 3, 47, 2, 13, 20	5, 22, 30 steenb 3, 35, 23
	.....	2, 6, 32, 57, 46, 40	3, 30 waterm 3, 32, 52
	.....	2, 9, 18, 53, 20	1, 37, 30 vissen 3, 23, 52
	.....	2, 12, 4, 48, 53, 20	52 ram 3, 6, 5, 20
	.....	2, 14, 50,44, 26, 40	52 stier 2, 46, 5, 20
	.....	2, 16, 32, 57, 46, 40	52 tweel 2, 31, 39, 12
	.....	.... 13, 47, 2, 13, 20	52 kreeft 2, 25, 13, 4
	.....	.... 11, 1, 6, 40	52 leeuw 2, 26, 46, 56
	.....	.... 8, 15, 11, 6, 40	52 maagd 2, 36, 20, 48
	.....	.... 5, 29, 15, 33, 20	37, 30 weegs 2, 53, 45
	.....	2, 2, 43, 20	28, 45 weegs 3, 12, 30

Figuur 2. Transcriptie van Figuur 1. Puntjes geven beschadigde plaatsen aan. De volgende schrijffouten zijn verbeterd: Regel 1, kolom 2: 5 verbeterd in 6. Regel 6, kolom 2: 52 verbeterd in 53. Regel 16, kolom 4: 33 verbeterd in 35. Regel 18, kolom 4: 22 verbeterd in 52. Regel 22, kolom 4: 45 verbeterd in 25. De sexagesimale puntkomma is nog niet toegevoegd.

In de vierde kolom staat de lengte van de dag (d.w.z. de tijd tussen zonsopgang en zonsondergang) in tijdgraden. Een etmaal, dat wil zeggen de periode van de (voor ons schijnbare) beweging van de zon om de aarde, wordt verdeeld in 360 tijdgraden. Een tijdgraad komt overeen met 4 moderne klokminuten. Wij schrijven de sexagesimale puntkomma daarom na de tweede sexagesimaal, maar sommige schrijvers nemen aan dat de sexagesimale puntkomma een plaats meer naar voren moet, de eenheid zou dan een "groot uur" geweest zijn, dat wil zeggen 4 moderne uren. Het is goed hierbij te bedenken dat de sexagesimale puntkomma een modern hulpmiddel is en meer niet. Een Babylonische astronoom zou het bovenste getal in de vierde kolom heel goed "3 grote uren, 30 tijdgraden en 54 tijdminuten" genoemd kunnen

hebben, zonder dat bij hem de vraag opkwam waar een eventuele puntkomma gestaan zou moeten hebben.

De derde kolom geeft voor het midden van de (gemiddelde) maand de positie van het punt diametraal tegenover de zon. Net als tegenwoordig werd de dierenriem verdeeld in 12 gelijke tekens van 30 graden, de (voorlopers van) onze Ram, Stier, enz. Er is echter één verschil. In de moderne astronomie valt het begin van het teken Ram per definitie samen met het lentepunt, en dit is één van de twee posities van de zon in de dierenriem waarvoor geldt dat de dag en de nacht evenlang zijn. De andere positie waarvoor dit geldt is het herfstpunt, dat diametraal tegenover het lentepunt ligt en het begin is van het teken Weegschaal. Met behulp van de vierde kolom kunnen we inzien dat dit in de Babylonische astronomie anders was.

Wanneer de dag precies evenlang is als de nacht, is de lengte van de dag  $180 = 3,0$  tijdgraden, en dit bedrag ligt tussen de getallen  $3,6;5,20$  en  $2,46;5,20$  in kolom 4. Volgens kolom 3 ligt de positie van het punt diametraal tegenover de zon op dat moment (d.w.z. de positie van het lentepunt) tussen  $0;52$  Ram en  $0;52$  Stier, het lentepunt kan dus niet samenvallen met het begin van de Ram. Door lineaire interpolatie tussen de waarden  $3,6;5,20$  en  $2,46;5,20$  en tussen  $0;52$  Ram en  $0;52$  Stier vinden we dat de waarde  $3,0$  wordt aangenomen als het punt tegenover de zon in  $10^\circ$  Ram staat. Het lentepunt zou dus in  $10^\circ$  Ram vallen en het herfstpunt in  $10^\circ$  Weegschaal. Deze conclusies zijn correct, hetgeen blijkt uit de verdere analyse van kolom 4 en uit andere tabletten, zie HAMA I, 366-371. We merken over kolom 4 hier alleen nog op dat deze kolom een stuksgewijs lineaire functie is van de derde kolom, met knikken op afstanden  $30^\circ$ ,  $60^\circ$  en  $90^\circ$  van het lentepunt en het herfstpunt.

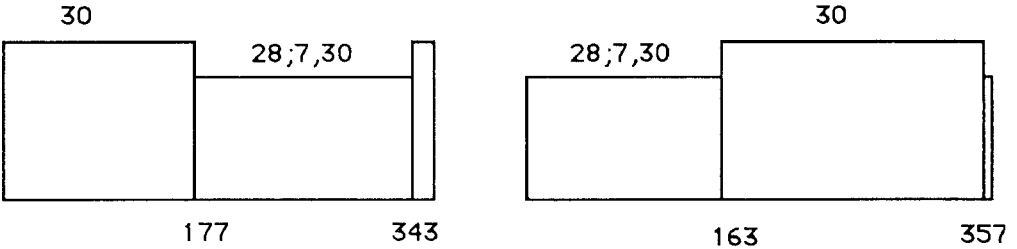
We keren nu terug naar de derde kolom, die de positie geeft van het punt diametraal tegenover de zon in het midden van de maand. Het blijkt dat een ander tablet het recept geeft voor de berekening van deze derde kolom (ACT I, p. 188, twee storende fouten in deze tekst zijn verbeterd):

"Van 27 maagd tot 13 vissen, maand na maand  $28,7,30$  (optellen) alles na 13 vissen vermenigvuldigen met  $1,4$  en bij 13 vissen optellen  
van 13 vissen tot 27 maagd  $30$  optellen  
alles na 27 maagd vermenigvuldigen met  $56,15$  en bij 27 maagd optellen."

