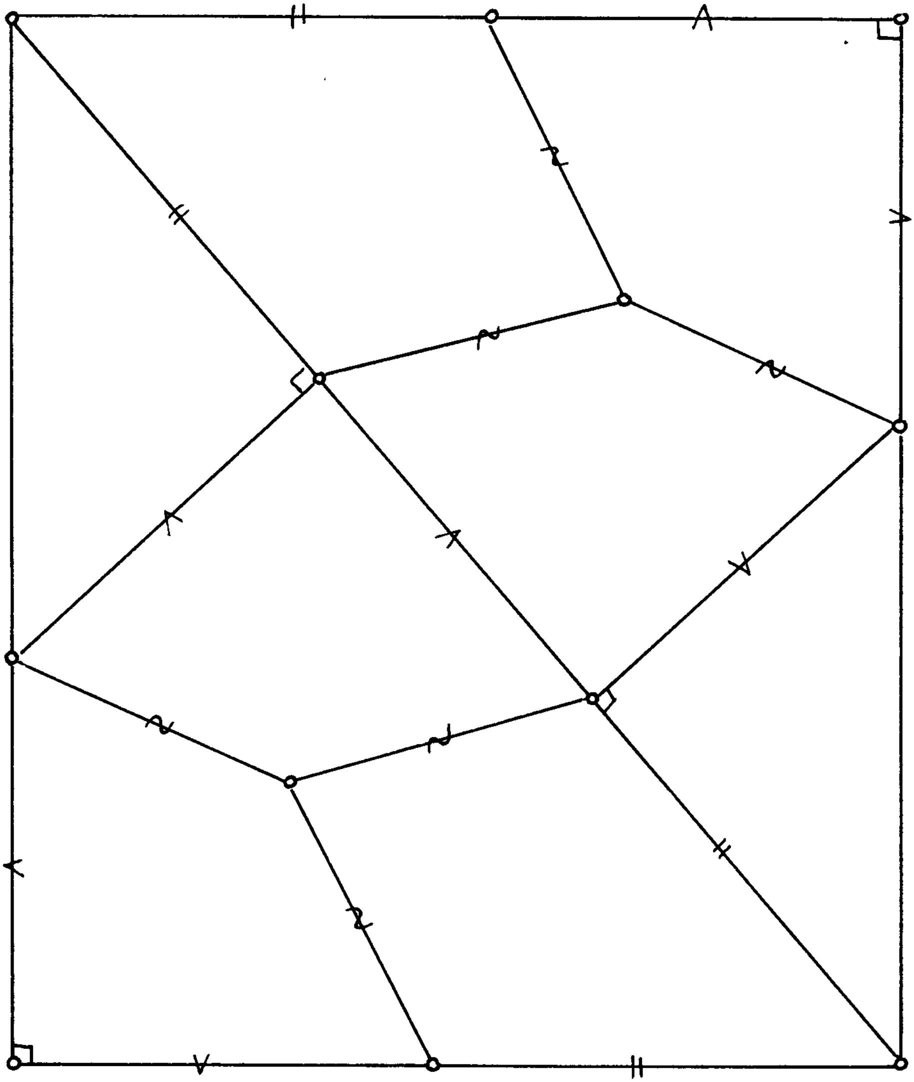
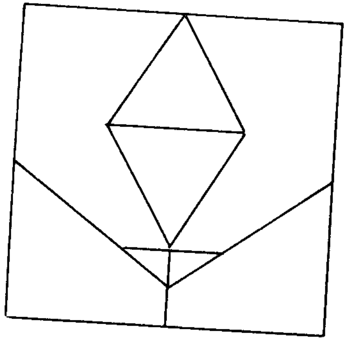
