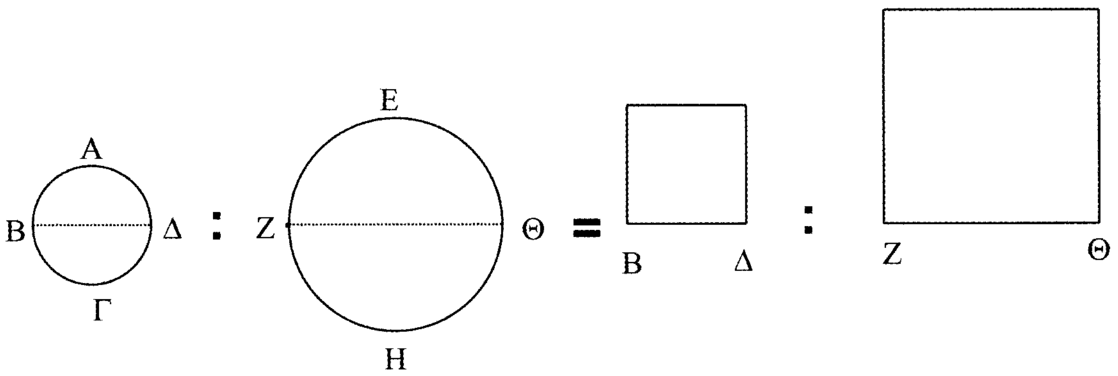
LEES EUCLIDES!

[Jan Hogendijk]



FIGUUR 1

Inleiding

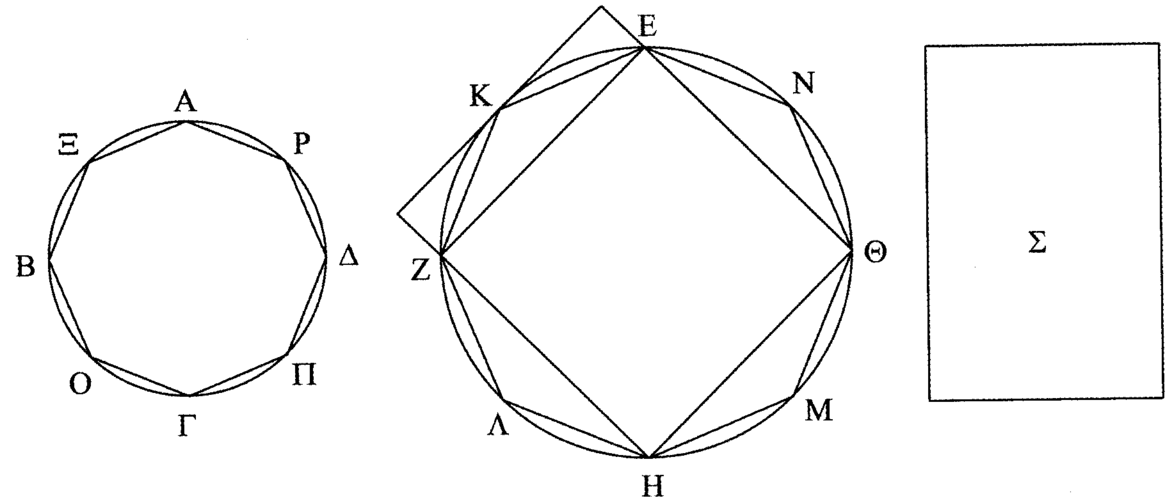
Het tijdschrift *Euclides* is genoemd naar een Griekse wiskundige die omstreeks 300 voor Christus in Alexandrië in het noorden van Egypte verbleef. Zijn hoofdwerk, de *Elementen*, was tot in de negentiende eeuw na Christus een belangrijk leerboek. De *Elementen* behoren, samen met de Torah en de Veda's, tot een selecte groep teksten die meer dan twee millennia lang zijn bestudeerd!
De *Elementen* is geen boek voor beginners of voor de praktijk. Euclides presenteert de wiskunde als een intellectueel bouwwerk van tijdloze en immateriële definities, axioma's, stellingen en bewijzen. Zijn boek is het resultaat van twee eeuwen discussies op hoog niveau over wat wiskunde is en hoe je het moet doen.