Als we de  $1,4$  interpreteren als  $1;4$  en  $56,15$  als  $0;56,15$  klopt het recept precies met de derde kolom. Voorbeeld: in het midden van de zesde maand is het punt diametraal tegenover de zon in 12 Vissen. Om de volgende maand te berekenen proberen we eerst  $28;7,30$  op te tellen; dan komen we echter  $27;7,30$  boven de 13 Vissen uit. Deze  $27;7,30$  vermenigvuldigen we met  $1;4$ , antwoord  $28;56$ . Dit optellen bij 13 Vissen levert  $41;56$  Vissen, dat wil zeggen  $11;56$  Ram als in de tabel. In de tabel zelf is geen sexagesimale puntkomma aangebracht, maar het is duidelijk waar die in de derde kolom zou moeten staan.

In de tabel gaat het om de beweging per maand van het punt diametraal tegenover de zon. We voeren nu het moderne idee in van de snelheid van een

punt op een bepaald moment. Dan kunnen we zeggen: Het punt diametraal tegenover de zon beweegt met een snelheid van  $30^\circ$  per maand van 13 vissen tot 27 maagd, en  $28;7,30^\circ$  per maand van 27 maagd tot 13 vissen. Dit kunnen we grafisch uitzetten als in Figuur 3 (links), waarin we de horizontale as bij  $0^\circ$  Ram laten beginnen.



Figuur 3. zon +  $180^\circ$

zon

We komen hier een fundamenteel modern idee tegen, dat veel gebruikt wordt bij de analyse van Babylonische astronomische tabletten: de trapfunctie. We kunnen nu meteen de  $1;4$  en  $0;56,15$  verklaren: in het voorbeeld bewegen we van 12 vissen tot 13 vissen met de oude snelheid  $28;7,30$ , dan vanaf 13 vissen  $30 : 28;7,30 = 1;4$  maal zo snel. Evenzo  $0;56,15 = 28;7,30 : 30$ .

De zon zelf beweegt natuurlijk ook volgens een trapfunctie (Figuur 3, rechts): over een "snelle boog"  $\sigma$  van 13 maagd tot 27 vissen met een snelheid van  $30^\circ$  per maand, en over een "langzame boog"  $\lambda$  van 27 vissen tot 13 maagd met een snelheid van  $28;7,30^\circ$  (dus: langzaam in het voorjaar en de vroege zomer, snel in de herfst en de vroege winter);  $\sigma$  heeft lengte  $194^\circ$ ,  $\lambda$  heeft lengte  $166^\circ$ .

De beweging van de zon vertoont inderdaad een kleine snelheidsvariatie, die door het model goed benaderd wordt, en het is verbazingwekkend dat de Babylonische astronomen dit verschijnsel kenden en zo goed konden benaderen. Want het gaat om een benadering; het is onwaarschijnlijk dat de Babylonische astronomen geloofden dat de snelheid van de zon in  $27^\circ$  vissen en  $13^\circ$  maagd precies zo verandert als in het model wordt weergegeven.

Uit het model kunnen we nog afleiden, dat een jaar bestaat uit  $\sigma/30 + \lambda/28;7,30 = 6;28 + 5;54,8 = 12;22,8$  maanden. Onder één noemer brengen geeft  $12;22,8 = 2783 / 225$ . 225 jaar zijn dus 2783 maanden. Dit betekent dat alles zich na een periode van 225 jaar herhaalt, en we in de derde kolom na 225 jaar weer dezelfde waarden krijgen. Omgekeerd geldt ook, dat elke waarde maar een keer in de 225 jaar voorkomt. Toevallig staat de datum op deze tabel (kolom 1), maar meestal is dat niet zo, en dan kunnen tabellen vaak met dit principe gedateerd worden (hoewel de 225 jaar daarvoor eigenlijk nog iets te kort is).

Hoe het model precies ontwikkeld is wordt in de ons bekende bronnen

niet gezegd. We kunnen hierover wel enkele suggesties aan de hand doen. We stellen ons een Babylonische astronoom voor, die weet dat de zonnebeweging enigszins onregelmatig is, en die de zonnebeweging wil benaderen met een snelheidsfunctie met twee waarden, een hoge waarde  $v_{\sigma}$  graden per maand op een "snelle boog"  $\sigma$  en een lagere waarde  $v_{\lambda}$  graden per maand op een langzame

boog  $\lambda$ . Hoe heeft hij de parameters van het model gevonden, en op welke gegevens (resultaten van waarnemingen) is het model gebaseerd?

We hebben vier waarden  $\sigma$ ,  $\lambda$ ,  $v_{\sigma}$ ,  $v_{\lambda}$ . Nu geldt uiteraard

1.  $\sigma + \lambda = 360^{\circ}$ .

De relatie 1 jaar = 12;22,8 maanden komt op veel andere plaatsen in de Babylonische astronomie voor, en we kunnen daarom aannemen dat deze relatie bij de constructie van het model is gebruikt. Dus

2.  $\sigma/v_{\sigma} + \lambda/v_{\lambda} = 12;22,8$ .

Ten derde merken we op, dat als de zon in maand  $n$  vlak voor een eind van de langzame boog is (zeg:  $r$  graden voor het eind), hij in maand  $n+1$  ( $v_{\sigma}/v_{\lambda})(v_{\lambda}-r)$  voorbij het eind van de langzame boog is (vergelijk de proceduretekst hierboven). Deze berekening is voor de Babylonier alleen (exact) mogelijk als  $v_{\sigma}/v_{\lambda}$  een eindige sexagesimale breuk is, en hetzelfde geldt bij de overgang van snelle boog naar langzame boog, d.w.z. voor  $v_{\lambda}/v_{\sigma}$ . Dus moeten er getallen  $p=2^a 3^b 5^c$  en  $q=2^d 3^e 5^f$  zijn met  $a, b, c, d, e, f$  geheel, zodanig dat  $v_{\sigma}:v_{\lambda}=p:q$ , en om het rekenwerk niet te omvangrijk te maken moeten  $p$  en  $q$  liefst niet te hoog zijn.