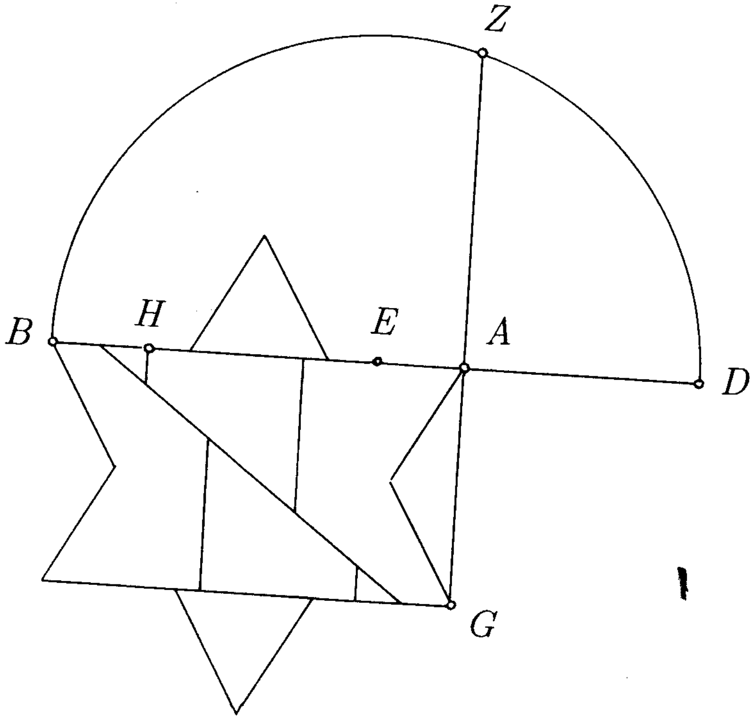
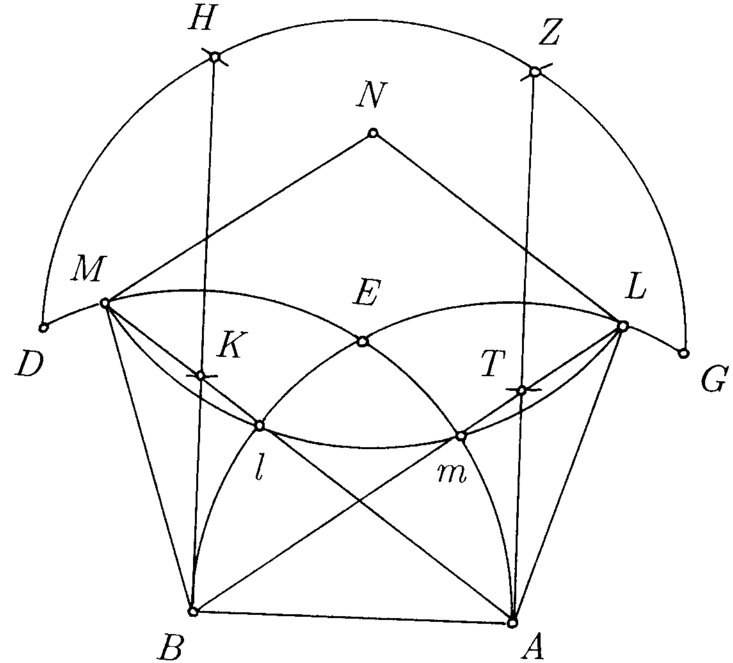


