چون $HZ = AG$ ، ZG با ضلع مربع میانی موازی است (شکل ۵). در شکل ۴ این مربع میانی با خط‌چین نشان داده شده است، بنابراین خطای ترسیم زاویهٔ γ تنها ۳ دقیقهٔ کمان است!

طراحان ایرانی کاشیکاری چگونه این ترسیم تقریبی را یافتند؟ من نمی‌دانم. مایلم یافتن پاسخ این سئوال را به خواننده علاقمند واگذار کنم. چنان که قبلاً گفتم در شکل ۵ خطهایی وجود دارد که توضیحی برای آنها داده نشده است. همچنین در نسخهٔ خطی یک رقم ۵ (که به شکل قلب وارونه است!) بدون هیچ توضیحی روی شکل دیده می‌شود. شاید با این راهنماییها کسی بتواند اندیشهٔ نهفته در این شکل را بیابد.

سرانجام رباعی فارسی نوشته شده در چهار ترنج و عبارت موجود در مربع مرکزی را ذکر می‌کنیم. این رباعی در ستایش حضرت علی، امام اول شیعیان و عبارت درون مربع نام طراح یا سازنده این کاشیکاری است.

چون نامهٔ جرم ما بهم پیچیدند
بردند و بمیزان عمل سنجیدند
بیش از همه کس گناه ما بود ولی
ما را بمحبت علی بخشیدند

عمل محمد حسین ابن محمد قوامی

از ویراستاران نشریهٔ "مجلهٔ ریاضی نوین" (Nievwe Wiskrant) و همچنین از هوشنگ اعلم و محمد باقری از گروه تاریخ علم بنیاد دایرة المعارف اسلامی به خاطر راهنماییها و کمکهایشان سپاسگزارم.

پی‌نویسها:

[1] Gülru Necipoğlgu, The Topkapi Scroll, geometry and ornament in Islamic architecture: Topkapi Palace Museum Libray MS.H. 1956. With an essay on the geometry of the muqarnas by Mohammad al-Asad. Santa Monica, Ca. 90401-1455: Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995. ISBN 089236-335-5.

[2] Butatov, M.S. (1988), Geometricheskaya ... $IX - XVvv$
(هماهنگی هندسی در معماری آسیای مرکزی بین قرنهای ۳ تا ۹ هجری)
در ترجمهٔ روسی نسخهٔ خطی فارسی، شکلها قابل توجهند

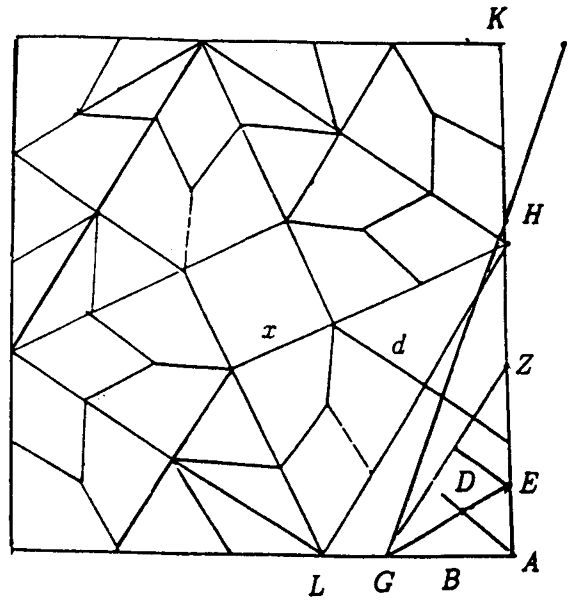
[۳] ابوالوفای بوزجانی، **هندسهٔ ایرانی**، به کوشش علیرضا جذبی، انتشارات سروش، تهران، ۱۳۷۰.

[۴] متن انگلیسی و ترجمهٔ فارسی آن به وسیلهٔ مهران اخباریفر در مجموعه مقالات نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران (اصفهان، شهریور ۱۳۷۵) منتشر شده است.

