بسم الله الرحمن الرحیم

رشد آموزش ریاضی

شماره مسلسل ۵۲ / سال تحصیلی ۷۸ - ۱۳۷۷ / تابستان ۱۳۷۷

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه ریزی آموزشی

دفتر انتشارات کمک آموزشی

مدیر مسئول: سید محسن گلدانساز
سردبیر: زهرا گویا
مدیر داخلی: سهیلا غلام آزاد
اعضای هیئت تحریریه: اسماعیل بابلیان، عین ا... پاشا، میرزا جلیلی، جواد حاجی بابایی، بیژن ظهوری زنگنه، سهیلا غلام آزاد و علیرضا مدقالچی
طراح گرافیک: فریبرز سیامک‌نژاد

نشانی دفتر مجله: تهران، صندوق پستی ۶۵۸۸ - ۱۵۸۷۵
تلفن امور مشترکین: ۹- ۸۸۳۱۱۶۰ (داخلی ۴۳۲)
تلفن دفتر مجله: ۸۳۵۲۷۹

چاپ: شرکت افست (سهامی خاص)

دفتر انتشارات کمک‌آموزشی، مجلات زیر را منتشر می کند:

رشد کودک، برای پیش‌دبستان و دانش‌آموزان کلاس اول دبستان
رشد نوآموز، برای دانش‌آموزان دوم و سوم دبستان
رشد دانش‌آموز، برای دانش‌آموزان چهارم و پنجم دبستان
رشد نوجوان، برای دانش‌آموزان دورهٔ راهنمایی
رشد جوان، برای دانش‌آموزان دورهٔ متوسطه
مجلات رشد: معلم، تکنولوژی آموزشی، آموزش ابتدایی، آموزش ریاضی، آموزش فیزیک، آموزش شیمی، آموزش زبان وادب فارسی، آموزش زبان، آموزش راهنمایی تحصیلی، آموزش زیست شناسی، آموزش جغرافیا، آموزش معارف اسلامی،
برای معلمان، دانشجویان تربیت معلم، مدیران مدارس و کارشناسان آموزش و پرورش

- مجله رشد آموزش ریاضی، نوشته‌ها و حاصل تحقیقات پژوهشگران و متخصصان تعلیم و تربیت، بویژه معلمان مقاطع مختلف را، در صورتی که در نشریات عمومی درج نشده و مرتبط با موضوع مجله باشد، می‌پذیرد.
- مطالب باید یک خط در میان و در یک روی کاغذ نوشته و در صورت امکان تایپ شود.
- شکل قرار گرفتن جدولها، نمودارها و تصاویر، پیوست باید در حاشیهٔ مطلب نیز مشخص شود.
- نثر مقاله باید روان و از نظر دستور زبان فارسی درست باشد و در انتخاب واژه‌های علمی و فنی دقت شود.
- اصل مقاله‌های ترجمه شده باید به پیوست، ارسال شود.
- در متنهای ارسالی باید تا حد امکان از معادلهای فارسی واژه‌ها و اصطلاحات استفاده شود.
- زیرنویسها و منابع باید کامل و شامل نام اثر، نام نویسنده، نام مترجم، محل نشر، ناشر، سال انتشار و شمارهٔ صفحهٔ مورد استفاده باشد.
- مجله در رد، قبول، ویرایش یا تلخیص مقاله‌های رسیده مختار است.
- آرای مندرج در مقاله‌ها، ضرورتاً مبین نظر دفتر انتشارات کمک آموزشی نیست و مسؤولیت پاسخگویی به پرسشهای خوانندگان، با خود نویسنده یا مترجم است.
- مقاله‌های دریافتی در هر صورت (رد یا قبول) بازگشت داده نمی‌شود.

of anonymous text): (P. P. Matvievskaya. The Theory of Quadratic Irrationals in Medieval Oriental mathematics, in: D. A King, G. Saliba, ed., From Deferent to Equant: A Volume of studies in the History of science in the Ancient and Medieval Near East in Honor of E. S. Kennedy, New York Academy of Sciences, 1987, pp. 253-277, see esp. pp. 258-260, 271.

۱۷ـ مثلاً نگاه کنید به:

T. L. Heath. A history of Greek mathematics. Oxford: Clarendon Press, 1921, Vol. 2, pp. 43-50.

اما اشارهٔ هیت به معادلهٔ درجهٔ سوم در آثار ارشمیدس نابجاست زیرا ارشمیدس این معادلات را به کار نمی برد.

۱۸ـ نگاه کنید به جبر خیام در:

F. Woepcke. L'Algebre d'Omar Alkhayyami, Paris 1851, Arabic text p.2, translation p. 2;

ویکه در صفحات ۹۶ـ۱۰۳ از منبع مجهول المؤلف دیگری نام می برد. برای اشاره ای به ماهانی که در رسالهٔ کوچکی از عمر خیام آمده نگاه کنید به: غلامحسین مصاحب، حکیم عمرخیام به عنوان عالم جبر، تهران، ۱۳۳۹، ص ۶۷، صفحات ۷ و ۱۵۹ این اثر را هم ببینید.

۱۹ـ احتمال دارد که ابوجعفر خازن راه حل خود را با ترکیب بازنویسی جبری ماهانی از مسأله و راه حل با مقاطع مخروطی در شرح اثوتوکیوس بر رسالهٔ «در باب کره و استوانهٔ ارشمیدس»، یافته باشد.

۲۰ـ مشخصات ترجمهٔ انگلیسی این اثر چنین است:

Girolamo Cardano, Ars Magna or the rules of algebra, translated and edited by T. Richard Witmer, New York: Dover 1993, reprint of the 1968 edition.

در مورد حل معادلهٔ درجهٔ سوم در قرن شانزدهم میلادی، نگاه کنید به:

B. L. vander waerden. A history of algebra from al-khwarizmt to Emmy Noether, New York: Springer, 1985, pp. 52-62.

۲۱ـ معادلهٔ $x^3 + c = ax^2$ را در نظر می گیریم که در آن a و c مثبتند و داریم $\Delta = C - \frac{4a^3}{27}$. این معادله ریشه های حقیقی دارد اگر و تنها اگر $\Delta \geq 0$. اگر $\Delta = 0$، معادله یک ریشهٔ مضاعف $x = \frac{2}{3}a$ دارد (و یک ریشهٔ منفرد $x = -\frac{a}{3}$). اگر $\Delta > 0$، ریشه های معادله عبارتند از:

$$x = \frac{a}{3} + w^{i}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{c}}{2}\sqrt{\Delta} + Q} - w^{3-i}\sqrt[3]{\frac{\sqrt{c}}{2}\sqrt{\Delta} - Q}$$

که در آن $Q = \frac{1}{27}a^3 - \frac{c}{2}$ و $w = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}$ که یک ریشهٔ سوم واحد است. ریشهٔ منفی به ازای $i = 0$ و دو ریشهٔ مثبت که مورد علاقهٔ ماهانی بود به ازای $i = 1,2$ به دست می آید.

۲۲ـ این ترجمه در پایان نامهٔ او به سال ۱۹۴۱ آمده است که در سال ۱۹۹۸ به وسیلهٔ «مؤسسهٔ تاریخ علوم عربی و اسلامی» در فرانکفورت منتشر خواهد شد. برای خلاصه ای از حل آن نگاه کنید به:

P. Luckey. Beitrage zur Erforschung der islamischen Mathematik I, Orientalia 17 (1948), pp. 500-502.

۲۳ـ میل خورشید را می توان از جدول پیدا کرد، یا بر اساس طول دایرةالبروجی خورشید (λ) با فرمول $\delta = \sin\lambda \sin\varepsilon$ محاسبه کرد که آن، ε میل دایرةالبروج است. منجمان مأمون در قرن سوم هجری نشان دادند که $\varepsilon \approx 23^\circ 35'$. مقدار λ را به راحتی می توان از تاریخ روز در سال شمسی تخمین زد؛ در آغاز بهار $\lambda = 0$ و λ تقریباً یکنواخت افزایش می یابد.