Het ligt daarom voor de hand te veronderstellen, dat onze hypothetische astronoom van zo'n relatie uitgegaan is bij het opstellen van dit model, namelijk

3.  $v_{\sigma}:v_{\lambda}=16:15$ .

We zien hier dat het model op belangrijke manier bepaald wordt door het feit dat sexagesimaal gerekend wordt.

Voor het berekenen van  $v_{\sigma}$ ,  $v_{\lambda}$ ,  $\sigma$  en  $\lambda$  is nog één gegeven nodig; waarschijnlijk is dit geweest

4.  $v_{\sigma}=30^{\circ}$  (een mooi getal).

Hieruit volgen nu  $v_{\lambda}$  en de lengtes van  $\sigma$  en  $\lambda$  als in het model.

De precieze posities van  $\sigma$  en  $\lambda$  kunnen zijn vastgelegd door de eis dat het midden van de snelle boog in  $20^{\circ}$  Tweelingen (ook een mooi getal) gelegen heeft, of het midden van de langzame boog in  $20^{\circ}$  Schutter. Tot zover onze speculaties. Er was nog een ander model voor de zonnebeweging, "Systeem B", waarop we hier niet ingaan.

## De beweging van de maan en de sarosperiode.

De trapfunctie is een van de twee bekendste moderne gedachtenconstructies voor het analyseren van Babylonische tabellen. De andere is de zgn. "zigzag-functie". Dit type functie wordt gebruikt bij de analyse van kolom 2 in Figuur 2. De in deze kolom getabelleerde grootheid wordt in de moderne literatuur vaak  $\Phi$  genoemd.

Over de functie  $\Phi$  (en vele andere functies in Babylonische tabletten) kunnen drie soorten vragen gesteld worden:

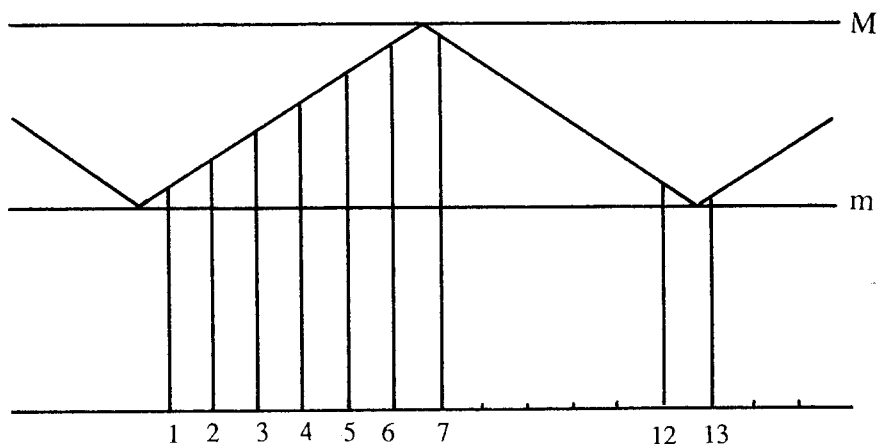
1. wat zijn de wiskundige eigenschappen?
2. wat betekent de functie?
3. hoe heeft men de functie uit de waarnemingen af kunnen leiden?

In de bespreking van deze vragen zal ook af en toe aangegeven worden wanneer de antwoorden zijn ontdekt. Zo zal duidelijk worden, hoe de kennis van de Babylonische astronomie in de moderne tijd vooruit is gegaan.

We beginnen met de bespreking van de eerste vraag aan de hand van Figuur 2, die we hier gedeeltelijk herhalen.

(jaar)	(maand)	( $\Phi$ )	(zon+180°)		(lengte dag)
3,14	I	2, 0, 51, 51, 6, 40	21,22,30	weegs	.....
	II	2, 3, 37, ..., 40	19;30	schor	.....
	III	2, 6, 23, 42, 13, 20	17,37,30	boogs	.....
	IV	2, 9, 9, 37, 46, 40	15,45	steenb	.....
	V	2, 11, 55, 33, 20	13,52,30	waterm	.....
	VI	2, 14, 41, 28, 53, 20	12	vissen	.....
	VII	2, 16, 42, 13, 20	11,56	ram	.....
	VIII	2, 13, 56, 17, 46, 40	11,56	stier	.....
	IX	2, 11, 10, 22, 13, 20	11,56	tweel	.....
	X	2, 8, 24, 2..., 40	11,56	kreeft	.....
	XI	2, 5, 38, ..1, 6, 40	11,56	leeuw	.....
	XII	2, 2, 5.....5, 33, 20	11,56	maagd	.....
.....	.....	2, 0, .....	11	w.....	.....
.....	.....	....., 58, .....	.....30	schor	3, 19, 2..
.....	.....	2, 1, 1, 6, 40	7, 15	boogs	3, 30, 54
.....	.....	2, 3, 47, 2, 13, 20	5, 22, 30	steenb	3, 35, 23
.....	.....	2, 6, 32, 57, 46, 40	3, 30	waterm	3, 32, 52
.....	.....	2, 9, 18, 53, 20	1, 37, 30	vissen	3, 23, 52
.....	.....	2, 12, 4, 48, 53, 20	52	ram	3, 6, 5, 20
.....	.....	2, 14, 50,44, 26, 40	52	stier	2, 46, 5, 20
.....	.....	2, 16, 32, 57, 46, 40	52	tweel	2, 31, 39, 12
.....	.....	.... 13, 47, 2, 13, 20	52	kreeft	2, 25, 13, 4
.....	.....	.... 11, 1, 6, 40	52	leeuw	2, 26, 46, 56
.....	.....	.... 8, 15, 11, 6, 40	52	maagd	2, 36, 20, 48
.....	.....	.... 5, 29, 15, 33, 20	37, 30	weegs	2, 53, 45
.....	.....	2, 2, 43, 20	28, 45	weegs	3, 12, 30

We zien in de tweede kolom een rij lange getallen, die vanaf het begin steeds met  $d = 2,45,55,33,20$  toenemen van de 1e tot de 6e maand; na de 7e maand nemen ze af met dezelfde waarde tot en met de 12e maand; na de 1e maand van het jaar 3,15 (=195) nemen ze weer toe (op de stippeltjes staat steeds 1 of 2). Alle waarden liggen op een "zigzag-functie" met maximum  $M = 2,17,4,48,53,20$  en minimum  $m = 1,57,47,57,46,40$ , zie Figuur 4. Waar de sexagesimale puntkomma ligt weten we nog niet, omdat we niet weten wat deze getallen voorstellen.