We geven hier geen inhoudsoverzicht van de dertien 'boeken' (eigenlijk grote hoofdstukken) van de *Elementen*, en ook geen opsomming van verschillen met de moderne wiskunde. Daarover is al veel geschreven, ook in het Nederlands. In plaats daarvan zullen we het bewijs van één stelling uit de *Elementen* bespreken, te weten stelling 2 van Boek 12. Deze stelling is uitgezocht om een idee te geven van de diepte van de *Elementen* van Euclides. Hieronder geven we een samenvatting en commentaar. Wie wil weten wat Euclides precies gezegd heeft, kan een letterlijke Nederlandse vertaling van de Griekse tekst vinden op [1]. We hopen hiermee de lezer of lezeres nieuwsgierig te maken naar de rest van de *Elementen*!

Stelling 2 van Boek 12

Wanneer Euclides 'cirkel' of 'veelhoek' zegt, bedoelt hij vaak wat wij zouden weergeven als *oppervlakte* van de cirkel, of oppervlakte van de veelhoek. Euclides had niet het moderne begrip van reëel getal. Voor hem *had* een cirkel of veelhoek geen oppervlakte, maar een cirkel of veelhoek *was* een oppervlakte, en dat was geen getal maar een speciaal soort grootheid. Grootheden van dezelfde soort konden bij elkaar worden opgeteld, van elkaar worden afgetrokken, en met elkaar worden vergeleken, maar niet met elkaar worden vermenigvuldigd. In de rest van dit stuk zullen we af en toe dit spraakgebruik van Euclides volgen.
In stelling 2 van Boek 12 bewijst Euclides dat twee cirkels dezelfde verhouding hebben als de vierkanten van hun middellijnen. In moderne notatie betekent dit dat de oppervlakte van een cirkel met middellijn d gelijk is aan cd^2 voor een constante c (modern $c = \frac{\pi}{4}$). Tegenwoordig zou dit resultaat met integraalrekening worden bewezen. We geven het bewijs van Euclides in ietwat gemoderniseerde notatie, maar voor de punten in de figuur gebruiken we precies dezelfde Griekse letters als Euclides. Het doel van dit artikel is immers dat de lezer of lezeres de grondtekst gaat lezen!

Euclides bekijkt twee cirkels $AB\Gamma\Delta$ en $EZH\Theta$ met middellijnen $B\Delta$ en $Z\Theta$. Hij wil bewijzen dat de cirkel met middellijn $B\Delta$ zich verhoudt tot de cirkel met middellijn $Z\Theta$ als het vierkant met zijde $B\Delta$ tot het vierkant met zijde $Z\Theta$ (zie figuur 1).
We beginnen met een kleine toelichting vooraf. Euclides construeert straks (met passer en liniaal) een rij regelmatige n-hoeken in de beide cirkels, met n = 4, 8, ... In stelling 1 van Boek 12 heeft hij al bewezen dat (de oppervlaktes van) die n-hoeken zich verhouden als (de oppervlaktes van) de vierkanten met zijden $B\Delta$ en $Z\Theta$. Het bewijs volgt gemakkelijk uit de stof van de eerdere Boeken, en we zullen het daarom niet bespreken. (Stelling 1 is modern in te zien door de n-hoek in n taartpunten te verdelen vanuit het middelpunt; elke taartpunt heeft oppervlakte d^2 maal $\frac{1}{8}\sin\frac{2\pi}{n}$ waarbij d de middellijn van de cirkel is.) In de vijfde eeuw voor Christus had de wiskundige Antiphon de cirkel ook al benaderd met een rij regelmatige n-hoeken. Hij nam aan dat als n heel groot wordt, de n-hoek op den duur met de cirkel zal samenvallen. Omdat de n-hoeken in de beide cirkels zich als de



FIGUUR 2

vierkanten met zijden $\mathrm{B}\Delta$ en $\mathrm{Z}\Theta$ verhouden, zouden we stelling 2 van Boek 12 nu simpelweg kunnen afleiden door n heel groot te laten worden. In de eeuw na Antiphon begonnen bezwaren te ontstaan tegen dit soort softe redeneringen. Euclides' bewijs is dan ook veel strenger.