[۵] جی. ال. برگرن، **گوشه‌هایی از تاریخ ریاضیات اسلامی**، ترجمهٔ قاسم وحیدی اصل، انتشارات فاطمی، تهران، ....۱۳، ص ...

[6] Zie bijvoorbeeld M.Riemersma (1994). Algebra, debrug tussen getallen en meetkundige constructies, Utrecht:Epsilon Uitgacen no. 31.

برابر با d می‌گیریم. اکنون می‌خواهیم d را بر حسب a، b و x نشان دهیم. برای سهولت می‌توانیم فرض کنیم $b = ۱$ و ضلع مربع میانی را m می‌نامیم. اکنون داریم $a - b = b + x$ و $b = ۱$، پس طبق قضیه فیثاغورث $m = \sqrt{۱ + (۱ + x)^{۲}}$. بر اساس تشابه مثلثها داریم: $\frac{d}{b} = \frac{b}{m}$ پس $d = \frac{۱}{\sqrt{۱+(۱+x)^{۲}}}$
سرانجام زاویه حادهٔ بزرگتر در هر مثلث قائم‌الزاویه بین مربع میانی و مربع اولیه را γ می‌نامیم.
شکل ۴ نشان می‌دهد که در حالت کلی d با x برابر نیست. اگر d با x مساوی باشد، شکل ۵ حاصل می‌شود که از نسخهٔ خطی گرفته شده است. در این شکل، پاره‌خطهای متساوی زیادی وجود دارد. این شکل همچنین حاوی حروف الفبا و پاره‌خطهایی است که هر ترنج را به اجزاء کوچکتر تقسیم می‌کنند. دلیل انتخاب این پاره‌خطها بر من روشن نیست.



شکل ۵

ترسیم شکل ۵ چندان آسان نیست، زیرا اگر $d = x$، معادلهٔ $x^{۴} + ۲x^{۳} + ۲x^{۲} - ۱ = ۰$ به دست می‌آید. با تقسیم بر $x+۱$، نتیجه می‌شود $x^{۳}+x^{۲}+x-۱ = ۰$. این معادله در قلمرو اعداد گویا تجزیه ناپذیر است. پس ترسیم شکل به ازای $d = x$ با خطکش و پرگار ناممکن است. توجه کنید که معادله یک ریشهٔ حقیقی دارد $x_{\circ} = ۰/۵۴۳۶۸۹$ و $\tan\gamma = ۱ + x_{\circ}$، پس $\gamma \cong ۵۷^{\circ}, ۴'$. هیچ یک از این مطالب در نسخهٔ خطی ذکر نشده است. اما در نسخه خطی، در نزدیکی شکل ۵، روشی تقریبی برای ترسیم آن آمده است.
"خط AD قطر مربع است.

توضیح: در آغاز این مبحث، مربع کوچکی به ضلع دلخواه که در شکل ترسیم نشده، در نظر گرفته شده است. قطر آن AD و محل آن درون یکی از زاویه‌های مربع اولیه است. اکنون نقاط B و G را روی ضلع پائینی مربع اولیه مشخص می‌کنیم چنان که $AB = BG = AD$. پاره خط GD را رسم می‌کنیم تا ضلع عمودی را در E قطع کند. سپس Z و H را روی این ضلع عمودی چنان مشخص می‌کنیم که $EZ = ZH = AG$. G را به H وصل می‌کنیم. از رأس k خطی موازی با HG رسم می‌کنیم تا ضلع پایینی را در L قطع کند. اکنون یک رأس مربع میانی را یافته‌ایم. بقیه کار آسان است.
این ترسیم چقدر دقیق است؟ اندکی محاسبه نشان می‌دهد که:

$$\tan \angle ZGA = AZ : AG = \frac{۸}{۷}(۲ + \sqrt{۲})$$

$$: ۲\sqrt{۲} \cong ۱/۵۴۶۹۱۸$$

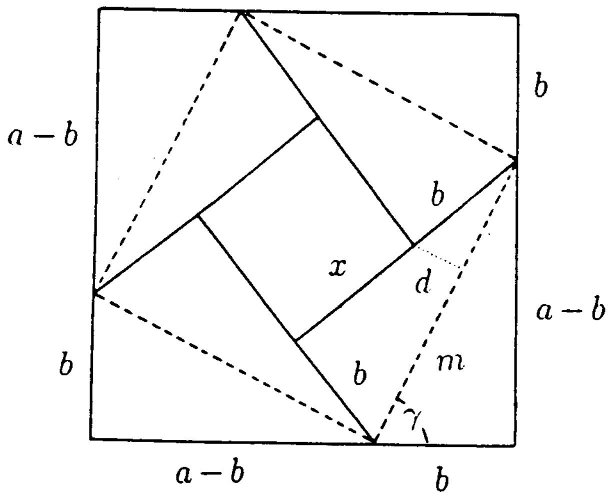
پس

$$\angle ZGA \cong ۵۷^{\circ}, ۷'$$

در پنج ضلعی منتظم این زاویه باید دقیقاً ۳۶ درجه باشد. پس این ترسیم دقیق نیست، ولی خطای آن در عمل قابل توجه نیست. در نسخه خطی فارسی مذکور ترسیمهای دیگری هم هستند که در آنها دهانهٔ ثابت پرگار با قطر یا ارتفاع پنج ضلعی مطلوب برابر است. خطای موجود در این ترسیمها نیز بسیار ناچیز است. ابوالوفای بوزجانی ریاضیدان ایرانی قرن چهارم هجری ترسیم دقیقی از پنج ضلعی منتظم را با دهانه ثابت پرگاری برابر با ضلع پنج ضلعی مطلوب عرضه کرده است[5]. این ترسیم بسیار پیچیده است. اقلیدس هم ترسیم دقیقی برای پنج ضلعی منتظم عرضه کرده است ولی در این ترسیم دهانه پرگار دست کم یک بار باید تغییر کند.

تقسیم مربع به پنج جزء (نقش چهار ترنج)

نوع سوم مسایل نسخه خطی متشکل از ترسیم نقشها و شکلهای گوناگونی است که برای تزئین قابل استفاده است. در اینجا به عنوان مثال تقسیم مربع را به پنج جزء چنان که در شکل ۴ دیده می‌شود، بیان می‌کنیم. اساس این ترسیم به بیان امروزی چنین است. روی چهار ضلع مربعی به ضلع a، چهار نقطه را در یک جهت و به یک فاصله مفروض b از هر رأس با شرط $b < \frac{a}{۲}$ اختیار می‌کنیم (شکل ۴). با اتصال این چهار نقطه، چهار مثلث قائم‌الزاویه و یک مربع که با خط‌چین نشان داده شده است، به دست می‌آید. اگر قرینهٔ محوری هر مثلث قائم‌الزاویه را نسبت به وترش رسم کنیم، از هر مثلث و قرینه‌اش یک چهارضلعی دو قائمه به دست می‌آید که دو ضلعش برابر b و دو ضلع دیگرش برابر با $a - b$ هستند. این چهار ضلعی را در اصطلاح کاشیکاری ترنج می‌نامند. اکنون مربع اولیه به چهار ترنج و یک مربع کوچک به ضلع $x = a - ۲b$ تقسیم شده است.



شکل ۴

با تغییر b می‌توانیم صورتهای مختلفی از این طرح را به دست آوریم.