۲۴ـ برای مروری بر ریاضیات و نجوم هند نگاه کنید به:

D. Pingree. History of Mathematics and astronomy in India, in C. G. Gillipsie (ed.), Dictionary of Scientific Biography, vol. 15. New York: Scribners Sons. 1978. pp. 533-633.

۲۵ـ الفهرست ابن ندیم، ترجمهٔ رضا تجدد، تهران، ۱۳۴۶، ص ۴۸۹؛ تاریخ الحکماء ابن قفطی، ترجمهٔ کهن فارسی، به کوشش بهین دارائی، تهران، چاپ دوم، ۱۳۷۱، ص ۳۸۸.

۲۶ـ نگاه کنید به:

C. Caussin, Le liere la grande table hakemite, Notices et extraits: (Paris, Bibliotheque National) 7 (1804), pp. 16-240: pp. 83-97 is an extract from this work of al-Mahani.

۲۷ـ نسخهٔ استانبول، جارالله (در کتابخانهٔ سلیمانیه) شمارهٔ ۱۵۰۲، برگ ۲۶ پ، سطر ۷. این رسالهٔ مجهول المؤلف به دنبال رسالهٔ ماهانی دربارهٔ نسبتها آمده است.

۲۸ـ۱. س. سعیدان، رسالهٔ ابن سنان، کویت، ۱۴۰۳ قمری، ص ۲۹، ۵۷.

۲۹ـ برای اطلاع از مراجع نگاه کنید به:

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums. vol. 5, pp. 269 no. 10, pp. 293-4 no. 1

در مورد ابراهیم بن سنان نیز نگاه کنید به اثر فوق الذکر از سعیدان.

۳۰ـ دربارهٔ هروی نگاه کنید به:

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums vol. 5, p. 329.

برای اشارت بیشتر هروی به ماهانی و اطلاعات بیشتر دربارهٔ بازنویسی ماهانی از اکر بنلائوس نگاه کنید به:

M. Krause, Die spharik can Menelaus in der verbesserung van Abu Nase Jraq, Berlin 1936, pp. 24-32.

۳۱ـ این قضیه می گوید اگر A, B, C, D چهار نقطه بر دایرهٔ عظیمه ای از کره باشند، p نقطه ای غیر واقع بر این دایرهٔ عظمیه باشد و دایره های عظمیهٔ PA، PB، PC و PD دایرهٔ عظیمه دیگری را در نقاط A´, B´, C´, D´ قطع کنند، آن گاه

$$\frac{\sin AB \cdot \sin CD}{\sin AC \cdot \sin BD} = \frac{\sin A'B' \cdot \sin C'D'}{\sin A'C' \cdot \sin B'D'}$$

۳۲ـ نگاه کنید به:

Krause. pp. 65-66.

زیرنویسها :

۱ـ دربارهٔ این موضوع نگاه کنید به :

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. 6. Astronomy, p. 13.

۲ـ برای این موارد نگاه کنید به :

D. Pingree, The Thousands of Abū Ma'shar. London: The Warburg Institute, 1968

E. S. Kennedy, D. Pingree. The Astrological History of Māshāllāh. Cambridge: Harvard University Press, 1971

J. J. Buckhardt. B. L. van der Waerden. The Astronomical System of the Persian Tables I, Centaurus, 13 (1968), pp. 1-28

B. L. van der Waerden, The Astronomical System of the Persian Tables II, Centaurus, 30 (1987). pp. 197-211.

۳ـ دربارهٔ ماهانی نگاه کنید به :

F. Sezgin. Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. 5, Leiden 1974, pp. 260-262, vol. 6, Leiden 1978, pp. 155-156

و کتاب فارسی زیر :

ابوالقاسم قربانی، زندگینامهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی، مرکز نشر دانشگاهی، تهران ۱۳۶۵، ص ۴۳۱ ـ ۴۳۵ (شمارهٔ ۱۳۶).

۴ـ مواضع خورشید، ماه و سیارات را می توان به روش ریاضی بر اساس نظریهٔ زمینمرکزی پیش گویی کرد، هر چند که این نظریه از دیدگاه فیزیک امروز نادرست است.

۵ـ برای اطلاع از آثار ثابت بن قره نگاه کنید به :

F. Sezgin, Geschichte des arabischen Schrifttums, vol. 5, Leiden 1974, pp. 264-273, vol. 6, Leiden 1978. pp. 163-170

آثار ریاضی ثابت بن قره به روسی نیز ترجمه شده است :

B. Bosenfeld. Sabit ibn Korra. Matematicheskie Traktaty, Moscow: Nauka, 1984.

آثار نجومی او ویراسته و به فرانسه ترجمه شده است :

Thabit ibn Qurra. Oeuvres d'Astronomie, etabli et traduit Par Regis Morelon, Paris, Les Belles Lettres. 1987.

۶ـ ترجمهٔ انگلیسی اصول را می توان در کتاب زیر یافت :

T. L. Heath. Euclid's Elements. second edition. New York: Dover reprint, 1956, 3 vols.

۷ـ شاید این اشاره را در تحریرِ خود از اصول آورده باشد.

۸ـ در اینجا از اصطلاحات امروزی ریاضی استفاده می کنیم. در ترجمه های عربی اصول، اصطلاحهای «متباین» و «غیرمشترک» به کار رفته است.

۹ـ ارسطو در طوبیقا اشاره ای دارد مبنی بر این که مقادیر نسبت یکسانی دارند اگر antanairesis یکسانی داشته باشند. اسکندر آفرودیسی مفسّر توضیح می دهد که این همان anthyphairesis است. نگاه کنید به :

T. L. Heath. Mathematics in Aristotle. pp. 80-83.

در منبع زیر نیز بحث جالبی پیرامون نوشتارهای امروزی دربارهٔ موضوع خواهید یافت :

B. Vitrac. Euclide. Les Elements. volume 2; Livres Va Ix, Paris: Presses Universitaires de France, 1994, pp. 515.523.

۱۰ـ مثلاً نگاه کنید به

B. L. vander Waerden. Geometry and Algebra in Ancient Civilizations. New York: Springer, 1983, pp. 113-120.

۱۱ـ

A. P. Juschkewitsch. Mathematik im Mittelalter. Leipzig 1964. pp. 250-251, or the French translation: A. P. Youschkevithch. Les mathematiques arabe. Paris: Vrin. 1976. pp. 83-84.

۱۲ـ نگاه کنید به :

E. B. Plooij, Euclid's conception of ratio and his definition of proportional magnitudes as criticized by Arabian commentators. Rotterdam 1950. pp. 50-51.

نسخه ای از این اثر در کتابخانهٔ آیت الله مرعشی نجفی در قم موجود است.

۱۳ـ این حالتها را با عددهای حقیقی به آسانی می توان بیان کرد. اگر در گام ۱، $r_2 < r_1$ و $s_2 < s_1$، داریم $\frac{r_1}{r_2} > 1$ و $\frac{s_1}{s_2} > 1$ سپس n_2 بزرگترین عدد صحیحی است که $\frac{r_1}{r_2} > n_2$ و $\frac{s_1}{s_2} > n_2$ داریم $\frac{r_3}{r_2} = \frac{r_1}{r_2} - n_2$ و $\frac{s_3}{s_2} = \frac{s_1}{s_2} - n_2$. در حالت ۲، $\frac{s_3}{s_2} \le 1$ و $\frac{r_3}{r_2} > 1$، بنابراین $\frac{r_1}{r_2} = \frac{r_3}{r_2} + n_2 > \frac{s_3}{s_2} + n_2 = \frac{s_1}{s_2}$، الی آخر.

