Middeleeuws Islamitische methoden voor het vinden van de richting van Mekka

J.P. Hogendijk
Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

In de Nieuwe Wiskrant van augustus 1991 beschrijven F.J. van den Brink en M. Meeder de achtergronden van het nieuwe W12-16 pakket *Mekka* voor klas drie of vier mavo. De auteurs maken duidelijk hoe het probleem van het vinden van de richting van Mekka op allerlei interessante manieren gebruikt kan worden voor (intercultureel) wiskunde onderwijs.
Het behoort tot de religieuze plichten van elke Moslim vijf maal per dag in de richting van Mekka te bidden, preciezer gezegd, in de richting van de Kaaba. Dit is een heiligdom te Mekka, dat op zichzelf geen magische betekenis heeft, maar wel een symbool is voor de centrale positie die God in het leven van de Moslim inneemt. Het vinden van de *qibla*, dat wil zeggen de richting van de Kaaba te Mekka, is in de middeleeuwse Islamitische beschaving steeds onderwerp van studie en discussie geweest, en het probleem is op vele manieren opgelost, met en zonder wiskunde.[1] Al omstreeks het jaar 750 hadden de Moslims een enorm wereldrijk veroverd, dat zich uitstrekte van Spanje tot India. Zo ontstond het probleem de qibla te vinden ook voor zeer ver van Mekka verwijderde plaatsen. In het bijzonder moest bij het bouwen van een nieuwe moskee zeer zorgvuldig over het vinden van de qibla worden nagedacht.

In dit artikel zullen enkele van de gebruikte methoden voor het vinden van de qibla aan de orde komen. Het hier gepresenteerde materiaal is grotendeels gebaseerd op recent historisch onderzoek van D.A. King (Institut für Geschichte der Naturwissenschaften, Frankfurt am Main), en de geïnteresseerde lezer kan in de artikelen van King in de literatuurlijst een schat aan verdere informatie en illustraties vinden.

Eenvoudige methoden

De 'metgezellen' (aṣḥāb) van de profeet, dat wil zeggen de Moslims die de profeet persoonlijk gekend hadden, werden aan de latere generaties vaak tot voorbeeld gesteld vanwege hun grote zuiverheid van karakter. Omdat de metgezellen die te Medina verbleven, naar het zuiden baden, werd hun voorbeeld ook in dit opzicht nagevolgd, ook in plaatsen waar de qibla feitelijk in een heel andere richting lag (bijvoorbeeld Cordoba in Spanje). Hierbij moet gezegd worden dat het volgens sommige wetsgeleerden slechts nodig was, ongeveer naar de richting van Mekka te bidden. Met andere woorden: de intentie was belangrijker dan de precieze wiskundige uitwerking.
Een andere niet-wiskundige methode werd in Samarkand gebruikt. Omdat de weg van Samarkand naar Perzië eerst in westelijke richting liep, en men via Perzië naar Mekka trok, namen sommigen in Samarkand als qibla het westen aan.

De kaaba als naaf van de wereld

In een aantal middeleeuws Arabische werken over aardrijkskunde werd de Kaaba als midden van de wereld gezien, en de (bewoonde) wereld werd in een aantal zones opgedeeld (in figuur 1 zijn 12 zones getekend).

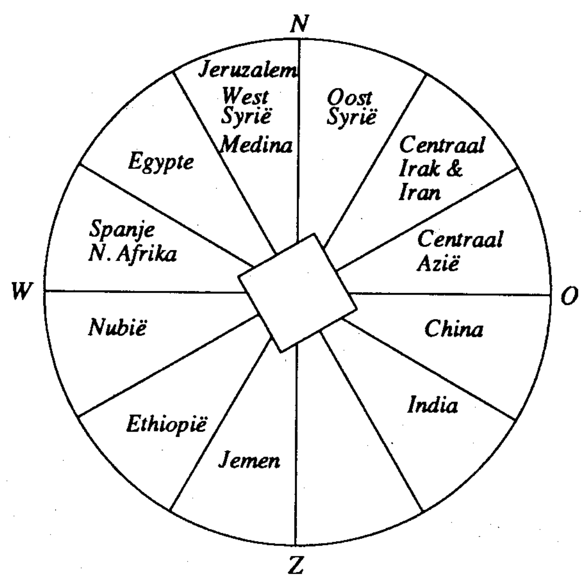

fig. 1

De qibla werd als in het volgende voorbeeld door een symmetrieargument bepaald. Stel men kijkt vanaf de