μ

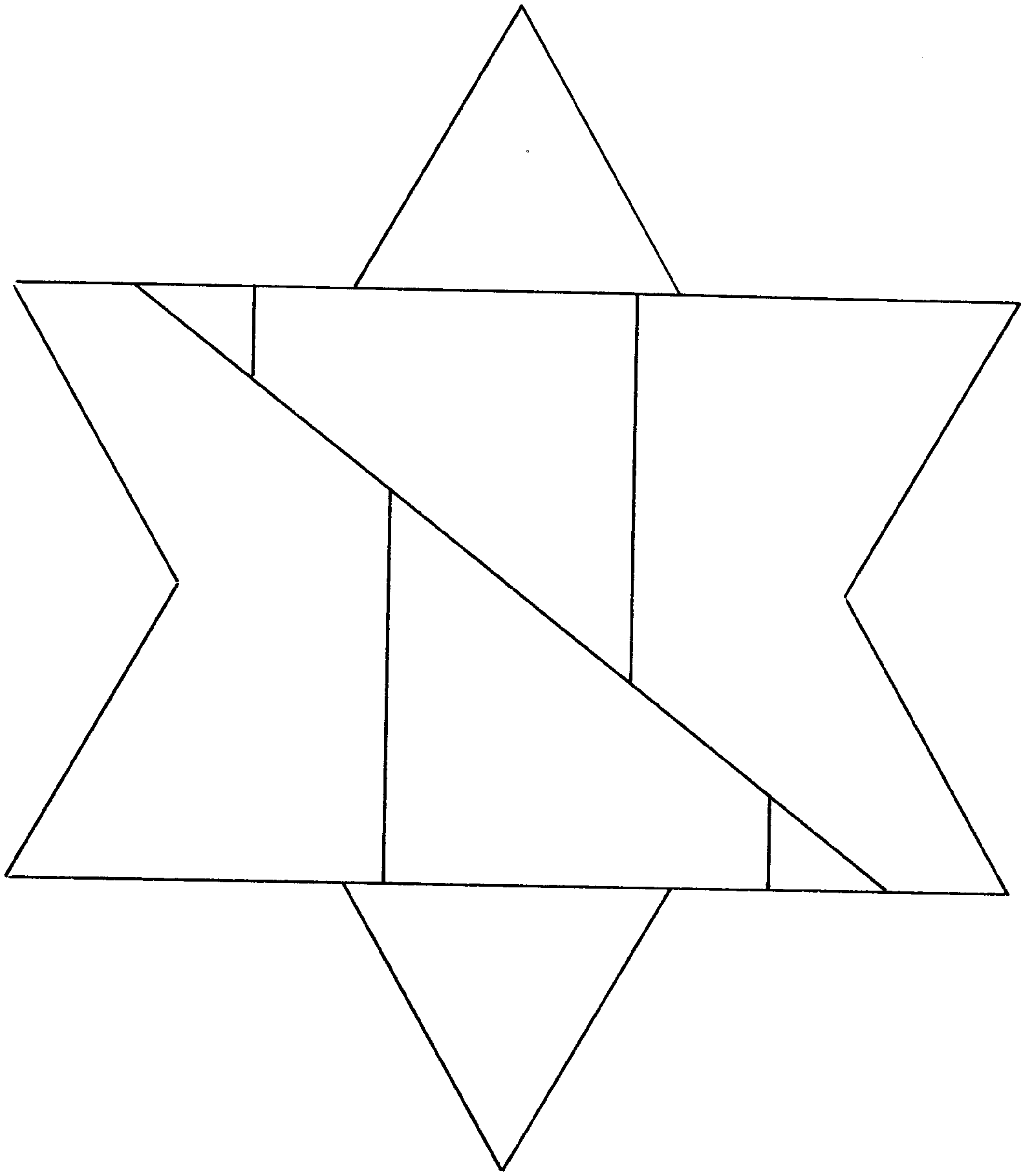


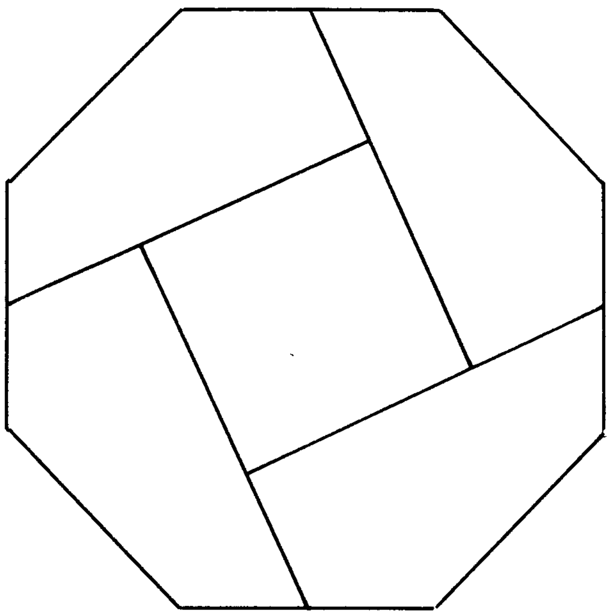


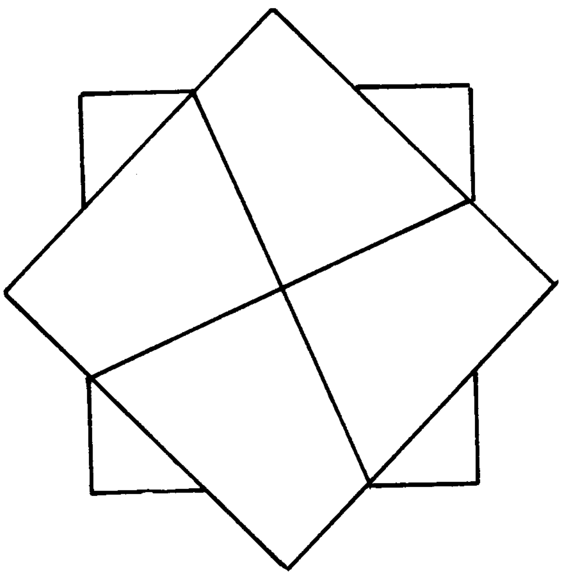
١



٢







در نسخهٔ خطی گره‌های مشابه دیگری نیز وجود دارد که در مورد آنها هم می‌توان همین پرسشها را مطرح کرد. دست کم در غرب، هنوز اطلاعات کمی در بارهٔ رسم نقوش هندسی کاشی‌کاری در ایران در سده‌های میانی وجود دارد، اگرچه کتابهای ارزشمندی در این مورد به چاپ رسیده است.