۱۴ـ

A. P. Juschkewitsch, Mathematik im Mittelater. leipzig 1964, pp. 251-252, or the French translation: A. P. Youschkevitch. Les mathematiques arabes. Paris: Vrin, 1976, pp. 84-86.

۱۵ـ عادل انبوبا در مقاله ای به نشانی زیر، این متن را از خود ماهانی دانسته است :
-Algebro Arabe all IX- et X- siecle. apercu general, in Journal for the History of Arabic Science 2 (1978), pp. 63-100. especially pp. 79. 96.

۱۶ـ نگاه کنید به :

G. P. Matvievskaya, Desyataya Kniga "Nachal" Evklida v srednenevovykh Arabskikh kommentariyakh, in: S. Kh. Sirazdinov (ed.), Matematika astronomiya v trudakh unhenykh srednevekogo voctoka, Tashkent: Fan, 1977, pp. 9-14; G. P. Matvievskaya. Nekotorye Arabskie kommentarii k decyatoi knige "Nachal: Evklida, in S. Kh. Sirazdinov (ed.), Matematika na Srednevekovom Vostoke. Tashkent, 1978, pp. 3-87 (translation

اگر میل خورشید صفر نباشد [۲۳]، ماهانی ξ را از رابطهٔ زیر محاسبه می کند.

$$\mathrm{Sin}\xi = \left(\frac{\mathrm{Sin}\delta \cdot \mathrm{Sin}x}{\mathrm{Cos}x}\right)\frac{R}{\mathrm{Cos}\delta}$$

پس $90 - t \pm \xi$ زمان باقی مانده تا ظهر است. در اینجا، علامت مثبت برای میل جنوبی و علامت منفی برای میل شمالی به کار می رود.

این محاسبات از لحاظ ریاضی درست است و فرمولهای حاصل شده با فرمولهای «قضیهٔ کتانژانت» برای مثالهای کروی نامشخص معادلند. اما نتوانسته ام نحوهٔ یافتن این فرمولها را توسط ماهانی و منطق حاکم بر ترسیمهای هندسی او را بازسازی کنم. بر من روشن نیست که آیا او از ریاضیدانان یونانی یا هندی تأثیر پذیرفته بود یا خیر. منجّمان هندی پیش از ظهور اسلام به این نوع مسأله ها علاقه مند بودند، اما راه حل ماهانی را در هیچ یک از آثار آنها نیافته ام. در عین حال، بسیاری از آثار ریاضی و نجومی هندی متعلق به آن دوره هنوز منتشر نشده اند یا به آسانی قابل دسترسی نیستند[۲۴]. مطالب بسیاری در تاریخچهٔ مثلثات آغاز دورهٔ اسلامی نامعلوم است، اما این متن از ماهانی بی شک سند جالبی است زیرا حاوی راه حلهای درست برای مسأله های بسیار دشوار مثلثاتی است.

این رسالهٔ مربوط به مسأله های مثلثاتی، ناقص است. افتادگی هایی دارد و عنوانش مربوط است به مسأله ای (یافتن سمت خورشید در زمان مفروض) که در متن موجود هیچ به آن پرداخته نشده است.

آثار گمشدهٔ ماهانی

یک اثر گمشدهٔ ماهانی را قبلاً ذکر کرده ایم: شرح او بر رسالهٔ «در باب کره و استوانه» ارشمیدس، فهرستی از باقی آثار گمشدهٔ ماهانی که به وسیلهٔ سایر ریاضیدانان یا در آثار زندگینامه ای ذکر شده است، در پی می آید. این آثار در ویرایش آثار ماهانی به تفصیل بیشتر مورد بحث قرار خواهند گرفت.

● رساله ای دربارهٔ عرض سیارات **در الفهرست ابن ندیم** (قرن چهارم هجری) ذکر شده است[۲۵].

● احتمالاً ماهانی رساله ای در تصحیح **زیج ممتحن** نوشته است. ابن یونس بخشهایی از این اثر را حاوی رصدهای ماهانی و تحلیلهای ماهانی از برخی خطاهای زیج ممتحن، نقل کرده است[۲۶].

● در یک رساله به نام **رساله در اثبات اصل موضوع اقلیدس** که مؤلف آن معلوم نیست آمده است که: «کندی، ثابت بن قره، بنوموسی و ماهانی» روی این اصل موضوع کار کرده اند[۲۷].

● دو زندگینامه نویس، ابن ندیم و ابن قفطی، رساله ای از ماهانی را دربارهٔ ۲۶ قضیه از مقالهٔ اول اصول اقلیدس ذکر کرده اند که آنها را می توان به طور مستقیم ثابت کرد. شاید این رساله به اثر او دربارهٔ اصل توازی مربوط باشد.

ابراهیم بن سنان، نوهٔ ثابت بن قره می گوید که ماهانی رساله ای دربارهٔ تربیع سهمی، یعنی ترسیم مثلثی (یا مربعی) هم مساحت با قطعهٔ مفروضی از سهمی نوشته بود[۲۸]. به نوشتهٔ ابراهیم بن سنان، راه حل ماهانی آسان تر از راه حل ثابت بن قره بود. ارشمیدس در مقدمهٔ رسالهٔ در باب کره و استوانه (که ثابت بن قره ترجمهٔ عربی آن را اصلاح کرد) می گوید که این مسأله را حل کرده است. راه حل ارشمیدس به یونانی موجود است ولی این راه حل به عربی برگردانده نشد. پس ثابت بن قره و ماهانی می دانستند که ارشمیدس این مسأله را حل کرده بود ولی جزئیات آن را نمی دانستند و می توان حدس زد که آنها می کوشیدند که خود راه حلی برای این مسأله بیابند. راه حل دشوار ثابت بن قره موجود است[۲۹]، ولی راه حل آسانتر ماهانی مفقود شده است.

● به نوشتهٔ هروی هندسه دان که در قرن چهارم هجری می زیست[۳۰]، ماهانی رسالهٔ اکر منلائوس (حدود ۱۰۰ سال پیش از میلاد) را که اثری یونانی در هندسهٔ کره بود بازنویسی کرد. ماهانی برای این منظور از ترجمهٔ ضعیفی از اکر که از ترجمه ای سریانی فراهم شده بود استفاده کرد. وی دو مقالهٔ اول اکر و آغاز مقالهٔ سوم آن را بازنویسی کرد. اما منلائوس در قضیهٔ ۵ مقالهٔ سوم قضیهٔ دشواری در هندسهٔ کروی را بدون توضیح پذیرفته است[۳۱]. ماهانی نتوانست متن منلائوس را که شاید به طور نامفهومی ترجمه شده بود به صورت معنی داری در آورد. بنابراین، بازنویسی او در همین جا متوقف شد. بعدها اکر مستقیماً از یونانی ترجمه شد و در قرن چهارم هجری ابونصر عراق هندسه دان توانست فرض منلائوس را ثابت کند[۳۲].

این بررسی کارهای گمشده و موجود، روشن می کند که ماهانی روی دشوارترین مسائل ریاضی عصر خود کار کرد. او یکی از بهترین ریاضیدانان نظری زمان خود و در عین حال رصد کنندهٔ نجومی بسیار ماهری بود.