Kaaba in de richting van de zone van Irak, en men ziet in die richting een bepaalde ster uit de Tweelingen opgaan. Wie in Irak naar de Kaaba wil bidden, moet zorgen dat de plaats waar die ster opgaat precies achter hem ligt.[2]

Dit systeem berust deels op het feit dat de Kaaba (net als vele andere bouwwerken uit de oudheid) zelf astronomisch georiënteerd is. Dit was aan de Islamitische geleerden bekend. De Kaaba is een rechthoekig gebouw, waarvan de grote as naar het punt aan de zuidoostelijke horizon wijst waar de ster Canopus opgaat (dit is een ster, die in onze breedten nooit zichtbaar is, maar in Mekka wel boven de zuidelijke horizon uitkomt); en de geleerden namen aan dat de korte as wijst naar het punt in het noordoosten waar de zon op de langste dag opgaat, en dus ook naar het punt in het zuidwesten waar de zon op de kortste dag ondergaat.[3]

Lengte- en breedtegraden

In de achtste eeuw kwamen de Islamitische geleerden in contact met de wiskunde en sterrenkunde uit Perzië en India, en vanaf de negende eeuw werden ook de (moeilijke) Griekse werken op dit gebied in het Arabisch vertaald. Vanaf die tijd werden wiskundige methoden ontwikkeld voor het vinden van de qibla. Al deze methoden gaan uit van de bolvorm van de aarde, en ze gebruiken plaatscoördinaten *lengte* en *breedte*. Deze waren in de oudheid ingevoerd in de *Geografie* van Ptolemaeus van Alexandrië (ca. 150 n. Chr.). De geografische breedte van Ptolemaeus is dezelfde als de onze, met dien verstande dat de breedte van Ptolemaeus vrijwel altijd noorderbreedte is; over het zuidelijk halfrond was destijds zeer weinig bekend.

De *lengte* van Ptolemaeus werd gemeten vanaf de Canarische Eilanden (het meest westelijke punt van de toen bekende wereld), en daarom is de *lengte* van Ptolemaeus ca. 15° groter dan de moderne oosterlengte. De bekende wereld strekte zich niet verder dan China uit, en dus kwamen plaatsen met lengte groter dan 180 graden bij Ptolemaeus niet voor.

De *Geografie* werd in het begin van de negende eeuw in het Arabisch vertaald. Helaas kwamen niet alle in de Islamitische wereld belangrijke plaatsen erin voor (sommige bestonden nog niet eens in de tijd van Ptolemaeus), en de coördinaten die er wel in voorkwamen waren niet alle nauwkeurig. In het begin van de negende eeuw werd in Bagdad een groot onderzoeksprogramma gestart, met als doel onder meer het bepalen van de coördinaten van vele belangrijke plaatsen in de Islamitische wereld. Dit programma stond onder de bezielende leiding van het toenmalige staatshoofd Kalief al-Ma'mūn, die veel interesse in exacte wetenschappen had, en zich zelf bezighield met het beoordelen van de metingen.

De geografische breedte kan gemakkelijk bepaald worden; hij is ruwweg gelijk aan de hoogte van de poolster.[4]

Overdag bepaalde men de breedte ϕ uit de maximale hoogte van de zon $90° - \phi + \delta$, waarbij δ de declinatie van de zon is, dat is de afstand (in booggraden) van het middelpunt van de zon naar de hemelequator. De declinatie kan gemakkelijk worden berekend op basis van de lengte λ van de zon in de dierenriem, door middel van de formule $\sin \delta = \sin \lambda \sin \varepsilon$,[5] waarin ε de hoek is tussen de hemelequator en de dierenriem. Tegenwoordig is deze 23° 27'; Ptolemaeus gebruikte $\varepsilon = 23° 51'$; de astronomen van Kalief al-Ma'mūn vonden de (nauwkeuriger) waarde $\varepsilon = 23° 35'$.