Figuur 4. Grafiek van de zigzagfunctie  $\Phi$ .

Als we de waarde op de  $n$ -e regel als  $\Phi(n)$  aangeven, kunnen we het verband in de buurt van het maximum op Babylonische manier als volgt uitdrukken (vergelijk de procedurtekst ACT 1, no. 200, section 5, p. 190):  $\Phi(7)$  krijgt men door eerst  $\Phi(6)+d$  te berekenen, de uitkomst is groter dan  $M$ . Het verschil met  $M$  moet men van  $M$  aftrekken.

In formule:  $\Phi(7) = M - (\Phi(6) + d - M) = 2M - \Phi(6) - d$ .

Analoog:  $\Phi(13) = m + (m - (\Phi(12) - d)) = 2m - \Phi(12) + d$ .

De periode van de zigzag-functie in Figuur 4 is  $2(M-m)/d = 6247/448$  maanden. Dit betekent, dat waarden van  $\Phi$  zich pas na 6247 maanden ( $\approx 505$  jaar) herhalen. Omdat de Babylonische astronomie zich over 5 eeuwen uitgestrekt heeft, is één waarde van  $\Phi$  in principe genoeg om een tablet te dateren. (Het schijnt dat men, behalve in het eerste begin, vrijwel altijd dezelfde functie  $\Phi$  gebruikt heeft.) Het is een leuk wiskundig probleem, als gegeven zijn een maand  $n$ , de waarde  $\Phi(n)$ , en verder een waarde  $\Phi(m)$ ,  $m$  te bepalen modulo 6247, zonder eerst de tabel voor alle 505 jaar uit te schrijven. Dit leidt tot een lineaire Diophantische vergelijking, zie Neugebauer, ACT I, p. 44.

De tabel in Figuur 2 is voor volle maan, maar er zijn analoge tabellen

voor nieuwe maan, waarin een gelijksoortige functie  $\Phi^*$  voorkomt met dezelfde  $m$ ,  $M$  en  $d$ ; men kan echter aantonen dat  $\Phi$  en  $\Phi^*$  nooit dezelfde waarden aannemen. Als we één waarde hebben van  $\Phi$  of  $\Phi^*$ , weten we dus niet alleen de datum van de tabel, maar ook of het een vollemaantabel of een nieuwemaantabel is.

De wiskundige structuur van de functie  $\Phi$  was in de moderne tijd sinds 1900 bekend, maar omtrent de betekenis heeft men lange tijd in het duister getast. In 1957 werd een tablet gevonden waaruit bleek dat  $\Phi$  iets met de sarosperiode te maken had. De sarosperiode in de moderne theorie van de maanbeweging is een periode van 223 opeenvolgende synodische maanden; een synodische maand is een periode waarin de maan alle schijngestalten doorloopt (bijvoorbeeld van een volle maan tot de volgende volle maan). De Babyloniërs hebben vanaf 750 voor Christus zons- en maansverduisteringen waargenomen, en zo hebben zij waarschijnlijk ontdekt dat deze verschijnselen zich vaak na 223 achtereenvolgende synodische maanden herhalen. De 223 synodische maanden komen overeen met 6585 dagen (18 jaar en 11 dagen) plus een (variabel) gedeelte van een dag.

De betekenis van  $\Phi$  werd in 1966 door Van der Waerden vermoed (Erwachende Wissenschaft deel 2, Anfänge der Astronomie, blz. 143-148), en het vermoeden werd door de publicatie van een serie nieuwe tabletten in 1968 bevestigd. We geven eerst een globale definitie en zullen straks een verfijning aanbrenge. Laat  $S(n)$  de periode zijn tussen de volle maan in maand  $n$  en de volle maan in maand  $n+223$ . Dan is

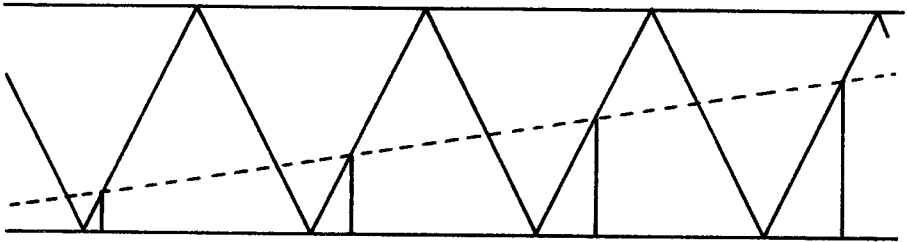
$$S(n) = 6585^d + \Phi(n).$$

Een notatie zoals  $6585^d$  betekent in het vervolg 6585 dagen.

De eenheid waarin  $\Phi$  gemeten wordt is net zoals bij de vierde kolom de tijdgraad,  $1/360$  van de dag, en de sexagesimaalpuntkomma staat na de tweede sexagesimaal. (Opmerking: in de literatuur vindt men ook hier als eenheid het "grote uur" opgegeven, d.w.z. een periode van 4 uur, de sexagesimale puntkomma staat dan een positie meer naar voren.) De functie  $\Phi$  geeft dus feitelijk de lengte van de sarosperiode die in het midden van een gegeven maand begint, waarbij het aantal dagen (6585) wordt weggelaten omdat dat getal toch steeds hetzelfde is.