از کار ماهانی چه چیز دیگری می توان دربارهٔ تاریخ ریاضیات در فرهنگ دورهٔ اسلامی آموخت؟ برای من شگفت انگیزتر از همه این است که ماهانی همهٔ این کارهای دشوار را در مرحلهٔ آغازین سنت علمی دورهٔ اسلامی انجام داد. آن هم تنها چند سال بعد یا حتی شاید قبل از آنکه از ریاضیات یونان، آثار ارشمیدس و آپولونیوس به عربی ترجمه شود. این سطح بالای کار، نیازمند توضیحی است. برخی تاریخ نگاران علم، قرنِ سوم هجری را به عنوان قرن ترجمه و تقلید از ریاضیات یونانی و هندی محسوب می دارند. اما فواد سزگین بر آن است که ریاضیدانان و منجمان مسلمان در قرن سوم هجری توانایی کامل کار خلّاق را داشتند، زیرا پذیرش علوم هندی و شاید مقداری از علوم یونانی بین منجمان ایرانی قبل از دو قرن اولیهٔ اسلام و طی این دو قرن، زمینه را مساعده کرده بود. این نکته می تواند به توضیح علت ظهور ریاضیدانانی نظیر ماهانی در قرن سوم هجری کمک کند.

راه حلهای دیگر یونانیان به شرحی از ائوتوکیوس[17] که به وسیلهٔ اسحاق بن حنین (۲۱۵ـ۲۹۸ هجری) به عربی ترجمه شد راه یافته است.

به نوشتهٔ عمر خیام[18]، ماهانی گفته است که مسألهٔ ترسیم x می تواند به معادله ای جبری به صورت «مکعب و عدد برابر است با چند مجذور» تحویل شود، در واقع با اختیار کردن AB=a، AX=x و RS=c، خواهیم داشت $x^2(a-x)=c$، پس $x^3+c=ax^2$. این کهن ترین معادلهٔ درجهٔ سومی است که در ریاضیات دورهٔ اسلامی سراغ داریم. به نوشتهٔ عمر خیام و دیگران، ماهانی پس از مدتها تأمل نتوانست این معادله را حل کند. عمر خیام می گوید که ماهانی نتوانست جواب این معادله را به کمک مقاطع مخروطی بیابد، ولی به نظر من ماهانی علاقه ای به حل آن با مقاطع مخروطی نداشت؛ زیرا اگر واقعاً می خواست برای مسألهٔ ارشمیدس جوابی به کمک مقاطع مخروطی بیابد، ممکن بود کسی به او تذکر دهد که چنین راه حلی در شرح ائوتوکیوس نقل شده است. عمر خیام می گوید که ابوجعفر خازن که در قرن چهارم هجری می زیست، نخستین کسی بود که این معادله را به کمک مقاطع مخروطی حل کرد[19]. هندسه دانان بعدی (از جمله خود عمر خیام) نظریه ای کلی برای حل معادله های درجهٔ سوم با مقاطع مخروطی پدید آوردند. بدون کار ماهانی، پیوند میان جبر و مقاطع مخروطی به این زودی مورد توجه واقع نمی شد. بنابراین، کار ماهانی نقطهٔ آغاز پیدایش حوزهٔ کاملی در ریاضیات بود.

حوالی سال ۱۵۰۰ میلادی، راه حل جبری معادلهٔ درجهٔ سوم $x^3+pr=q$ (که در آن r، p و q مثبت هستند) به وسیلهٔ شیپیونه دلفرو ریاضیدان ایتالیایی یافته شد. اندکی بعد از این کشف، انواع دیگر معادله های درجهٔ سوم نیز حل شد و راه حل همهٔ انواع آن در سال ۱۵۴۵ در کتاب کاردانو به نام **فن کبیر**[20] انتشار یافت. معادلهٔ $x^3+pr=q$ که در آن p و q مثبتند یک جواب حقیقی به صورت زیر دارد:

$$x=\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\left(\frac{q}{2}\right)^2}+\frac{q}{2}}-\sqrt[3]{\sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3+\frac{q^2}{2}}-\frac{q}{2}}$$

شرح ماهانی بر مقالهٔ دهم اصول نشان می دهد که او به مجموعها و تفاضلهای ترکیبهای جذر و کعب علاقه مند بود. پس این سؤال مطرح می شود که چرا او راه حل جبری معادلهٔ درجهٔ سوم را نیافت.

به این سؤال می توان چنین پاسخ داد: در مورد معادلهٔ $x^3+c=ax^2$ که در آن a و c مثبتند، فرمول جبری، ریشه های حقیقی را به صورت مجموع دو ریشهٔ مختلط می دهد[21]. عددهای مختلط در ریاضیات دورهٔ اسلامی کاملاً ناشناخته بودند و گرچه در قرن شانزدهم در ایتالیا پدید آمدند، با این حال، تا قرن نوزدهم درک نشدند. راه حل جبری بر حسب ریشه های مختلط نمی توانست برای ماهانی مفهومی داشته باشد و برای محاسبهٔ عددی ریشه های x و ترسیم هندسی آنها به کاری نمی آمد. پس این مسأله برای ماهانی حل نشدنی بود.

جای تأسف است که $x^3+c=ax^2$ نخستین معادلهٔ درجهٔ سوم سه جمله ای بود که به وسیلهٔ ریاضیدانان دورهٔ اسلامی مطالعه شد. اگر ارشمیدس مسألهٔ حل نشدهٔ دیگری از خود بر جای می گذاشت که به $x^3+px=q$ که در آن p و q مثبتند قابل تحویل بود، شاید ماهانی می توانست راه حل جبری برای آن بیابد و در این صورت، تاریخچهٔ جبر دورهٔ اسلامی چهرهٔ دیگری می یافت.

رسالهٔ ماهانی در مثلثات

ماهانی رسالهٔ کوتاهی دربارهٔ مثلثات کاربردی نوشته که بخشی از آن در یک نسخهٔ خطی در استانبول به جا مانده است و یکی از مسائل آن را پاول لوکی[22] به آلمانی ترجمه کرده است، ولی بقیهٔ مسائل آن هنوز منتشر نشده است. یکی از این مسائل منتشر نشده را در اینجا به عنوان مثال می آورم.

مفروضات: (۱) میل خورشید، یعنی کمانی بر کرهٔ آسمان بین خورشید و استوانه ای آسمانی؛ (۲) سمت خورشید، یعنی زاویهٔ بین تصویر قائم آن بر افق و نقطهٔ مشرق؛ و (۳) عرض جغرافیایی محل مطلوب: یافتن اینکه چه ساعتی از روز است.

متن مذکور حاوی یک ترسیم هندسی و یک محاسبه است. برای رعایت اختصار، تنها خلاصهٔ محاسبه را به بیان امروزی می آورم. فرض می کنیم که خورشید در شرق نصف النهار است، یعنی محاسبه برای صبح انجام می شود. ابتدا محاسبه را برای حالتی که میل خورشید صفر باشد، یعنی برای آغاز بهار یا آغاز پائیز انجام می دهیم.

فرض کنید α سمت خورشید و $\varnothing$ عرض جغرافیایی محل باشد. منظور از Sin و Cos (با حروف اول بزرگ) سینوس و کسینوس تعریف شده در دایره ای به شعاع R است. ماهانی R را برابر با ۶۰ می گیرد. داریم $\mathrm{Sin}x=R\cdot\sin x$ و $\mathrm{Cos}x=R\cdot\cos x$ که در آن Sin و Cos نشانهٔ تابعهای سینوس و کسینوس به معنی امروزی آن است. ماهانی ابتدا x را از فرمول زیر به دست می آورد:

$$\mathrm{Sin}x=\mathrm{Cos}\alpha\cdot\frac{\mathrm{Cos}\varnothing}{R}$$

سپس t را از فرمول زیر پیدا می کند:

$$\mathrm{Sin}t=R\cdot\frac{\mathrm{Sin}\alpha}{\mathrm{Cos}x}$$

پس t عبارت است از زمانی سپری شده از طلوع آفتاب بر حسب درجه، و ۹۰-t زمان باقی مانده تا ظهر است. این زمان برحسب «درجهٔ زمان» به دست می آید. هر یک درجهٔ زمانی متناظر است با یک درجه چرخش روزانهٔ (ظاهری) کرهٔ آسمان حول زمین. پس ۱۵ درجه معادل یک ساعت است.