Omdat wij een zonnekalender gebruiken, kunnen wij λ voor elke dag van het jaar gemakkelijk uit het hoofd schatten.[6]

Het was veel moeilijker de geografische lengte te bepalen, preciezer gezegd, het lengteverschil tussen twee gegeven plaatsen. Hiervoor waren in de oudheid en middeleeuwen slechts twee methoden beschikbaar. De eerste methode was de afstand tussen de twee plaatsen (in oost-westelijke richting) te meten of te schatten op basis van gegevens van reizigers (bijvoorbeeld aantallen dagreizen tussen de twee plaatsen). Om deze afstand om te zetten in een geografisch lengteverschil moest men de omtrek van de aarde weten. Hiervoor had men in de oudheid al een schatting gegeven, maar de precieze lengte-eenheid waarin de omtrek was uitgedrukt was niet bekend aan de Arabische vertalers. Daarom liet de al eerder genoemde Kalief al-Ma'mūn twee expedities vertrekken vanuit een punt midden op een grote vlakte in Noord Irak in de buurt van Mosul. De ene expeditie reisde naar het zuiden, en de tweede naar het noorden, net zolang tot de geografische breedte (gemeten aan de hoogte van de zon) één graad kleiner respectievelijk groter geworden was dan die van het uitgangspunt. Ondertussen werd de afgelegde afstand nauwkeurig bijgehouden (waarschijnlijk met behulp van eenvoudige landmeetkundige instrumenten). Daarna keerden de expedities naar het punt van uitgang terug, en de gemeten afstanden werden vergeleken.

Op basis hiervan concludeerde men dat één breedtegraad met ofwel 56 ofwel $56\frac{2}{3}$ mijl[7] overeenkomt (1 mijl was 4000 el; 1 el $\approx$ 50 cm, dus 1 mijl $\approx$ 2 km.) Dus komt 1 lengtegraad overeen met circa $56 \cos \phi$ mijl, waarin ϕ de geografische breedte is.

De tweede methode voor het bepalen van het lengteverschil berustte op het gelijktijdig observeren van één maansverduistering[8] op twee verschillende plaatsen. De data waarop maansverduisteringen zouden plaatsvinden konden met methoden uit de *Almagest* van Ptolemaeus, het standaardwerk over Griekse astronomie, nauwkeurig worden voorspeld. Wanneer een maansverduistering plaatsvond, bepaalden de astronomen op beide plaatsen de lokale tijd van het begin of einde van de maansverduistering (in astronomische uren voor of na middernacht), en hieruit het tijdsverschil. Elk uur tijdsverschil komt overeen met 15 graden lengteverschil. Voor deze

methode was veel georganiseer nodig, maar toch was ze voor grotere afstanden de enige min of meer betrouwbare. In de negende eeuw werd op deze wijze het lengteverschil tussen Bagdad en Mekka bepaald,[9] met als uitkomst 3°. De werkelijke waarde is 4° 46′.
Er zijn in de middeleeuwen talloze astronomische tabellenboeken samengesteld, en elk handboek bevat een tabel met plaatscoördinaten voor (meestal ongeveer honderd) plaatsen. Van al deze coördinaten is door E.S. en M.H. Kennedy een database opgesteld, die door het Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften te Frankfurt am Main is gepubliceerd (zie de literatuurlijst). Het blijkt dat de geografische breedten meestal met een fout van maximaal 1° bekend waren. Wanneer in een stad een goede astronoom was, leidde dit vaak tot een nauwkeuriger waarde (met een fout van minder dan 10 boogminuten). De lengteverschillen waren veel onnauwkeuriger, fouten van enkele graden zijn niet ongewoon.
We nemen nu aan dat we over de volgende drie gegevens beschikken: De geografische breedte ϕ_P van de plaats P waar wij ons bevinden, de geografische breedte ϕ_M van Mekka, en het lengteverschil $\Delta\lambda$ tussen de plaats waar wij ons bevinden en Mekka. $\Delta\lambda$ wordt voor plaatsen ten oosten en voor plaatsen ten westen van Mekka positief genomen. Voor ϕ_M wordt in de meeste middeleeuwse handschriften 21° of 21° 40′ opgegeven (de correcte waarde is 21° 26′). We noteren $\Delta\phi = |\phi_P - \phi_M|$.