گره‌ها و نقوش هندسی کاشیها موضوع جذابی است و ممکن است نسخه‌های خطی دیگری در این مورد در ایران و خارج از ایران یافت شود. همچنین ممکن است بتوان کسانی را در ایران یافت که چیزهایی در بارهٔ سنت قدیم بدانند. اگر بتوان منابع را جمع‌آوری و مطالب آنها را با ساختمانهای موجود مقایسه کرد، و اگر بتوان این افراد را یافت و با آنها مصاحبه کرد، ممکن است بتوان در مورد نقوش هندسی کاشی‌کاری اطلاعاتی بیش از آنچه اکنون داریم به دست آورد. این نه تنها برای تاریخ هنر و تاریخ ریاضیات جالب است، بلکه برای تدریس ریاضیات نیز سودمند است. نقوش هندسی کاشی‌کاری را، به سبب ارزش هنری آنها، می‌توان به عنوان محرک علاقه به ریاضیات به کار گرفت. من بنابر تجربهٔ شخصی خود می‌دانم که به این ترتیب می‌توان کودکانی را که از انواع دیگر ریاضیات خوششان نمی‌آید، به ریاضیات علاقه‌مند ساخت.

بسیار عالی خواهد بود که ایران مرکز مطالعه در بارهٔ نقوش هندسی کاشی‌کاری شود، چون این موضوعی است که ایران سهم منحصر به فردی در ایجاد آن در فرهنگ جهانی داشته است.

مراجع

ابوالوفاء محمد بن محمد البوزجانی، هندسهٔ ایرانی، کاربرد هندسه در عمل، برگردان به عبارت روز و گردآوری ضمیمه توسط سید علیرضا جذبی، انتشارات سروش، تهران، ۱۳۶۹.

M.S. Bulatov, *Geometricheskaya Garmonizatsiya v arkhitektureSrednei Azii IX-XV vv*, [Geometrical harmonization in the architecture of Central Asia, 9th-15th centuries], Moskow, Nauka 1988.

این کتاب به روسی است و در صفحات ۳۱۵ تا ۳۴۰ آن ترجمهٔ روسی نسخهٔ خطی فارسی با توضیحات، با عنوان «پیوست ۲» آمده است.

Gulru Necipoglu, *The TopkapiScroll, geometry and ornament in Islamic architecture; Topkapi Palace Museum Library MS. H. 1956. With an essay on the geometry of the mucarnas by Mohammad al-Asad*, Santa Monica, Ca. 90401 -1455: Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995.

ترجمهٔ مهران اخباریفر

از دشوارترین گره‌ها را ذکر می‌کنم تا تصوری از مسائل گوناگونی که در پژوهش تاریخی در مورد نقوش هندسی کاشی‌کاری پیش می‌آید داشته باشید. (این گره‌ها و مسائل مرتبط با آن احتمالاً برای دانش‌آموزان بااستعداد دبیرستانی جالب‌اند.)

گره مورد نظر ما مستطیلی همراه با یک قطر آن است که مانند شکل ۳، طوری تقسیم شده است که پاره‌خطهای نشان داده شده همه مساوی‌اند، و زاویه‌های نشان داده شده قائمه‌اند. این گره را نمی‌توان در هر مستطیل دلخواهی رسم کرد؛ رسم گره تنها در صورتی ممکن است که نسبت طول مستطیل به عرض آن مقدار مشخصی (مثلاً α) باشد. در متن نسخهٔ خطی $\alpha \simeq \frac{۷}{۶}$ داده شده است. این گره بسیار جالب است، چون آن را نمی‌توان با خطکش و پرگار رسم کرد. این موضوع را مؤلف متن نیز در سده‌های میانی می‌دانسته است. او متذکر می‌شود که این گره را نمی‌توان با روشهای اقلیدس (خطکش و پرگار) رسم کرد، اما رسم آن با مقاطع مخروطی ممکن است، و ابن هیثم (که حدود ۴۳۲ هجری در قاهره درگذشت) ترسیمی توسط هذلولی و سهمی را به دست داده است.

با ریاضیات امروزی دریافتن اینکه نسبت α ریشهٔ معادلهٔ تحویل‌ناپذیر درجهٔ سوم

$$x^۳ + ۲x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$$

است[۲] چندان دشوار نیست. $\alpha \simeq ۱/۱۷۰۰۸۶۵\ldots$ به دست می‌آید. پس می‌بینیم که $\frac{۷}{۶} = ۱/۶۶۶۶۶\ldots$ تقریب بسیار خوبی است.