کم یکی از دو نامساوی $r_3 \le r_4$ و $s_3 \le s_4$ برقرار باشد.

اکنون می توانیم با گذاشتن r_3 به جای r_1 و r_4 به جای r_2، تمامی روند را از گام ۱ تا گام ۳ تکرار کنیم. اگر این روند در گام ۱ به پایان نرسد، در گام ۲ باقیماندهٔ جدید r_5 به دست می آید. اگر روند در گام ۲ به پایان نرسد، در گام ۳ باقیماندهٔ r_6 به دست می آید و تمامی روش را دوباره تکرار می کنیم الی آخر.

سپس ماهانی ثابت می کند که اگر طبق تعریف او $\frac{s_2}{s_1} < \frac{r_2}{r_1}$،

آن گاه طبق تعریف اقلیدس نیز $\frac{s_2}{s_1} < \frac{r_2}{r_1}$، و برعکس. در اینجا هم مجال بیان برهان ماهانی نیست. برهانها در ویرایش آثار ماهانی منتشر خواهد شد.

در نوشتارهای معاصر، عمر خیّام نخستین عرضه کنندهٔ تعریفها و برهانهای مشابه ذکر شده است[۱۴]. اکنون می توان این ادعا را تصحیح کرد. ظهور این گونه ریاضیات انتزاعی در آغاز ریاضیات دورهٔ اسلامی، دو قرن پیش از خیّام، مایهٔ شگفتی است.

شرح ماهانی بر مقالهٔ دهم اصول

ماهانی شرحی بر مقالهٔ دهم اصول اقلیدس نوشته است. متأسفانه تنها آغاز این شرح موجود است. چنانکه قبلاً گفته شد، ریاضیدانان یونانی عددهای گنگ را نمی پذیرفتند، ولی نسبتهای گنگ را در هندسه قبول داشتند. اقلیدس در مقالهٔ دهم اصول این نسبتها را با اصطلاحات ریاضی پیچیده ای به تفصیل دسته بندی کرده است. او در مقالهٔ هشتم، این نظریه را در بررسی نسبتهای خاصی به کار برده است که عبارتند از نسبت بین ضلع پنج ضلعی منتظم و شعاع دایرهٔ محیطی و نسبت بین اضلاع بیست وجهی منتظم و دوازده ضلعی منتظم و شعاع کرهٔ محیط بر آنها.

همین قدر می توان گفت که منظور ماهانی در شرح خود این بود که نشان دهد چگونه با معرفی اعداد گنگ می توان این نظریه را ساده کرد و بسط داد. ماهانی اعداد گنگی را نظیر «جذر ۲» و «جذر جذر ۲» معرفی می کند که مقادیر عددی نسبتهای پاره خطهایی هستند که اقلیدس در مقالهٔ دهم اصول آنها را مطالعه کرده است. او همچنین اعداد گنگی را مانند «کعب ۲» و «کعب کعب ۲» ذکر می کند که مقادیر عددی نسبتهایی که اقلیدس آورده است نیستند. ماهانی می گوید که ترکیبها، مجموعها و تفاضلهای این عبارتها نیز جالبند. سپس می افزاید که قضایای مقالهٔ دهم اصول را با محاسبات عددی بیان خواهد کرد. متأسفانه این محاسبات در بخش بر جای مانده، موجود نیست.

بلافاصله پس از بخش حاوی شرح ماهانی، نسخهٔ عربی شامل متنی با عنوان «محاسبهٔ منفصل از مقالهٔ دهم کتاب اقلیدس و خلاصهٔ محاسبهٔ دو جمله ای» (حساب المنفصل من مقالة العاشره من كتاب اقلیدس و جملة حساب ذی الاسمین) است که نویسندهٔ آن معلوم نیست که دقیقاً حاوی همان چیزی است که ماهانی وعده اش را داده بود، یعنی مجموعه ای از محاسبات که با برخی قضایای مقالهٔ دهم معادلند. در نمادگذاری جبری نوین، متن مذکور نشان می دهد که چگونه می توان عبارتهایی مثل $\sqrt{p \pm \sqrt{q}}$، $\sqrt{\sqrt{p} \pm \sqrt{q}}$ یا $\sqrt{\sqrt{p} \pm q}$ را که در آنها p و q گویا هستند، ساده کرد. با این حال، این متن طولانی است و شامل غلطهای مختلفی است و با توجه به سبک نگارش آن، نمی تواند نوشتهٔ خود ماهانی باشد. اصطلاحات موجود در آن نشان می دهد که اثری از اوایل دورهٔ ریاضیات اسلامی است. مثلاً در این متن آمده است که «جذر شش منهای جذر ۲۴» برابر است با «جذر سه و جذر سه منهای جذر سه منهای جذر سه». این عبارت معانی مختلفی می پذیرد و تعبیر درست آن را که $\sqrt{3+\sqrt{3}} - \sqrt{3-\sqrt{3}}$ است با مطالعهٔ متن می توان یافت. در متنهایی نظیر جبر ابوکامل (حدود ۳۰۰ هجری) و کرجی (حدود ۴۱۵ هجری) اصطلاحها بدون ابهام است. پس متنی که نویسنده آن معلوم نیست، احتمالاً در اوایل دورهٔ ریاضیات اسلامی، شاید به دست یکی از شاگردان ماهانی نوشته شده و به عنوان محصول تدریس ماهانی به اثری از خود ضمیمه شده است[۱۵]. در این متن از معادلات درجهٔ دوم برای محاسبه استفاده شده و حتی یک معادلهٔ درجهٔ چهارم در متن آمده است. بنابراین، متن مذکور از لحاظ تاریخی بسیار قابل توجه است.

متن عربی بخش موجود از شرح ماهانی و متنی که مؤلف آن معلوم نیست هنوز منتشر نشده است. ترجمهٔ روسی آنها به وسیلهٔ گ. پ. ماتویفسکایا و نیز خلاصه ای از آنها به انگلیسی انتشار یافته است[۱۶]. متن عربی آنها با ترجمهٔ انگلیسی در ویرایش آثار ماهانی منتشر خواهد شد.

اثر گمشدهٔ ماهانی دربارهٔ معادله‌های درجهٔ سوم

شهرت ماهانی در نوشتارهای معاصر عمدتاً به خاطر یکی از آثار اوست که اکنون گم شده ولی به وسیلهٔ ریاضیدانان بعدی ذکر شده است. این اثر شرح او بر رسالهٔ در باب کره و استوانهٔ ارشمیدس است. ارشمیدس در قضیهٔ ۴ مقالهٔ دوم این رساله نشان می دهد که چگونه می توان کرهٔ مفروضی را با یک صفحه به دو قسمت کرد چنانکه جمع دو قسمت مذکور به نسبت مفروضی باشد. ارشمیدس در حل خود می پذیرد که پاره خط مفروض AB را می توان در نقطه X چنان تقسیم کرد که $\frac{AX^2}{R} = \frac{S}{BX}$ که در آن S یک پاره خط مفروض و R یک مستطیل مفروض است. ارشمیدس در رسالهٔ «در باب کره و استوانه» راه حل این مسأله را ذکر نکرده است. ولی آن را در اثر دیگری به کمک مقاطع مخروطی حل کرده و راه حل او مانند

۱ـ اگر طبق تعریف خود او $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ ، آن گاه طبق تعریف اقلیدس نیز $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

۲ـ اگر طبق تعریف اقلیدس $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ آن گاه طبق تعریف خود او نیز $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$.