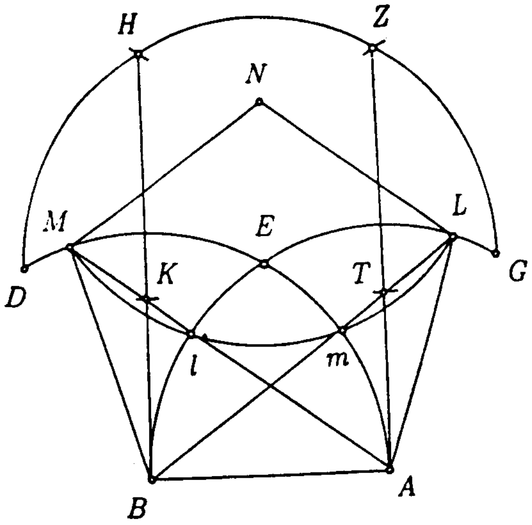
برای ایجاد این طرح، ابتدا ترسیم شکل ۴، به ازای $x = b$ یا به عبارت دیگر $a = ۳b$ انجام شده است. سپس نوارهایی به پهنای $c = \frac{b}{۵} = \frac{a}{۱۵}$ روی خطهای طرح اضافه شده است. این امر را به آسانی می‌توان دریافت: فاصله بین دو نقش خورشید (شمسه) روی ضلع طرح نیز c است و طول کلی ضلع طرح برابر است با $a + c = ۱۶c$. در فضای باقی مانده که شامل یک مربع و چهار ترنج است، یک رباعی فارسی نوشته شده است (پایان مقاله را ببینید) و خود نوار با نقوش کاشیکاری ریز پر شده است.

یک طرح راز آلود

این مقاله را با عرضهٔ یکی از جنبه‌های راز آلود نقوش نسخهٔ خطی فارسی به پایان می‌بریم.

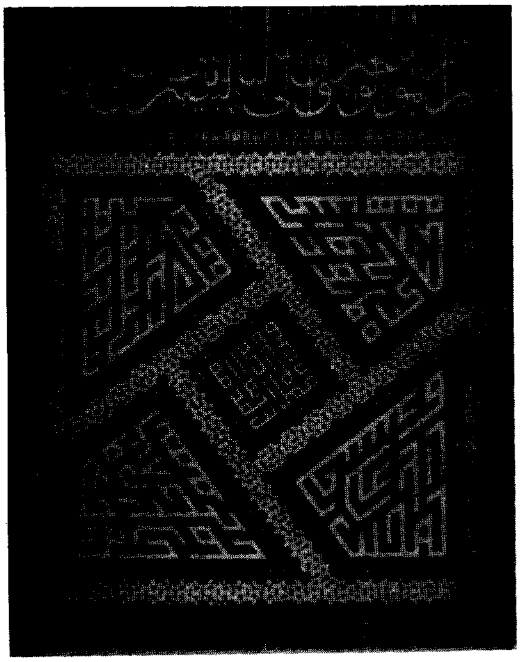
ابتدا به شکل ۴ برمی‌گریم و فاصلهٔ رأس مربع کوچک تا وتر مثلث قائم‌الزاویه را که با نقطه‌چین نشان داده شده است

ویژگی خاص این ترسیمها ثابت بودن دهانهٔ پرگار است. ظاهراً این شرط ناشی از ملاحظات عملی برای احتراز از خطا در ترسیم است که همیشه ممکن است در اثر تغییر دهانه پرگار ایجاد شود. البته این شرط هنگام ترسیم کل نقش بسیار مهم‌تر از ترسیم یک شکل منفرد است.



شکل ۳

در ترسیم شکل ۳ دهانهٔ پرگار به اندازه ضلع AB از پنج ضلعی مطلوب ثابت می‌ماند. اکنون تنها می‌توانیم دایره‌هایی به شعاع AB رسم کنیم. ابتدا یک شش ضلعی منتظم $ABDHZG$ به روش شناخته شده رسم می‌کنیم. نقطهٔ E مرکز دایرهٔ گذرنده از رأسهای شش ضلعی است. اکنون با خط‌کش خطهای موازی ZA و HB را رسم می‌کنیم. نقطه T بر AZ و نقطه K بر HB را چنان مشخص می‌کنیم $ZT = HK = AB$. برای این کار قوسهای کوچکی به مرکز Z و H رسم می‌کنیم. سپس با خط‌کش AK و BT را رسم می‌کنیم و آنها را ادامه می‌دهیم تا کمانهای AD و BG را در نقاط M و L قطع کنند. سرانجام نقطه N را به عنوان برخوردگاه دایره‌های به مرکز M و N به دست می‌آوریم. در این صورت $ABMNL$ پنج ضلعی مطلوب خواهد بود.