Een interessant aspect is de nauwkeurigheid waarmee  $\Phi$  berekend is. Er staan nog 4 sexagesimalen na de puntkomma, dus de op één na laatste sexagesimaal staat voor  $1/54000$  seconde. In de oudheid konden grote tijdintervallen alleen worden afgelezen van het hemels uurwerk, dat wil zeggen, de positie van de zon, sterren en planeten, en daarom was meting van zulke intervallen met een nauwkeurigheid van meer dan 4 minuten een illusie. Zo zien we nog eens dat Babylonische astronomie voor een groot deel te maken heeft met puur wiskundige redeneringen. Hier heeft de overdreven nauwkeurigheid van  $\Phi$  waarschijnlijk te maken met gewenste periodiciteitseigenschappen.

Een paar interessante eigenschappen over  $\Phi$  worden duidelijk uit de toepassingen in verdere kolommen van vele tabellen (die kolommen ontbreken helaas in Figuur 1 en 2). De functie  $\Phi$  wordt gebruikt om twee andere grootheden te berekenen, om te beginnen de dagelijkse beweging van de maan  $F(n)$  ten tijde van de volle maan in het midden van maand  $n$ . De Babylonische astronomen wisten dat deze dagelijkse beweging variabel was, maar zij veronderstelden dat deze variatie een constante periode had van  $6247/6695$  (gemiddelde) synodische maanden, d.w.z. ongeveer 27,5 dagen. (Volgens tegenwoordige astronomische inzichten varieert deze periode om een gemiddelde dat ongeveer met de Babylonische waarde overeenkomt). Omdat we  $F$  slechts eenmaal per synodische maand (om de 29,5 dagen) tabelleren, valt er per keer een hele periode uit (zie Figuur 5), en dus heeft de zigzagfunctie die we in de tablet zien een veel platter aanzien. Men kan afleiden dat de periode van de zigzagfunctie die men ziet  $6247/(6695-6247) = 6247/448$  synodische maanden is, net als  $\Phi$ .



Figuur 5. Vergelijking tussen de dagelijkse maanbeweging volgens de Babyloniërs (ononderbroken lijn) en de getabelleerde maanbeweging (gebroken lijn).

De Babylonische astronomen namen het volgende verband aan:  
 $F(n)-15 = 0;15,11,15$  ( $\Phi(n)-2,13;20$ ).

Waarom (de getabelleerde)  $F$  en  $\Phi$  verondersteld werden precies in fase te zijn is niet bekend; er wordt wel verband gelegd met het feit dat 223 synodische maanden een fractie minder zijn dan 239 (constant veronderstelde) perioden van de dagelijkse maanbeweging (zie Van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft* deel 2, pp. 150-153). Dit feit was aan de Babyloniërs bekend, maar in de verdere moderne uitwerking van de motivatie verlaat men naar mijn mening het Babylonische denkraam, o.a. doordat een breuk  $3/28$ , die niet in het sexagesimaalstelsel kan worden geschreven, in deze moderne uitwerkingen een zeer belangrijke rol speelt.

In de tweede plaats werd  $\Phi$  gebruikt bij het uitrekenen van de periode tussen twee opeenvolgende volle manen. Deze periode is altijd 29 dagen plus een variabel gedeelte van een dag, en dit variabele gedeelte werd door de Babyloniërs getabelleerd. In navolging van Neugebauer voeren we de volgende moderne notatie in:

$29^d + G(n)$  is de periode tussen de volle maan in maand n-1 en de volle maand in maand n.

Om een verband tussen G en  $\Phi$  af te leiden drukken we de sarosperiode die begint met de volle maan in maand n uit door middel van  $\Phi$  en door middel van G. We krijgen dan

$$6535^d + \Phi(n) = 223 \times 29^d + G(n+1) + G(n+2) + \dots + G(n+223).$$

Eveneens

$$6535^d + \Phi(n-1) = 223 \times 29^d + G(n) + G(n+1) + \dots + G(n+222).$$

Aftrekken levert

$$\Phi(n) - \Phi(n-1) = G(n+223) - G(n).$$

Een variant van dit idee werd door de Babyloniërs als uitgangspunt genomen voor de berekening van G uit  $\Phi$ . Om te beginnen maakten zij uit  $\Phi$  door aftopping van de maxima en minima een nieuwe functie, die we  $\Psi$  zullen noemen (deze notatie is niet standaard in de literatuur).

Dit gaat als volgt:

Als  $\Phi > 2,13;20$  dan  $\Psi = 2,13;20$ .

Als  $2,13;20 \geq \Phi \geq 1,58;31,6,40$  dan  $\Psi = \Phi$ .

Als  $\Phi < 1,58;31,6,40$  dan  $\Psi = 1,58;31,6,40$ .

Het blijkt dat  $\Psi$  en G dezelfde periode hebben, en daarom was alleen een tabel nodig die voor één periode van  $\Psi$  de bijbehorende waarden van G geeft. De Babyloniërs stelden nu  $\Psi(n) - \Psi(n-1) = G(n+223) - G(n)$ .

Neem aan dat we  $\Psi$  kennen, en één waarde van G, zeg G(N). Dan kunnen we het volgende rekenschema opstellen:

$\Psi(N)$	$\Psi(N-1)$	$\Psi(N) - \Psi(N-1) = G(N+223) - G(N)$	G(N)
$\Psi(N+223)$	$\Psi(N+222)$	$\Psi(N+223) - \Psi(N+222) = G(N+446) - G(N+223)$	G(N+223)
$\Psi(N+446)$	$\Psi(N+445)$	$\Psi(N+446) - \Psi(N+445) = G(N+669) - G(N+446)$	G(N+446)
$\Psi(N+669)$	$\Psi(N+668)$	$\Psi(N+669) - \Psi(N+668) = G(N+892) - G(N+669)$	G(N+669)
enz.			