در اینجا مجال آنکه برهانهای ماهانی را به تفصیل بیاورم نیست. این برهانها در ویرایش آثار او منتشر خواهد شد. مسأله ای که در اینجا مطرح می شود این است که این تعریف و برهانها از آن خود اوست یا نه از جمله روش یافتن تقریبهایی برای نسبت $\frac{a}{b}$ با ساختن رشته ای از اعداد n_1 ، n_2 و غیره، به صورتی که در بالا ذکر شد و در یونان باستان با نام کاهش دو سویه شناخته شده بود. اقلیدس در قضیهٔ دوم مقالهٔ دهم اصول ثابت می کند که اگر رشته عددهای n_i بی پایان باشد، $\frac{a}{b}$ گنگ است[8]. او در قضیهٔ سوم فرض می کند که $\frac{a}{b}$ گویا باشد، آن گاه از رشته اعداد n_i برای یافتن بزرگترین مقدار مشترک a و b استفاده می کند. بر اساس اشاره ای از ارسطو، تاریخ نگاران معاصر بر آنند که تعریف ماهانی در مقطعی از یونان باستان شناخته شده بود[9]. اما در آثار باقی مانده از ریاضیات یونان، نظریه ای مبتنی بر این تعریف یا نظیر آنچه ماهانی آورده است دیده نمی شود. تا زمانی که مدارک تازه ای در این مورد یافته نشود، می توان پذیرفت که برهان فوق ابداع خود ماهانی است. شاید او تا حدی از ریاضیات هندی الهام گرفته بود؛ در ریاضیات هندی، روش یافتن n_1 ، n_2 و غیره برای نسبت $\frac{a}{b}$ «ساینده» خوانده می شود و برای حل معادله های سیاله ای به صورت $bx \pm c = ay$ به ازای مقادیر صحیح مفروض a ، b و c به کار می رود[10]. اما ریاضیدانان هندی به برهانهایی نظیر آنچه ماهانی عرضه کرده است، توجهی نداشتند.

تعریف ماهانی را ریاضیدانان بعدی دورهٔ اسلامی نیز به کار بردند. در نوشتارهای معاصر[11]، ماهانی به عنوان پدید آورندهٔ این تعریف ذکر می شود اما این هم اضافه می شود که ابن هیثم (۳۵۴ تا ۴۳۰) نخستین ریاضیدانی بود که ثابت کرد این تعریف با تعریف اقلیدس هم ارز است. این ادعای غریب از آنجا ناشی شده است که پلوای (plooij) تاریخ نگار علم اهل هلند که در سال ۱۹۵۰ کوشید تا رسالهٔ ماهانی را بخواند، تنها به نسخهٔ پاریس دسترسی داشت. این نسخه تقریباً ناخواناست، بنابراین پلوای تنها توانست مقدمهٔ ماهانی و تعریف اول او را بخواند و دیگر هیچ[12].

ماهانی برای حالت $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ هم تعریفی عرضه می کند. در همهٔ نسخه هایی که دیده ام، تعریفِ داده شده در آغاز رساله نادرست است که این ناشی از اشتباه کاتبان است. ولی من تعریف درست ماهانی را بر اساس برهانی که در رساله آمده است، بازسازی کرده ام. هیچ ردّی از این نوع تعریف در یونان باستان دیده نمی شود. بنابراین، به نظر می رسد که کار ماهانی کاملاً بدیع بوده است.

اکنون تعریف ماهانی را به زبان امروزی و با نمادگذاری جدید بیان می کنم. چون متن ماهانی خیلی فشرده است، توضیحهای من مفصل تر از آن است که ماهانی آورده، ولی ماهیت اندیشه های او را بی تغییر نگاه داشته ام.

می خواهیم دو نسبت $\frac{r_2}{r_1}$ و $\frac{s_2}{s_1}$ را مقایسه کنیم.

گام صفر:

اگر $r_1 < r_2$ و $s_1 < s_2$ ، می توانیم $\frac{r_1}{r_2}$ را با $\frac{s_1}{s_2}$ مقایسه کنیم.

پس ماهانی بدون نقض عمومیت می پذیرد که دست کم یکی از نامساویهای $r_2 \le r_1$ یا $s_2 \le s_1$ برقرار است.

گام ۱:

چهار حالت متمایز ممکن است پیش بیاید:

۱ـ اگر $r_1 = r_2$ و $s_1 = s_2$ ، طبق تعریف قبلی داریم $\frac{r_2}{r_1} = \frac{s_2}{s_1}$.

۲ـ اگر $r_1 < r_2$ و $s_2 \le s_1$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} > \frac{s_2}{s_1}$.

۳ـ اگر $r_2 \le r_1$ و $s_1 < s_2$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} < \frac{s_2}{s_1}$.

۴ـ اگر $r_2 < r_1$ و $s_2 < s_1$ ، به سراغ گام ۲ می رویم.

گام ۲:

اکنون می توانیم دقیقاً یک عدد صحیح n_2 بیابیم چنانکه $r_1 = n_2 r_2 + r_3$ ، $s_1 = n_2 s_2 + s_3$ و $r_3 > 0$ ، $s_3 > 0$ و چنان که دست کم یکی از دو نامساوی $r_2 \ge r_3$ یا $s_2 \ge s_3$ برقرار باشد.

باز هم در اینجا چهار حالت متمایز قابل تشخیص است:

۱ـ اگر $r_2 = r_3$ و $s_2 = s_3$ ، طبق تعریف قبلی داریم $\frac{r_2}{r_1} = \frac{s_2}{s_1}$.

۲ـ اگر $r_2 < r_3$ و $s_2 \ge s_3$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} < \frac{s_2}{s_1}$.

۳ـ اگر $r_2 \ge s_3$ و $s_2 < s_3$ ، طبق تعریف $\frac{r_2}{r_1} > \frac{s_2}{s_1}$.

۴ـ در حالتی که $r_2 > r_3$ و $s_2 > s_3$ ، به سراغ گام ۳ می رویم[13].

گام ۳:

می توانیم دقیقاً یک عدد صحیح n_3 بیابیم چنانکه $r_2 = n_3 r_3 + r_4$ ، $s_2 = n_3 s_3 + s_4$ و $r_4 > 0$ ، $s_4 > 0$ چنانکه دست

می گوید: برخی قضایای مقالهٔ دهم اصول) نیز ممکن است. ماهانی تعریفهای دیگری بر اساس همین نظر عرضه می کند و سپس ثابت می کند که تعریفهای جایگزین او با تعریف های ۵ و ۷ اقلیدس هم ارز است. تعریف های جایگزین ماهانی با مفهوم امروزی کسرهای مسلسل مرتبط است. مثال زیر (که ماهانی آن را نیاورده است ولی در یونان باستان شناخته شده بود) می تواند به درک تعریف ماهانی کمک کند. مربع ABCD را به ضلع a=AB و قطر b=AC رسم کنید.

در اینجاست نسبت $\frac{a}{b}$ مورد نظر است (شکل ۱).

نخست به تعداد دفعات ممکن، a را از b می کاهیم. روشن است که این کار را یک بار می توان کرد:
نقطهٔ E را روی AC چنان اختیار کنید که AE=AB=a. سپس اگر EF را عمود بر AE رسم کنیم، خواهیم داشت $a_1 = EC = EF = FB < a$. پس $b = n_1 a + a_1$ و $0 < a_1 < a$ که در آن $n_1 = 1$.