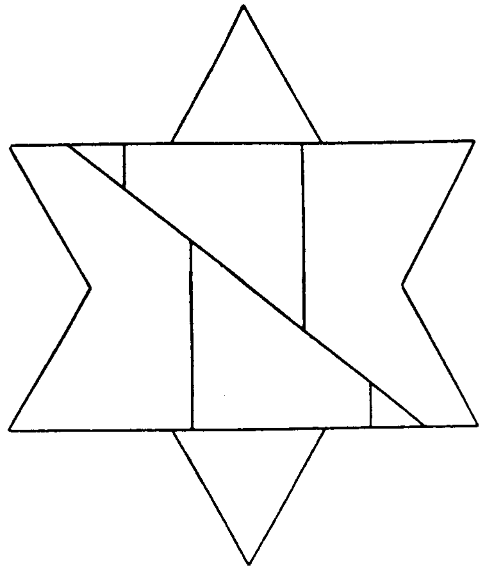


در این کاشیکاری یک رباعی فارسی به خط بنایی آورده شده است

تمرین

این ترسیم را انجام دهید و به صورت زیر (که در نسخه خطی آمده است) درستی ترسیم را امتحان کنید: دایره‌ای به مرکز N و البته به شعاع AB رسم کنید و عبور این را از نقاط m و ℓ، برخوردگاه خط BL با کمان AD و خط AM با کمان BE، تحقیق کنید.

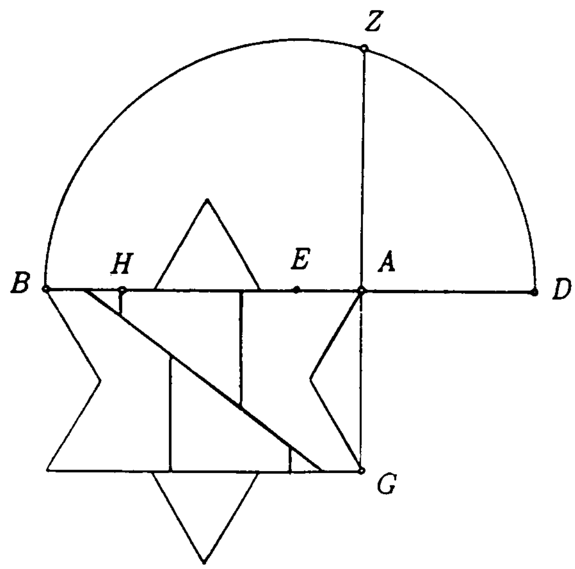
در این ترسیم داریم: $\tan \angle KAB = \sqrt{۳} - ۱$، پس $\angle KAB = ۳۶^\circ, ۱۲', ۰۰$.



شکل ۱

روش ترسیم خطوط برش در نسخهٔ خطی چنین بیان شده است:

"برای این کار روی امتداد AB پاره خط AD را مساوی AG جدا می‌کنیم."



شکل ۲

این متن بسیار فشرده است و جا دارد ذکر کنیم که خطی که ستاره را به دو نیم می‌کند از وسط HB می‌گذرد و همچنین یکی از خطوط عمود بر AB از وسط AH عبور می‌کند. ترسیم مذکور در متن درست است: طبق خاصیت دایره داریم $AZ^2 = AB \cdot AD$. با محاسبه بیشتر نتیجه می‌شود که AZ با ضلع مربع مطلوب برابر است. برای عرضهٔ این تقسیم در کلاس شاید بهتر باشد که با شروع از مربع، آن را به اجزایی تقسیم کنیم و با آنها ستاره بسازیم.