Dit schema werd door de Babyloniërs gebruikt (met dien verstande dat ze de tweede kolom niet expliciet opschreven), en er zijn kleitabellen, waaruit het helemaal kan worden gereconstrueerd (vergelijk Neugebauer, HAMA I, 509). We geven een paar regels in Figuur 6:

$\Psi(n)$	$\Psi(n-1)$	$\Psi(n) - \Psi(n-1)$	$G(n)$
2,13;20	2,13;20	0	2,40
2,13;20	2,13; 2,13,20	0;17,46,40	2,40;17,46,40
2,13;20	2,12;44,26,40	0;35,33,20	2,40;53,20
2,13;20	2,12;26,40	0;53,20	2,41;46,40
2,13;20	2,12; 8,53,20	1;11,6,40	2,42;57,46,40
2,13;20	2,11;51,6,40	1;28,53,20	2,44;26,40
2,13;20	2,11;33,20	1;46,40	2,46;13,20
2,13;20	2,11;15,33,20	2;4,26,40	2,48;17,46,40
2,13;20	2,10;57,46,40	2;22,13,20	2,50;40
2,13;20	2,10;40	2;40	2,53;20
2,13;8,8,53,20	2,10;22,13,20	2;45,55,33,20	2,56;5,55,33,20
2,12;50,22,13,20 enz.	2,10;4,26,40	2;45,55,33,20	2,58;51,51,6,40

Figuur 6. Berekening van  $G$  uit  $\Psi$ .

Merk op dat de opeenvolgende waarden van  $\Psi$  en  $G$  dicht bij elkaar liggen. Dit heeft te maken met het reeds genoemde feit dat de 223 synodische maanden bijna gelijk zijn aan 16 perioden van de (getabelleerde) dagelijkse beweging van de maan. Voor een verdere bespreking verwijzen we naar HAMA deel 1, pp. 497-505.

Een interessant detail is nog dat het getal 2,13;20 de Babylonische naam van  $\Phi$  en/of  $\Psi$  geweest schijnt te zijn (dus waar wij zeggen " $\Phi$  in zekere maand is 2,2;43,20" zeiden de Babyloniërs "de 2,13;20 van die maand is 2,2;43,20").

Uit het feit dat de Babyloniërs niet  $\Phi$  maar  $\Psi$  gebruikten bij de berekening van  $G$  kunnen we vermoeden dat  $\Psi$  als de "echte" lengte van de saros werd beschouwd, en  $\Phi$  als een eerste benadering. Hiermee is een globaal antwoord gegeven op de vraag naar de betekenis van  $\Phi$ . Het antwoord is onvolledig, o.a. omdat een verdere uitbreiding van  $\Phi$  tot een functie voor elke dag en een aantal andere met  $\Phi$  samenhangende functies niet behandeld zijn, maar het geeft wel een indruk van wat men omstreeks 1970 van  $\Phi$  begreep.

We moeten nog opmerken dat de Babyloniërs een verdere correctie aanbrachten op de maandlengte  $G(n)$  wanneer de maandelijks beweging van de zon (in de tweede kolom van Figuur 2) 28;7,30° is. De lengte van de synodische maand hing dus volgens hen ook met de stand van de zon samen, en men kan zich afvragen wat voor invloed dit op de saros heeft. Moderne berekeningen leren dat de variatie in de lengte van de saros vooral samenhangt met de positie van de zon in de dierenriem, en in veel mindere mate met de maansnelheid. Daarom is het een raadsel waarom de Babylonische

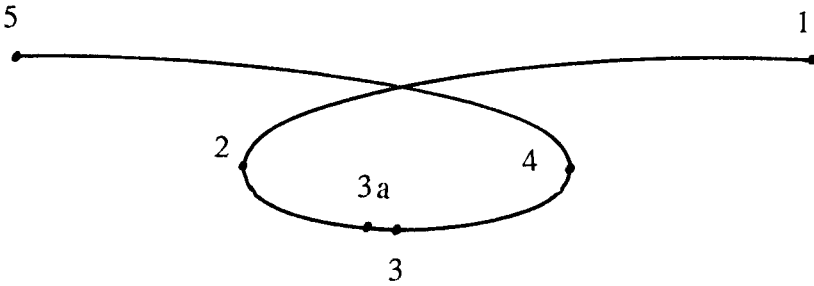
astronomen benaderingen  $\Phi$  en  $\Psi$  van de saros, met dezelfde periode als de snelheid van de maan, zouden afleiden uit hun waarnemingen van de lengten van de sarosperiode, die veel meer met de stand van de zon varieerden.

In deze kwestie is pas zeer onlangs (1990) klaarheid gekomen door onderzoek van L. Brack-Bernsen. Zij heeft aangetoond, dat  $\Phi$  direct kan worden afgeleid uit waarnemingen van de tijdsintervallen tussen maansondergang en zonsopkomst, en tussen maansopkomst en zonsondergang, op de dagen voor en na volle maan. De som van de vier van deze intervallen die bij één volle maan horen varieert met de snelheid van de maan op dezelfde manier als  $\Phi$ . Deze verklaring wordt gesteund door het feit dat er een aantal kleitabletten bewaard is waarop zulke waarnemingen systematisch zijn opgetekend. Bovendien kunnen deze waarnemingen veel frequenter worden gedaan dan waarnemingen van maans- en zonsverduisteringen. Deze aanzet kan nieuw licht werpen op de vele onopgeloste raadsels op het gebied van  $\Phi$  en aanverwante functies, waarvan er hier maar enkele genoemd zijn.

We hebben nu een trapfunctie en een zigzag-functie bekeken. Er komen andere soortgelijke, stuksgewijs lineaire, maar veel gecompliceerdere rekenschemas voor, bijvoorbeeld voor het berekenen van de lengte van de dag (kolom 4 in Figuur 2) en voor het berekenen van de breedte van de maan (vgl. Neugebauer, ACT I, pp. 47-55). De functie G is gedeeltelijk lineair, maar kolom 4 van figuur 6 is (op de laatste regel na) een kwadratische functie van het rangnummer van de rij. Zulke situaties komen in de Babylonische astronomie vaker voor, zoals blijkt uit het volgende voorbeeld.