در متن نسخهٔ خطی همچنین ذکر می‌شود که مستطیل را می‌توان به وسیلهٔ یک هشت‌ضلعی منتظم به دست آورد؛ اگر r شعاع دایرهٔ محیطی و s طول ضلع هشت‌ضلعی منتظم باشد، می‌توانیم طول مستطیل را $r + ۲s$ و عرض آن را $r + \sqrt{r^۲ - (۲s)^۲}$ بگیریم. چون $s = ۲r \sin ۲۲/۵^\circ$، این ترسیم به

$$\alpha = \frac{r + ۲s}{r + \sqrt{r^۲ - (۲s)^۲}} \simeq ۱/۱۷۲۲۱۰۳$$

منجر می‌شود.این تقریب حتی بهتر از $\frac{۷}{۶}$ است. به نظر می‌رسد ایدهٔ این ترسیم این باشد که اگر $p = r$، آنگاه $۲s \simeq \sqrt{p^۲ + q^۲}$.

چند پرسش باقی می‌ماند:

الف) ریاضیدانان ایرانی سده‌های میانی چگونه به چنین ترسیمی دست یافتند؟ (این ترسیم چنان دقیق است که مشکل می‌توانم باور کنم توسط آزمون و خطا به دست آمده باشد.)

ب) هدف از این گره چیست؟ آیا در ساختمانهایی به کار رفته است؟ آیا نمونه‌هایی باقی مانده است؟

ج) ریاضیدانان ایرانی چگونه می‌دانستند که همهٔ ترسیمهای با خطکش و پرگار برای این گره نادرست‌اند، و مسئله را تنها با مقاطع مخروطی می‌توان حل کرد؟

۲ـ ابتدا توجه می‌کنیم که دو مثلث قائم‌الزاویه در این گره وجود دارد: مثلث قائم‌الزاویهٔ بزرگی که اضلاعش دو ضلع و یک قطر مستطیل‌اند، و مثلث کوچکی متشابه با مثلث بزرگتر. اکنون از این تشابه استفاده می‌کنیم. فرض کنید عرض مستطیل به دو پاره‌خط p و q به طوری که $p > q$ تقسیم شده باشد. در شکل، پاره‌خط p با || و پاره‌خط q با V مشخص شده است. در این صورت، قطر مستطیل به پاره‌خطهای p، q، و p تقسیم می‌شود. اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ کوچک درگره q، p، و $\sqrt{p^۲ + q^۲}$ است و اضلاع مثلث قائم‌الزاویهٔ بزرگ $p + q$، $۲p + q$، $q + \sqrt{p^۲ + q^۲}$ است. چون این دو مثلث متشابه‌اند، داریم $\alpha = \frac{p}{q} = \frac{q + \sqrt{p^۲ + q^۲}}{p + q}$. اگر صورت و مخرج را بر q تقسیم کنیم، حاصل می‌شود $\alpha = \frac{۱ + \sqrt{۱ + \alpha^۲}}{\alpha + ۱}$. بنابراین، پس از حذف جمله‌های مساوی و تقسیم بر α، به دست می‌آوریم $\alpha^۳ + ۲\alpha^۲ - ۲\alpha - ۲ = ۰$. معادلهٔ درجهٔ سوم $x^۳ + ۲x^۲ - ۲x - ۲ = ۰$ بنابر شرط آیزنشتاین (که بر عدد اول ۲ اعمال شود)، تحویل‌ناپذیر است. پس ریشهٔ $\alpha \simeq ۱/۱۷۰۰۸۶۵\ldots$ را نمی‌توان با خطکش و پرگار به دست آورد.

می‌دهیم تا محیط نیم‌دایره را در Z قطع کند (اکنون، $AZ = \sqrt{AD \cdot AB}$). پاره‌خط AH را به اندازهٔ AZ جدا و HB را نصف می‌کنیم. از نقطهٔ وسط HB و مرکز ستاره خطی می‌گذرانیم تا مانند شکل، ستاره به دو نیمهٔ مساوی تقسیم شود. اکنون در H و نقطهٔ وسط AB عمودهایی بر AB رسم می‌کنیم. نیمهٔ دیگر ستاره را نیز به همین ترتیب، مانند شکل، تقسیم می‌کنیم.

برای هشت‌ضلعی منتظم و ستارهٔ هشت‌پر دستورالعملی داده نشده است (احتمالاً این دستورالعملها به طور شفاهی داده می‌شده است).