اکنون می خواهیم به تعداد دفعات ممکن، a_1 را از a بکاهیم. چون FEC نیمی از یک مربع است، داریم

$$\frac{b}{a} = \frac{FC}{FE} = \frac{a-a_1}{a_1}$$

پس $(a-a_1) = 1\cdot a_1 + a_2$ که در آن $0 < a_2 < a_1$، و بنابراین، $a = n_2 a_1 + a_2$ که در آن، $0 < a_2 < a_1$ و $n_2 = 2$.
اگر G را روی FC چنان اختیار کنیم که $FG = a_1$ و GH را عمود بر BC رسم کنیم تا AC را در H قطع کند، خواهیم داشت $GH = GC = a_2$. چون شکلهای ABFE و FGHE متشابهند، داریم $\frac{AB}{BF} = \frac{FG}{GH}$ یا $\frac{a}{a_1} = \frac{a_1}{a_2}$.

در نتیجه، این روند بدون نهایت ادامه می یابد، یعنی $a_1 = 2a_2 + a_3$ که در آن $0 < a_3 < a_2$، و $a_2 = 2a_3 + a_4$ که در آن $0 < a_4 < a_3$، و مانند آن.

چون این روند پایان ندارد، نسبت $\frac{a}{b}$ گنگ است. در ریاضیات امروزی، مثلاً می نویسیم $b = a\sqrt{2}$ و می گوییم که بسط آن به صورت کسر مسلسل عبارت است از $\sqrt{2} = 1 + 1/(2 + 1/(2+\cdots))$. از این روند می توان برای یافتن مقدار تقریبی $\frac{a}{b}$ یا $\frac{b}{a}$ استفاده کرد، مثلاً

$$\sqrt{2} \cong 1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+1}}} = \frac{24}{17}$$

ماهانی همین روند را برای مقادیر دلخواه $\frac{a}{b}$ که در آن $a \neq b$ به صورت زیر در نظر می گیرد:
فرض کنید مثل مورد قبل، $a<b$. ابتدا عدد طبیعی n_1 را چنان می یابیم که $b = n_1 a + a_1, 0 < a_1 \le a$.

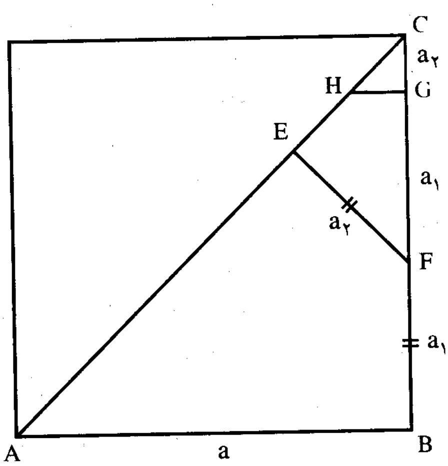
اگر $a = a_1$، داریم $a = 1a_1$ و روند به پایان می رسد. اگر $a > a_1$، عدد طبیعی n_2 را می توان چنان یافت که $a = n_2 a_1 + a_2$، که $0 < a_2 \le a_1$.

اگر $a_1 = a_2$، روند به پایان می رسد. اگر $a_1 > a_2$، روند را می توان ادامه داد و a_3 را یافت و این کار را تکرار کرد. به این ترتیب، ماهانی برای هر نسبت $\frac{a}{b}$ یک رشته عدد طبیعی n_1، n_2، ... می یابد که می تواند پایان دار یا بی پایان باشد. اگر نسبت $\frac{a}{b}$ برابر باشد با $\frac{p}{q}$ که p و q اعداد طبیعی اند، روند پایان دار است و آخرین جملهٔ باقی مانده (a_k) بزرگترین اندازهٔ مشترک a و b است. اگر a و b عددهای طبیعی باشند، a_k بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنهاست. اگر روند پایان نیابد، ریاضیدان امروزی می تواند عدد حقیقی q را چنان تعریف کند که b=qa و بسط آن به صورت کسر مسلسل چنین باشد

$$q = n_1 + \cfrac{1}{n_2+\cfrac{1}{n_3+\cfrac{1}{\vdots}}}$$

فرض کنید که برای نسبت $\frac{c}{d}$ که $c<d$ یک رشته عدد m_1، m_2، ... می یابیم.

تعریف ماهانی از نسبتهای مساوی چنین است: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ اگر دو رشتهٔ n_1، n_2، ... و m_1، m_2، ... یکی باشند. پس این دو رشته باید تعداد عناصرشان برابر باشد و به ازای هر i باید داشته باشیم $m_i = n_i$. ماهانی سپس ثابت می کند که:



شکل ۱

به نظر من تاریخ ریاضیات رشته ای صرفاً دانشگاهی نیست، بلکه برای مقاصد دیگری نیز به کار می آید. می توان به دانشجویان و دانش آموزان رابطهٔ بین آنچه را که می آموزند و آثار دانشمندان قرنهای گذشته را نشان داد. به این ترتیب، آنها از میراث فرهنگی و معنوی خود در علوم آگاهی خواهند یافت.

نخستین سؤال ما این است: ماهانی در چه زمانی می زیست؟[3] در منابع موجود پاسخی نمی توان یافت. تنها به مجموعه ای از نه رصد نجومی ماهانی دسترسی داریم که از طریق ابن یونس، منجم مصری (درگذشتهٔ ۳۹۹ هجری)، به ما رسید است. ماهانی این رصدها را بین سالهای ۲۳۹ و ۲۵۲ هجری برای آزمودن زیج ممتحن و پیشنهاد اصلاحات در آن انجام داده است. زیج ممتحن مجموعه ای از جدولهای نجومی بود که در حدود سال ۲۱۰ هجری در بغداد به خواست خلیفه مأمون فراهم شد. این جدولها مبتنی بر نظریهٔ نجومی بطلمیوس و مشخصه های جدید حاصل از رصدهای جدید انجام شده در بغداد بود.[4]

سؤال بعدی این است: ماهانی در کجا می زیست؟ ابن قفطی زندگینامه نویس (قرن هفتم هجری) می گوید که ماهانی در بغداد به سر می برد. درستی این گفته را می توان بر اساس رصدهای نجومی او نشان داد. از مقایسهٔ زمانهای خسوف و کسوف که ماهانی ثبت کرده است با محاسبات امروزی، می توان نشان داد که او در محلی حدود ۴۵ درجه در شرق گرینویچ رصد می کرده است. ماهانی اشاره هایی به ارتفاع ستارگان بالای افق و محاسبات به اسطرلاب دارد. با استفاده از این اطلاعات می توان نشان داد که عرض جغرافیایی محل زندگی او بین ۳۲ و ۳۶ درجه بوده است. پس احتمالاً این رصدها همان طور که ابن قفطی گفته در بغداد انجام شده است. در حال حاضر از زندگی ابن قفطی بیش از این اطلاعی در دست نداریم. می توان امیدوار بود که در آینده در منابع منتشر نشده اطلاعات بیشتری یافته شود.

ماهانی در دوره ای می زیست که چه از لحاظ تاریخ نجوم و چه از لحاظ تاریخ ریاضیات قابل توجه است. برخی از آثار مهم ریاضیات یونان (مثل اصول اقلیدس و مجسطی بطلمیوس) تازه به عربی ترجمه شده بود و آثار دیگری (مثل دربارهٔ کره و استوانه از ارشمیدس و مقاطع مخروطی آپولونیوس) در دست ترجمه به عربی بود. ثابت بن قره، ریاضیدان اهل حران در سوریه، نقش مهمی در این نهضت ترجمه داشت؛ بنابراین، بررسی رابطهٔ او با ماهانی قابل توجه است. ثابت بن قره در سال ۲۲۱ هجری به دنیا آمد و در سال ۲۸۸ هجری درگذشت. هنگامی که ماهانی نخستین رصد ثبت شده اش را در بغداد انجام می داد، ثابت بن قره فقط ۱۸ سال داشت. پس احتمالاً ماهانی از ثابت بن قره مسن تر بود. چنان که خواهیم دید، این دو علایق مشترکی داشتند و ماهانی دست کم در یکی از آثارش از ثابت بن قره الهام گرفته است. ثابت بن قره یک مورد استثنایی است زیرا بسیاری از آثارش برجا مانده و همهٔ اینها به صورت متن عربی یا ترجمه منتشر شده است.[5] اما به عکس، تنها بخشهایی از آثار ماهانی به دست ما رسیده که اغلب آثار هنوز منتشر نشده است.