## Een interpolatieprocédé voor de berekening van de positie van Jupiter.

Wanneer we gedurende iets meer dan een jaar de baan van een buitenplaneet (bijvoorbeeld Jupiter) tegen de achtergrond van de vaste sterren beschouwen, waarbij we beginnen met de dag waarop de zon het dichtst bij Jupiter staat (zodat we Jupiter niet kunnen zien), dan kunnen we de volgende zgn. fasen waarnemen (Figuur 7):



Figuur 7. De fasen van Jupiter.

1. Eerste zichtbaarheid voor zonsopgang. Vanaf dit moment gaat Jupiter steeds eerder in de nacht op.

2. Eerste stationaire punt. Jupiter gaat nu teruglopen ten opzichte van de vaste sterren.

3. Oppositie met de zon. Dit was voor Babylonische astronomen niet direct waarneembaar. Zij konden wel een verschijnsel waarnemen dat vlak voor de oppositie komt, namelijk (3a) de dag waarop Jupiter voor de eerste keer vlak na zonsondergang al boven de horizon is.

4. Laatste stationair punt. Jupiter gaat weer vooruit lopen ten opzichte van de vaste sterren.

5. Laatste zichtbaarheid na zonsondergang. De zon haalt Jupiter weer in.

De Babylonische astronomen waren in eerste instantie in deze vijf verschijnselen geïnteresseerd, en zij behandelden de verschijnselen apart. Zo zijn er tabellen waarop de posities van het eerste stationaire punt in opeenvolgende jaren berekend zijn. De onafhankelijke variabele is hier  $n$  (het rangnummer van het eerste stationaire punt door de jaren heen), en de afhankelijke variabelen zijn  $t_n$  (tijdstip waarop het stationaire punt bereikt wordt) en  $\lambda_n$  (positie van het stationaire punt in de dierenriem). Om  $t_{n+1}$  en  $\lambda_{n+1}$  uit  $t_n$  en  $\lambda_n$  af te leiden bestonden verschillende methoden, waarbij men aannam dat de verschillen een trapfunctie of een zigzagfunctie vormden. Voor de verschillende verschijnselen werden bij dezelfde planeet vaak essentieel verschillende trap- of zigzagfuncties gebruikt. Men beschouwde de fasen als het ware als afzonderlijke hemellichamen.

Er zijn slechts een paar tabletten bekend waarin de dagelijkse beweging van een planeet afgeleid wordt, en dit gebeurt dan door tussen de (reeds berekende) fasen te interpoleren. Lineaire interpolatie in de buurt van de stationaire punten levert geen goed resultaat, en er werden dan ook andere methoden gebruikt.

We hebben hiervoor een interessant fragment (Figuur 8, zie ACT vol. 1, p. 354-355, no. 654-55, en HAMA I, pp. 413-418), dat betrekking heeft op de beweging van Jupiter tussen eerste zichtbaarheid en het eerste stationaire punt in het jaar 147 van de Seleucidische jaartelling (164 v. Chr.). Het fragment is met enkele andere fragmenten gepubliceerd door Neugebauer in 1955. De wiskundige Huber is er in 1957 als eerste in geslaagd alle fragmenten (waarvan er in Figuur 8 maar één is afgebeeld) op de juiste manier aan elkaar te leggen.

In de eerste kolom staan nummers van dagen in de tiende maand van het jaar 147. De tweede kolom varieert lineair met de eerste, de derde kolom bevat de sommen van de tweede, en de vierde de sommen van de derde. De vierde kolom geeft de positie van Jupiter. Als we in graden rekenen staan de sexagesimale puntkommata als volgt in de tweede regel (en analoog in de volgende regels): 0;0,4 0;11,18 7;7,32

(dag)			(positie Jupiter)	
...	3,54	11,22	6 .....	.....utter
..2	4	11,18	7, 7, 32	boogschutter
13	4, 6	11,13,54	7, 18, 45, 54	boogschutter
14	4, 12	11, 9, 42	7, 29, 55, 36	bo.....
15	4, 18	11, 5,24	7, 41, 1	.....
16	4, 24	11, 1	7, 52, 2	.....
17	4, 30	10, 56, 30	8, 2, 5.....	.....
18	4, 36	10, 51, 54	8, 13 .....	.....
19	4, 42	10, 47, 12	8, 24, 37, 36	boogschutter
20	4, 48	10, 42, 24	8, 35, 30	boogschutter
21	4, 54	10, 37, 30	8, 45, 57, 30	boogschutter
22	5	10, 23, 30	8, 56, 30	boogschutter
23	5, 6	10, 27, 24	9, 6, 57, 24	boogschutter
24	5, 12	10, 22, 12	9, 17, 19, 36	boogschutter
25	5, 18	10, 16, 54	9, 27, 36, 30	boogschutter
26	5, 24	10, 11, 30	9, 37, 48	boogschutter
.....	.....	....., 6	9, 47, 48	boogschutter
.....	.....	....., 24	9, 57, 54, 24	boogschutter
			enz.	enz.

Figuur 8. Transcriptie van een tabel voor de dagelijkse positie van Jupiter.

Door verder te rekenen kunnen we inzien dat de getallen in kolom 3 op dag no. 94 een minimale waarde 0:0.9.42 zouden aannemen: in de tweede

kolom staat dan 0;12,12 en Jupiter staat in 16;8,27,36 boogschutter en is daar stationair. Men kan ook terugrekenen en zo inzien dat op dag -28 in de tweede kolom een getal 0 (of: niets) zou staan, in de derde kolom 0;12,40, en in de vierde kolom 29° schorpioen (een mooi rond getal). Dit alles wordt bevestigd door de andere fragmenten. Men kan verder aantonen dat dag -28 de eerste dag van maand IX van het jaar 147 in de Seleucidische jaartelling is, en dat Jupiter toen verondersteld werd voor het eerst zichtbaar te zijn (fase no. 1). De tabel geeft dus de dagelijkse positie van Jupiter door hogere-orde interpolatie tussen eerste zichtbaarheid en het eerste stationaire punt; hiertussen verlopen 122 dagen. De waarde 16;8,27,36 is waarschijnlijk aan de interpolatie aangepast, want op grond van gangbare methoden in andere tabletten zou men ongeveer 18 boogschutter krijgen als positie van het eerste stationaire punt.