Het bewijs van Euclides

We zullen (de oppervlaktes van) $\mathrm{AB}\Gamma\Delta$ en $\mathrm{EZH}\Theta$ noteren als C en C', en (die van) de vierkanten met zijden $\mathrm{B}\Delta$ en $\mathrm{Z}\Theta$ als $\mathrm{B}\Delta^2$ en $\mathrm{Z}\Theta^2$. Euclides wil bewijzen dat $C:C'=\mathrm{B}\Delta^2:\mathrm{Z}\Theta^2$ (zie figuur 2).
Hij stelt eerst dat dit niet waar is. Als niet geldt $\mathrm{B}\Delta^2:\mathrm{Z}\Theta^2=C:C'$; dan moet, zo redeneert Euclides, $\mathrm{B}\Delta^2:\mathrm{Z}\Theta^2=C:\Sigma$ voor een zekere figuur Σ die niet gelijk is aan (niet dezelfde oppervlakte heeft als) C'. Hij tekent Σ als een rechthoek. Nu onderscheidt hij twee gevallen.

Geval 1: stel $C'>\Sigma$.
Dan is het verschil $C'-\Sigma$ een (positieve) oppervlakte (die wij ε zullen noemen).
Euclides wil nu in cirkel $\mathrm{EZH}\Theta$ een n-hoek construeren die groter is dan Σ.
Hij beschrijft eerst met passer en liniaal vierkant $V_4=\mathrm{EZH}\Theta$ in de cirkel, en hij merkt op dat $V_4>\frac{1}{2}C'$ omdat V_4 de helft is van het omgeschreven vierkant, dat zeker groter is dan C. Als $V_4>\Sigma$, is hij klaar. Zo niet, dan construeert hij, door de bogen $\mathrm{EZ},\mathrm{ZH},\ldots$ met passer en liniaal te halveren, de regelmatige achthoek $V_8=\mathrm{EKZ\Lambda HM\Theta N}$.
Hij bekijkt in de achthoek twee zijden met hoekpunt K en tekent de rechthoek gevormd door EZ, de raaklijn in K en de verlengdes van HZ en $\Theta\mathrm{E}$. Nu is driehoek ZKE de helft van de rechthoek, en deze is groter dan het cirkelsegment ZKE. Door dezelfde redenering op N, M, en Λ toe te passen en op te tellen, volgt
$(V_8-V_4)>\frac{1}{2}(C'-V_4)$
We kunnen op dezelfde manier verdergaan en de regelmatige zestienhoek V_{16} construeren. Dan blijkt
$(V_{16}-V_8)>\frac{1}{2}(C'-V_8)$
Algemeen krijgen we $(V_{2n}-V_n)>\frac{1}{2}(C'-V_n)$. Euclides tekent de figuur voor n = 4 maar zijn redenering is algemeen.
We hebben dus een grootheid C', waar we meer dan de helft van afnemen. En van de rest (C' - V_4) halen we ook meer dan de helft af. Van wat daarna overblijft, namelijk (C' - V_8), halen we ook meer dan de helft af, en zo gaan we steeds door. Met behulp van Stelling 1 van Boek 10 leidt Euclides af dat we uiteindelijk een restje overhouden dat kleiner is dan ε. Zijn redenering is als volgt.
Omdat C' en ε grootheden van dezelfde soort zijn (namelijk oppervlakten), neemt Euclides aan dat er een veelvoud $p\varepsilon$ bestaat met $p\varepsilon>C'$. Dit veelvoud krijgen we door ε een bepaald aantal (p - 1) maal bij zichzelf op te tellen. Stel dat we meer dan de helft van C' afhalen, en van de rest weer meer dan de helft, en dit totaal p keer doen, en daarna een laatste restje overhouden. Dan hebben we C' in p delen verdeeld, en van deze delen is het laatste restje het kleinste, en daarom zeker kleiner dan het p-de deel van C'. Dit restje is dan ook kleiner dan ε.
Nu terug naar Boek 12. Er is dus een veelhoek V_n met n een macht van 2, zodat $C'-V_n<\varepsilon$. Dan is $V_n>\Sigma$ (*).
In de cirkel met diameter $\mathrm{B}\Delta$ construeert Euclides nu (met passer en liniaal) een regelmatige n-hoek W_n met n zijden; uiteraard geldt W_n < C.
Uit stelling 1 van Boek 12 volgt: $\mathrm{B}\Delta^2:\mathrm{Z}\Theta^2=W_n:V_n$.
Maar we hadden aangenomen $\mathrm{B}\Delta^2:\mathrm{Z}\Theta^2=C:\Sigma$.
Dus $C:\Sigma=W_n:V_n$. Omdat $C>W_n$ volgt nu $\Sigma>V_n$.
Tegenspraak met (*). De aanname van geval 1 kan dus niet waar zijn.