برای شاگردان شما، احتمالاً آغازکردن با مربع و تقسیم آن به قطعه‌هایی که با آنها بتوان یک شش‌ضلعی منتظم، یک هشت‌ضلعی منتظم، یا یک ستارهٔ هشت‌پر ساخت چالش برانگیزتر است. در نسخهٔ خطی جزئیات دستورالعملها داده نشده است، و لی شما خود می‌توانید این دستورالعملها را به دست آورید.

صفحهٔ ۲ از برگهٔ کار شما کپی برگ ۱۹۷ نسخهٔ خطی است که در آن شکلهایی بدون دستورالعمل رسم شده است. برخی از شکلها را می‌توان به شکلهای دیگر تبدیل کرد و به دست آوردن جزئیات این تبدیلها برای شما پازل جالبی خواهد بود. (وقتی موفق به حل پازل می‌شوید که بتوانید این کار را با یک برگ کاغذ و یک قیچی انجام دهید.)

ب. نوع دوم ترسیمها در نسخهٔ خطی مربوط به ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با خطکش (غیر مدرج) و پرگار با دهانهٔ ثابت است. دهانهٔ پرگار برای دقت ترسیم ثابت گرفته شده است. ترسیم زیر (شکل ۲) به لحاظ ریاضی دقیق نیست، ولی تقریب بسیار خوبی است و چنان ساده است که به آسانی می‌توانید در کلاس شرح دهید.

دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ AB ثابت کنید. ابتدا دایره‌هایی به مراکز A و B و به شعاع AB رسم می‌کنیم. این دایره‌ها یکدیگر را در E قطع می‌کنند. سپس به مرکز E و شعاع AB کمانی از دایره را رسم می‌کنیم؛ این دایره کمان AE را در نقطهٔ D و کمان BE را در نقطهٔ G قطع می‌کند. نقطهٔ H را روی این دایره طوری می‌گیریم که $DH = AB$ (یک بازوی پرگار را در D قرار دهید و به مرکز D و به شعاع AB بخش کوچکی از یک دایره را رسم کنید تا دایرهٔ به مرکز E را در H قطع کند). به همین ترتیب، نقطهٔ Z را روی دایره طوری بگیرید که $GZ = AB$. اکنون شش‌ضلعی منتظم $ABDHZG$ را به ضلع AB رسم کرده‌ایم. ZA و HB را رسم کنید، و نقطهٔ T را روی ZA و نقطهٔ K را روی HB طوری بگیرید (به وسیلهٔ پرگار) که $ZT = HK = AB$. پاره‌خطهای AK و BT را رسم کنید و امتداد دهید تا کمانهای AD و BG را به ترتیب در M و L قطع کنند. سرانجام، N را طوری بیابید که $MN = LN = AB$ (توسط پرگار؛ بخشهایی از دایره‌هایی را به مراکز M و L و به شعاع AB رسم کنید).

در این صورت، $ABMNL$ یک پنج‌ضلعی تقریباً منتظم خواهد بود. در نسخهٔ خطی اثباتی برای این ترسیم داده نشده است.

تمرین ۲. ترسیم را انجام دهید و دقت ترسیم را به روشی که در نسخهٔ خطی ذکر شده است آزمایش کنید: دایره‌ای به مرکز N و شعاع AB رسم کنید؛ این دایره باید از m، نقطهٔ تلاقی BT با کمان AE، و همچنین از l، نقطهٔ تلاقی AK با کمان BE بگذرد.

به خاطر سپردن این ترسیم بسیار آسان است. تنها باید دو خط موازی ZA و HB و نقاط T و K را روی آنها به طوری که $ZT = HK = AB$ به خاطر داشته باشیم. ترسیم دقیق نیست، اما خطای آن چنان کم است که در ترسیم اثری ندارد. داریم $\tan \angle KAB = \sqrt{۳} - ۱$؛ پس $\angle KAB = ۳۶^\circ ۱۲' \ldots$. در پنج‌ضلعی منتظمی که به دقت رسم شده باشد، $\angle KAB = ۳۶^\circ$.

در نسخهٔ خطی ترسیم پنج‌ضلعی منتظم با دهانهٔ پرگار به اندازهٔ قطر یا ارتفاع پنج‌ضلعی نیز عرضه شده است. این ترسیمها پیچیده‌تر و نادقیق‌اند، اما خطای این ترسیمها نیز بسیار کوچک است.