نسخهٔ خطی شامل منسله‌های دیگری از این نوع است:

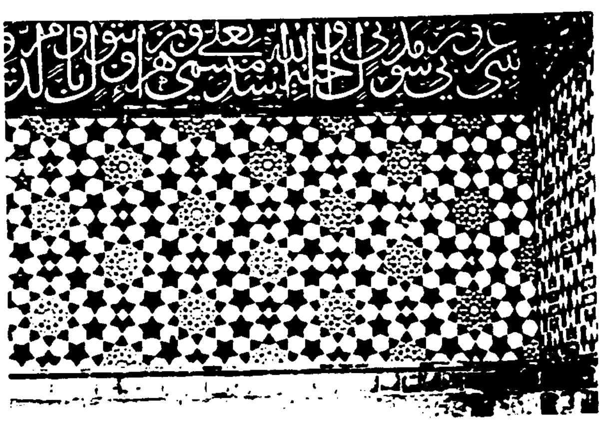
هشت ضلعی $\leftrightarrow$ مربع $\leftrightarrow$ ستارهٔ هشت‌پر،

شش‌ضلعی $\leftrightarrow$ مثلث متساوی‌الاضلاع $\leftrightarrow$ ستارهٔ شش‌پر،

هفت ضلعی $\leftrightarrow$ مستطیل $\leftrightarrow$ مثلث، و نظیر اینها.

پنج ضلعی

نوع دوم مسائل به پنج ضلعی منتظم مربوط می‌شود. بسیاری از کاشیکاریهای ایرانی شامل پنج ضلعیها و ده ضلعیهای منتظم هستند. نسخهٔ خطی حاوی چهار روش ترسیم پنج ضلعی با خط‌کش و پرگار است.



نمونه‌ای از کاشیکاریهای مسجد جامع

ترجمه شد و در بسیاری جاها شناخته شده بود. اما طراحان کاشیکاریها به نوع ریاضیات اقلیدس که شامل اصول موضوع، قضایا و برهانها بود، علاقهٔ چندانی نداشتند. این بدان معنی نیست که ریاضیات آنها ابتدایی بود زیرا برهانهای هوشمندانه‌ای عرضه می‌کردند. ظاهراً معلومات مربوط به کاشیکاری عمدتاً به طور شفاهی از استاد به شاگرد منتقل می‌شد. گفته‌اند که برخی طراحان کاشیکاری عضو فرقه‌های تصوف بودند که اطلاعات خود را به همگان عرضه نمی‌کردند. تنها چند سال پیش، نسخه‌های معدودی مربوط به کاشیکاری دورهٔ اسلامی یافته شد.

در قصر توپکاپی استانبول، طوماری به طول سی متر حاوی نقوش کاشیکاری یافته شد و به صورت چاپ عکسی زیبایی منتشر شد[۱]. در کتابخانهٔ ملی پاریس نیز نسخه‌ای خطی به فارسی (شماره ۱۶۹ گنجینهٔ کهن) یافته شد که ۴۰ صفحه آن حاوی نقوش کاشیکاری با دستورالعملهای مربوط به آنهاست. این رساله به روسی ترجمه شده است[۲]. متن فارسی آن نیز انتشار یافته است[۳]، ولی محتوای ریاضی آن حتی در ایران هنوز بررسی نشده است.

چند معلم ریاضی ایرانی در حال کار در کارگاه تاریخ ریاضیات

در "نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران" که در روزهای ۵ تا ۷ شهریور ۱۳۷۵ در اصفهان برگزار شد، کارگاهی برای معلمان ریاضی بر اساس بخشی از این نسخهٔ کهن عرضه کردم. منظور من جلب توجه معلمان به ریاضیات سنتی ایران و بررسی چند مسئله سادهٔ قابل استفاده در کلاس ریاضی بود. صورت ساده شده‌ای از این کارگاه در پی می‌آید[۴].

نسخهٔ فارسی مذکور شامل سه نوع مسئله است. در اینجا نمونه‌ای از هر نوع را بررسی خواهیم کرد. نسخهٔ خطی شامل طرحها و ترسیمهاست ولی برهانی در آن آورده نشده است. این نوع ریاضیات با ریاضیات اقلیدس و آنچه در اغلب متنهای دورهٔ اسلامی آمده، متفاوت است.