Geval 2: stel nu dat $\Sigma>C'$.
Dan moet $\mathrm{Z}\Theta^2:\mathrm{B}\Delta^2=\Sigma:C=C':\Sigma'$ voor een figuur $\Sigma'<C$, en we zijn terug bij geval 1. Dus ook de aanname van geval 2 kan niet waar zijn. De enig

mogelijke conclusie is dus $\mathrm{B}\Delta^2 : \mathrm{Z}\Theta^2 = C : C'$, q.e.d. Merk op dat het begrip oneindig in het bewijs niet voorkomt!

En verder?

In de tweede helft van de negentiende eeuw werd de draad van Euclides en de andere oude Grieken weer opgepakt, en ontstond het moderne limietbegrip. $\lim_{n\to\infty} V_n = C'$ betekent modern: voor elke $\varepsilon > 0$ is er een N in de natuurlijke getallen zodat voor $n > N$ geldt $|C' - V_n| < \varepsilon$. Het verband met Euclides is duidelijk; een verschil is dat de 'grootheden' van Euclides vervangen zijn door reële getallen.

In de rest van Boek 12 behandelt Euclides op soortgelijke manier de (inhouden van de) piramide en de kegel, en hij bewijst dat bollen dezelfde verhouding hebben als de kubussen van de middellijnen. Vooral voor de bollen moet hij harder werken dan in het relatief eenvoudige bewijs dat wij gezien hebben. Wie dit in de grondtekst naleest, krijgt ontzag voor de Griekse wiskundigen! Een halve eeuw na Euclides drukte Archimedes de oppervlakte van de cirkel en de oppervlakte en inhoud van de bol uit met behulp van de omtrek van de cirkel, en hij bewees dat de verhouding tussen omtrek en middellijn van de cirkel, die wij met π weergeven, tussen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{1}{7}$ ligt.

Euclides en de kunst van het bewijzen

De Romeinen hadden geen belangstelling voor de bewijzen van Euclides en Archimedes. In de negende eeuw na Christus werd de *Elementen* uit het Grieks in het Arabisch vertaald, en pas in de twaalfde eeuw uit het Arabisch in het Latijn. Euclides heeft wiskundigen in drie culturen, de Griekse, de Islamitische en de middeleeuws Europese, onderwezen in de kunst van het bewijzen. Zijn werk heeft in West-Europa de ontwikkeling van de wiskunde bepaald. Ook de wiskundigen die in het Arabisch schreven, hadden groot ontzag voor Euclides, en verbasterden zijn naam soms tot *iqlîd*, 'sleutel'.

Noot

[1] www.math.uu.nl/people/hogend/gw/Elementen12-2.pdf

Literatuur

- Griekse grondtekst: Euclidis Elementa, ed. et Latine interpretatus est I.L. Heiberg, Leipzig: Teubner, 1883-1888. 5 delen. (Herdrukt in 1967 door E.S. Stamatis.)

- Engelse vertaling: T.L. Heath, Euclid: The Thirteen Books of the Elements, Cambridge: University Press, 1921; vele malen herdrukt als Dover reprint. Op het internet te vinden met Java applets in http://aleph0.clarku.edu/djoyce/java/elements/elements.html

- Nederlandse bespreking: E.J. Dijksterhuis, De Elementen van Euclides, Groningen: Noordhoff, 1930-1932, 2 delen.

Nederlandstalige websites over Euclides

(ook interessant voor leerlingen)

- www.math.rug.nl/didactiek/Euclides/Euclides.htm (Jan van Maanen);

- www.pandd.demon.nl/elementen.htm (Dick Klingens);

- www.nvvw.nl/tn_euclides.htm ('Terug naar Euclides', artikel van Dirk van Delft in de NRC).

Over de auteur

Jan Hogendijk werkt als hoogleraar geschiedenis van de wiskunde in Utrecht, Leiden en Dhahran (Saoedi-Arabië). Hij reist ook regelmatig naar Iran.

E-mailadres: hogend@math.uu.nl

URL: www.math.uu.nl/people/hogend