آثار موجود ماهانی

۱ـ شرح ماهانی بر مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس.

۱ـ بر اساس منابع متعدد، ماهانی شرحی بر مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس نوشته است. رسالهٔ کوتاهی از ماهانی دربارهٔ نسبتها در اصول اقلیدس در شش نسخهٔ خطی موجود است و ممکن است این رساله (بخشی از) شرح او باشد. این رساله کوتاه و در عین حال بسیار عمیق است. در اینجا می خواهم دربارهٔ برخی از مطالب این رساله بحث کنم زیرا به این ترتیب می توان تصور درستی از سطح کار ماهانی به دست آورد. محتوای ریاضی این رساله در نوشتارهای تاریخی معاصر بررسی نشده است.

در آغاز توضیحی دربارهٔ مقالهٔ پنجم اصول اقلیدس و نظریهٔ نسبتها در یونان باستان عرضه می کنم.

نظریهٔ اقلیدس دربارهٔ نسبتها بسیار پیچیده است زیرا به نسبتهای گویا و گنگ یک جا می پردازد. یونانیها وجود اعداد گنگ را به خاطر مشکلات نهفته در این مفهوم، نمی پذیرفتند. اما آنان دریافته بودند که برخی نسبتهای بین پاره خطها (مثل قطر و ضلع مربع) را نمی توان به صورت نسبت بین دو عدد طبیعی بیان کرد. بنابراین، نظریهٔ نسبتهای خود را بر اساس مفهوم مقدار که عام تر از مفهوم عدد است بیان کردند. مقدار می تواند عددی طبیعی، پاره خط، سطح، حجم یا حتی یک فاصلهٔ زمانی باشد.

در مقالهٔ پنجم اصول[6]، اقلیدس سه تعریف عرضه می کند که در این بحث مهم است و من آنها را به زبانی امروزی بیان می کنم:

(تعریف ۴) دو مقدار A و B دارای نسبت اند اگر مضرب صحیح mA موجود و از B بزرگتر باشد و مضرب صحیح nB هم موجود و از A بزرگتر باشد.

(تعریف ۵) فرض کنید A و B دو مقدارند که می توانند نسبتی داشته باشند و نیز فرض کنید C و D دو مقدار دیگر باشند که بتوانند نسبتی داشته باشند. نسبت A به B با نسبت C به D برابر است، هرگاه به ازای همهٔ مضربهای mA، mC و nB، nD داشته باشیم: اگر $mA>nB$ آنگاه $mC>nD$، اگر $mA=mB$ آنگاه $mC=nD$، اگر $mA<nB$ آنگاه $mC<nD$.

(تعریف ۷) نسبت A به B بزرگتر است از نسبت C به D اگر مضربهای mA، mC و nB، nD موجود باشند چنان که $mA>nB$ اما $mc\leq nD$.

این تعریفها برای همهٔ ریاضیدانان خوشایند نبود. به گفتهٔ ماهانی، ثابت بن قره اشاره ای دارد[7] حاکی از اینکه معرفت نسبتها به وسیلهٔ عددها و آنچه اکنون الگوریتم اقلیدسی خوانده می شود (ثابت بن قره

رساله های ریاضی و نجومی ماهانی

نویسنده: یان پ. هوخندایک
دانشکدهٔ ریاضی، دانشگاه اوترخت (هلند)
مترجم: محمّد باقری - بنیاد دائرة المعارف اسلامی

مقدمه

دانشمندان ایرانی در میراث ریاضیات و نجوم دورهٔ اسلامی سهم مهمی داشته اند. طی سده های پیش از ظهور اسلام، ایران از مراکز علم نجوم بود. در قرن دوم هجری که خلفای اسلامی به علوم توجه کردند، نجوم ایرانی هنوز زنده بود و سرانجام نجوم دورهٔ اسلامی شد. در حوالی سال ۱۶۰ هجری منجمان هندی به دربار خلفا دعوت شدند و در حوالی ۱۷۵ هجری نخستین متنهای ریاضی و نجومی یونان به عربی ترجمه شد. به هر حال، نقش هندیان و یونانیان نباید موجب شود که ریشه های ایرانی نجوم دورهٔ اسلامی را از نظر دور بداریم.[۱]

پس از قرن اول هجری، دانشمندان ایرانی تبار در سایر نواحی جهان اسلام به کار پرداختند؛ بنابراین، تاریخ ریاضیات و نجوم ایران را نمی توان از تاریخ ریاضیات و نجوم کلِّ جهان اسلام جدا دانست. طبق برآورد من، بیش از یک سوم کلِّ دستاوردهای دانشمندان دورهٔ اسلامی مرهون ریاضیدانان و منجمان ایرانی است.

برخی از آثار منجمان و ریاضیدانان مهم ایرانی به خوبی شناخته شده است. اما بسیاری از این آثار هنوز مطالعه نشده و دوره های عظیمی از تاریخ بویژه، دورهٔ پیش از اسلام و سه قرن اول پس از ظهور اسلام همچنان در پردهٔ ابهام باقی مانده است. از منابع نجوم ایرانی پیش از اسلام تقریباً هیچ چیز باقی نمانده است و بسیاری از جزئیات آنها را باید به کمک زایچه هایی که در قرن سوم هجری طبق روشهای کهن ایرانی محاسبه شده اند بازسازی کرد. گرچه تاکنون ریاضیدانان و تاریخنگاران معتبر کارهای زیادی در این زمینه انجام داده اند[۲]، به هیچ وجه کار به پایان نرسیده است. به علاوه، بیشتر آثار ریاضیدانان و منجمان آغاز دورهٔ اسلامی گم شده است. ولی منابع زیادی از این دوره به صورت نسخه های خطی عربی بر جا مانده است. بنابراین، اطلاعات زیادی از این دوره قابل دستیابی است. پژوهشگران معاصر کارهای زیادی در این باره کرده اند و بسیار کارها نیز باقی مانده است. بسیاری از منابع خطی منتشر نشده اند و در سراسر جهان پراکنده اند. برای بررسی جدی علوم در زمینهٔ تاریخی و فرهنگی خود، نخست باید به این متنها دست یافت. پس تاریخ ریاضیات و نجوم سه قرن نخست دورهٔ اسلامی تا حد زیادی دست نخورده مانده است.

در این گفتار می خواهم به عنوان نمونه ای از این موارد، آثار یک ریاضیدان و منجم ایرانی از اوایل دورهٔ اسلامی، یعنی ابو عبدالله محمدبن عیسی ماهانی را که اهل ماهان در نزدیکی کرمان بود، بررسی کنم. به پیشنهاد آقای باقری از تهران، ویرایشی از متن عربی آثار ماهانی را همراه با ترجمهٔ انگلیسی آنها فراهم کرده ام و امیدوارم که این ویرایش زمانی به فارسی ترجمه و در ایران منتشر شود. البته ماهانی تنها یکی از صدها دانشمند است و این ویرایش کار بسیار کوچکی در زمینهٔ تاریخ کلی ریاضیات و نجوم جهان اسلام است. در اینجا مروری بر آثار ماهانی خواهم کرد و نقش او را در تاریخ ریاضیات و نجوم اوایل دورهٔ اسلامی نشان خواهم داد. ماتیاس ویسر، دانشجوی من در اوترخت، کارگاهی را تنظیم کرده است که نشان می دهد چگونه می توان از این مطالب در مدرسه استفاده کرد.