تقسیم شکلها

نخستین دستهٔ مسایل از نوعی است که در پی می‌آید. تقسیم یک شکل به چند جزء و کنار هم چیدن دوبارهٔ اجزاء به طوری که شکل مطلوب دیگری به دست آید. همهٔ اجزاء باید دوباره به کار رود. شکل ۱ نمایش تقسیم یک ستارهٔ شش پر است به طوری که بتوان با کنار هم چیدن اجزاء آن یک مربع ساخت.

تمرین

این کار را با کپی کردن شکل ۱ و بریدن اجزاء و کنار هم چیدن آنها برای ساختن مربع، نشان دهید.

بدنبال شرکت آقای دکتر هوخندایک در نخستین کنفرانس آموزش ریاضی ایران در اصفهان، مقاله‌ای از ایشان در صفحات ۳۸ تا ۴۲ شماره ۱۶ مجله Nieuwe Wiskrat هلند در مورد کارگاه تاریخ ریاضی کنفرانس بچاپ رسید، که در زمان حضور مجدد ایشان در ایران، برای شرکت در نخستین سمینار تاریخ ریاضیات ایران (دانشگاه هرمزگان) و متعاقباً ایراد سخنرانی تحت عنوان "پژوهشهای اخیر پیرامون تاریخ ریاضیات و نجوم در تمدن اسلامی" در دانشگاه صنعتی اصفهان از زبان هلندی به انگلیسی و سپس توسط آقای محمد باقری برای چاپ در مجله فرنود به فارسی برگردانده شد.

لازم به ذکر است که عبارت واقع در مربع وسط چهار ترنج (تصویر روی جلد که از مسجد جامع اصفهان گرفته شده) در ترجمه مزبور: "عمل محمد حسین ابن محمد قوامی" نوشته شده که بر اساس دوری بودن نوشته‌ها و همچنین دوری بودن چهار چهارضلعی دو قائمه معادل اطراف می‌بایست به صورت زیر باشد:

"عمل ابن محمد مؤمن محمد امین"

که این مطلب توسط آقای حسینعلی موحدی شناسایی و در بحث با آقای دکتر هوخندایک مورد تائید قرار گرفته است.

کارگاهی دربارهٔ کاشیکاری ایرانی

یان هوخندایک

دانشگاه اوترخت

مسجدها و بناهای دیگر در جهان اسلام معمولاً با کاشیکاری تزئین می‌شود. طراحان این کاشکاریها باید آشنایی کافی با ریاضیات داشته باشند. یان هوخندایک در ایران برای معلمان ریاضی کارگاهی بر اساس یک نسخهٔ خطی مربوط به نقوش کاشیکاری عرضه کرده است.

مقدمه

در دورهٔ اسلامی مساجد با شکوه پرشماری در نواحی مختلف ساخته شد که اغلب با کاشیکاری تزئین می‌شد. زیباترین نقوش کاشیکاری در ایران یافت می‌شود. کشوری که این روزها آن را چنان که هست نمی‌شناسند و بنابراین چنان که باید به آن مهر نمی‌ورزند. نقوش کاری روی سطوح صاف، گنبدها و سایر سطوح سه‌بعدی پیاده می‌شد. طراحان این کاشیکاریها علاوه بر نقوش هندسی از نقشهای گل و بته و آیات قرآن و اشعار نیز استفاده می‌کردند. در کاشیکاریها رنگهای زیبایی به کار می‌رفت و بخصوص از رنگ آبی که در هوای گرم احساس خنکی القا می‌کند استفاده می‌شد.

طراحان و سازندگان این کاشیکاریها باید آشنایی کافی با ریاضیات داشته باشند. کتاب اصول اقلیدس به عربی

فرنود

ویژه نامه انجمن معلمان ریاضی استان اصفهان