De vraag is hoe deze interpolatie gevonden is (op goed geluk proberen is geen plausibele methode). Om van te voren meer te kunnen zeggen, moet men het laatste getal van de derde rij in het eerste getal en het constante derde-orde verschil uitdrukken. Stel we beginnen met dag -28, positie  $a$  (29° Schorpioen), eerste verschil  $b$ , tweede verschil  $0$ , derde verschil (constant)  $c$ . Op dag  $-28+n$  is het tweede verschil  $nc$ , het eerste verschil  $b+(1+2+\dots+n)c=b+n(n+1)c/2$  (hiervoor moeten we een rekenkundige reeks sommeren), en de positie  $a+nb+\{1+(1+2)+(1+2+3)+\dots+(1+2+3+\dots+n)\}c = a+nb+n(n+1)(n+2)c/6$ . Als tussenstap moeten hier de eerste  $n$  waarden van een tweedegraads veelterm gesommeerd worden. Dit laatste was in principe mogelijk voor een Babylonisch wiskundige, hetgeen blijkt uit een kleitablet waarin de som van de kwadraten  $1^2+2^2+\dots+n^2$  wordt berekend als  $(1/3+(2/3)n)\cdot(1+2+\dots+n)$  voor  $n=10$ . Deze laatste reeks is van dezelfde moeilijkheidsgraad als de reeks  $1+(1+2)+\dots+(1+2+\dots+n)$ .

Als we aannemen dat het tijdstip van het eerste stationaire punt bekend is, dan weten we  $n$  voor dat moment, en voor die  $n$  moet  $b+n(n+1)c/2=0$  vanwege het stationair zijn van de planeet. Als ook de positie van het eerste stationaire punt bekend is, dan volgt daaruit  $nb+n(n+1)(n+2)c/6$ , omdat  $a$  ook bekend is. We hebben dan twee lineaire vergelijkingen in twee onbekenden  $b$  en  $c$ , waaruit  $b$  en  $c$  kunnen worden berekend. Om het schrijfwerk op de tablet binnen de perken te houden is het essentieel dat  $c$  een mooi getal is, en daarom heeft men  $c$  in dit geval waarschijnlijk naar 0;0,0,6 afgerond. Men nam daarbij enige verandering in de positie van het eerste stationaire punt op de koop toe.

De getallen in de tabel worden weer overdreven nauwkeurig gegeven. Voor de waarneming met het blote oog is het weinig zinvol een boog van 19 graden zoals boven te verdelen in 122 stukjes met constante derde verschillen. De Babylonische astronomen moeten liefhebbers van wiskunde geweest zijn!

Het bovenstaande is een inleiding tot de Babylonische astronomie en geen overzicht. Er zijn allerlei andere systemen, stelsels enz. die hier niet genoemd zijn, en ook is niets gezegd over de geschiedenis vóór 500 voor Christus. Meer informatie over deze onderwerpen is te vinden in de aangegeven literatuur. De Babylonische astronomie is bekend geworden aan de Grieken, vooral toen zij vanaf de tweede eeuw voor Christus zelf interesse kregen in het (numeriek) voorspellen van hemelverschijnselen. Babylonische

waarnemingen werden door Hipparchus (150 v. Chr.) en Ptolemaeus (150 na Chr.) gebruikt, Babylonische parameters werden overgenomen in de Griekse astronomie, en de sexagesimale notatie en de nul werden ingevoerd. De Grieken hebben de astronomie op een andere manier behandeld, namelijk met behulp van meetkundige modellen voor de banen van de hemellichamen, en deze methode is door ons overgenomen. De Babylonische astronomie toont aan dat men ook zonder deze meetkundige modellen astronomie op hoog niveau kon bedrijven. Dit is een reden waarom de Babylonische astronomie historisch interessant is, maar er zijn er meer, men kan bijvoorbeeld denken aan de waarde voor de ontwikkeling van de wiskunde. Het is goed daarbij niet uit het oog verliezen dat het historisch belang van de Babylonische astronomie boven de wiskunde en astronomie uitgaat. In de Babylonische astronomie werden voor het eerst in de geschiedenis gecompliceerde natuurverschijnselen met behulp van wiskundige methoden op een kwantitatieve manier beschreven en voorspeld. De Babylonische astronomie is daarom het begin van de moderne exacte natuurwetenschap.

#### Literatuur.

ACT = O. Neugebauer, *Astronomical cuneiform texts*. London 1955, 3 delen (uitgave van vele tabletten met commentaar).

L. Brack-Bernsen, On the Babylonian lunar theory: a construction of column  $\Phi$  from horizontal observations. Verschijnt in het tijdschrift *Centaurus*, 1990.

HAMA = O. Neugebauer, *A history of ancient mathematical astronomy*. New York 1975, 2 delen (standaardwerk, met vele verdere verwijzingen).

O. Neugebauer, *The exact sciences in antiquity*. Providence 1957 of herdruk (inleidend).

LBAT = T. G. Pinches, J. N. Strassmayer, *Late Babylonian astronomical and related texts, prepared for publication by A. J. Sachs*. Providence 1955 (tekeningen van tabletten).

B. L. van der Waerden, *Erwachende Wissenschaft, Band 2, Anfänge der Astronomie*. Groningen 1966 of herdruk (zeer duidelijk).

Mijn dank gaat uit naar Drs. B. van Dalen voor het becommentariëren van een eerste versie van dit artikel.