پ. در نسخهٔ خطی اغلب در موقعیت مشابهی قرار می‌گیریم. گره‌هایی (ایده‌آل) در نظر گرفته می‌شود که معمولاً ترسیم آنها با خطکش و پرگار دشوار یا ناممکن است. سپس ترسیمی تقریبی عرضه می‌شود که خطای آن چنان ناچیز است که اثر خطا در ترسیم واقعی ظاهر نمی‌شود. این ترسیمها سطح بالای سنت هندسهٔ عملی در ایران سده‌های میانی را نشان می‌دهد. در اینجا یکی

عربی می‌نوشتند و این نیز باعث شده است که آثار این دانشمندان به آسانی برای ایرانیان قابل مطالعه نباشد. بنابراین، وجود رساله‌هایی در ریاضیات مربوط به سده‌های میانی به زبان فارسی جالب است.

امروز مثالهایی را از یک متن فارسی در مورد ترسیم نقوش هندسی کاشی کاری شرح می‌دهم. عنوان این متن «فی تداخل الاشکال المتشابهه او المتوافقه» (محاط کردن شکلهای متشابه یا یکسان در یکدیگر) است.

این متن در یک نسخهٔ خطی در کتابخانهٔ ملی پاریس، به شمارهٔ ۱۶۹ از نسخه‌های خطی فارسی، موجود است.[۱] این نسخهٔ خطی بدون تاریخ است، اما بیشتر متخصصان معتقدند که حدود سال ۱۰۰۰ هجری نوشته شده است. متن مورد بحث ممکن است بسیار زودتر، و حتی حدود ۵۰۰ هجری نوشته شده باشد. در این متن از ریاضیدانی به نام «ابوبکر خلیل التاجر الرصدی» نام برده شده است که اطلاعی از او در دست نداریم. احتمالاً در صورتی که اطلاعات بیشتری از این ریاضیدان به دست آید، تاریخ نگارش متن معلوم خواهد شد. نسخهٔ خطی حاوی چند متن دیگر نیز هست (اغلب آنها به فارسی و چند تایی به عربی است)، و جدولی جغرافیایی نیز در آن هست که چندین محل نزدیک به اصفهان در آن ذکر شده است. بنابراین، احتمال اینکه نسخهٔ خطی در اصفهان یا نزدیک به اصفهان نوشته شده باشد زیاد است.

من وقتی که برای برگزاری این کارگاه اعلام آمادگی کردم فکر می‌کردم که متن فارسی نسخهٔ خطی منتشر نشده است و تنها ترجمهٔ روسی آن توسط بولاتف در دسترس است. بعداً مطلع شدم ویرایشی توسط علیرضا جذبی (تهران، ۱۳۶۹) منتشر شده است که در آن متن نسخهٔ خطی به فارسی امروزی برگردانده شده است. همچنین مطلع شدم که ویرایش دیگری از این متن همراه با توضیحات توسط مهران اخباریفر (تهران) در حال آماده شدن است. اینها خبرهای خوبی است، چون توضیحات بولاتف بسیار ناقص و نارساست. در انتهای مقاله مشخصات این کتابها و چند کتاب دیگر داده شده است.

نسخهٔ خطی مشتمل بر ۳۸ صفحه حاوی ترسیمات هندسی با دستورالعملهایی به زبان فارسی است، اما اثبات هندسی هیچ‌کدام از ترسیمها داده نشده است. نسخهٔ خطی اساساً به بررسی سه نوع مسئله می‌پردازد و ما برای هر کدام از این سه نوع مسئله یک مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم. همهٔ این مسائل در تاریخ ریاضیات امروزین نسبتاً نامعمول‌اند. دلیل این امر ممکن است این باشد که امروزه بیشتر تاریخ نگاران ریاضیات بر تاریخ ریاضیات «نظری» (با اثبات) متمرکز شده‌اند، درحالی که نسخهٔ خطی ما متعلق به سنت ریاضیات عملی است، که چندان شناخته شده نیست.

(الف). در اولین نوع مسائل کار را با شکلی (مثل یک مربع) آغاز می‌کنیم و می‌خواهیم این شکل را به گونه‌ای به چند قطعه ببریم که با تجدید آرایش قطعه‌های بریده شده، شکل دیگری (مثلاً یک شش‌ضلعی منتظم) به دست آید. همهٔ قطعه‌های بریده شده از شکل اول باید در شکل دوم به کار برده شود.

در صفحهٔ ۱ از برگهٔ کار شما سه مثال نشان داده شده است. مثال اول یک ستارهٔ شش‌پر است که به قطعه‌هایی تقسیم شده است و با بریدن و تجدید آرایش این قطعه‌ها می‌توان یک مربع ساخت. این شکل از نسخهٔ خطی برداشته شده، ولی به گونه‌ای دقیق رسم شده است.

تمرین ۱. قطعه‌های ستارهٔ شش‌پر را ببرید و با تجدید آرایش آنها یک مربع بسازید.

در شکلهای دوم و سوم یک هشت‌ضلعی منتظم و یک ستارهٔ هشت‌پر نشان داده شده است که به گونه‌ای تقسیم شده‌اند که با تجدید آرایش قطعه‌های هر کدام از آنها می‌توان یک مربع ساخت. این شکلها از نسخهٔ خطی برداشته شده است.

درواقع، قطعه‌ها را بدون دستورالعمل نمی‌توان تعیین کرد. در نسخهٔ خطی تنها جزئیات مربوط به ستارهٔ شش‌پر داده شده است (شکل ۱، شکل نسخهٔ خطی است). ابتدا سه نقطهٔ B، A، و G را مانند شکل در نظر می‌گیریم. نقطهٔ D را روی امتداد BA طوری انتخاب می‌کنیم که $AD = AG$. نیم‌دایره‌ای به قطر BD (به مرکز E) رسم می‌کنیم. GA را رسم می‌کنیم و آن را امتداد

۱ـ عکس این نسخهٔ خطی در کتابخانهٔ مرکزی دانشگاه تهران به‌شماره‌های ۷۷۵/۲۲ و ۹۱۶/۲۲ موجود است.

یک نسخهٔ خطی فارسی از مؤلفی ناشناخته (سدهٔ دهم هجری) در مورد نقوش هندسی کاشی‌کاری

یان پ. هوخندایک، گروه ریاضی، دانشگاه اوترخت (هلند)
Jan P. Hogendijk, Mathematics Department, University of Utrecht,
P.O. Box 80.010, 3508 TA Utrecht, fax: +31-30-2518394, email: hogend@math.ruu.nl.

کارگاه معلمان ریاضیات، برای عرضه در **نخستین کنفرانس آموزش ریاضی**، اصفهان، ۸ ـ ۶ شهریور ماه ۱۳۷۵.
وسایل لازم در این کارگاه:
برای هر شرکت کننده یک برگ کاغذ، یک قیچی، یک خط‌کش، یک پرگار، و برگهٔ کار این کارگاه (۲ برگ).

خانمها و آقایان،

دلایل زیادی برای جذابیت تاریخ ریاضیات در کلاس درس (و همچنین برای دانشجویان دانشگاه) وجود دارد. چند تا از این دلایل عبارت‌اند از:

الف) دانش‌آموزان گاهی ریاضیات را مجموعه‌ای گنگ و غیر انسانی از روابط و قضایا می‌پندارند. تاریخ ریاضیات نشان می‌دهد که ریاضیات نیز حاصل خلاقیت انسانهاست و حتی اغلب از مسائل عملی ناشی می‌شود.

ب) امروزه اغلب ریاضیات را (آگاهانه یا ناآگاهانه) علمی «غربی» می‌انگارند. تاریخ نشان می‌دهد که ریاضیات ریشه‌های بسیاری در تمدنهای دیگر، از جمله تمدن اسلامی، دارد. (بسیاری از واژه‌های متداول در ریاضیات امروزی، مانند جبر، صفر، الگوریسم، . . . ، بر این امر دلالت دارند.)

ج) چون علم امروزی بسیار گسترده‌تر از علم در سده‌های گذشته است، گاهی (آگاهانه یا ناآگاهانه) اعتقاد مردم بر این است که علم قدیم پیش‌پاافتاده و ذهن دانشمندان قدیم ابتدایی بوده است. مطالعهٔ تاریخ ریاضیات (و علم) نشان می‌دهد که این دیدگاه نادرست است. به دور انداختن چنین دیدگاههایی به کمک مطالعهٔ مثالهای واقعی از آثار دانشمندان قدیم حائز اهمیت است. چنین مثالهایی ممکن است بر اساس واقعیات، ارزش علم قدیم و سده‌های میانی را در نظر دانش‌آموزان بالا ببرد.

ریاضیدانان ایرانی نقش مهمی را در بسط ریاضیات در دوره‌های گوناگون بازی کرده‌اند. دانستن این نقش ریاضیدانان ایرانی در بسط ریاضیات برای معلمان ریاضیات در ایران جالب است، اما بیشتر آثار ریاضیدانان ایرانی در سده‌های میانی پیچیده‌تر یا ناآشناتر از آن است که قابل تشریح برای دانش‌آموزان دبیرستانی باشد. در سده‌های اول علم اسلامی، بیشتر دانشمندان به زبان