Benaderingsmethoden voor het bepalen van de qibla

Vanaf de negende eeuw zijn er diverse eenvoudige methodes ontwikkeld, waarmee goede benaderingen van de qibla kunnen worden gevonden. We noemen er hier twee; een benaderende berekening en een benaderende meetkundige constructie.
Deze methoden en de exacte methoden uit het volgende hoofdstukje leveren als uitkomst altijd een hoek, die de 'afwijking van de qibla' (Arabisch: inḥirāf al-qibla) heet, en die wij met q zullen noteren. Dit is de hoek tussen de qibla en het zuidpunt aan de horizon. De qibla kan westelijk of oostelijk van het zuiden liggen, al naar gelang P ten oosten of ten westen van Mekka ligt.
De eerste methode (die door de astronomen van Kalief al-Ma'mūn gebruikt werd) gaat er vanuit, dat de aarde voor plaatsen niet al te ver van Mekka bij benadering als een plat vlak kan worden beschouwd.
Figuur 2 is een kaart van zo'n stukje plat vlak, met lengtegraden en breedtegraden (de lengtegraden zijn $\cos\phi_M$ maal zo lang als de breedtegraden). De hoek q werd nu bepaald via een methode, die door de figuur wordt aangegeven (voor $\Delta\lambda = 4°$, $\Delta\phi = 3°$), en op de volgende formule neerkomt:

$$\tan q = \frac{\Delta\lambda \cos\phi_M}{\Delta\phi}.$$

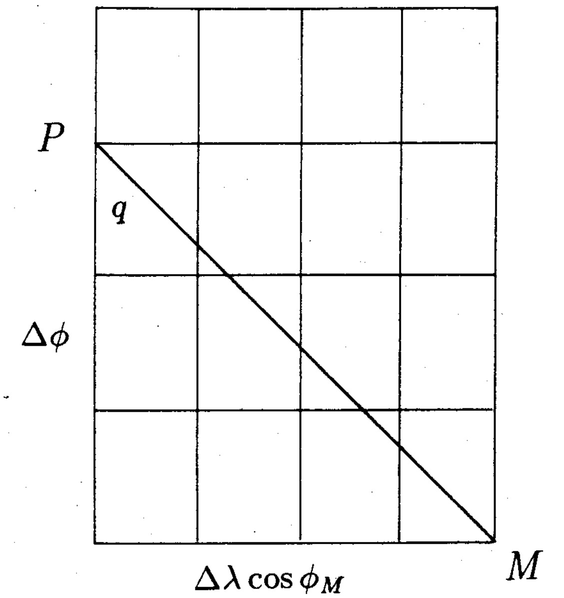

fig. 2

Deze methode gaf goede resultaten voor het Midden oosten. De formule is enigszins misleidend omdat tangens-tabellen in de negende eeuw nog niet algemeen verspreid waren. Men berekende daarom uit $\tan q$ eerst $\sin q$ en kon dan q uit de sinustabel terugzoeken.[10]
Voor P_1 = Bagdad, ten oosten van Mekka ($\Delta\lambda = 4°\ 37'$, $\phi_P = 33°\ 20'$) geeft de methode $q_1 = 19°\ 48'$ (naar het westen), voor P_2 = Utrecht, ten westen van Mekka ($\Delta\lambda = 34°\ 42'$, $\phi_P = 52°\ 6'$) geeft de methode $q_2 = 46°\ 48'$ (naar het oosten).

De tweede methode is meetkundig (figuur 3).

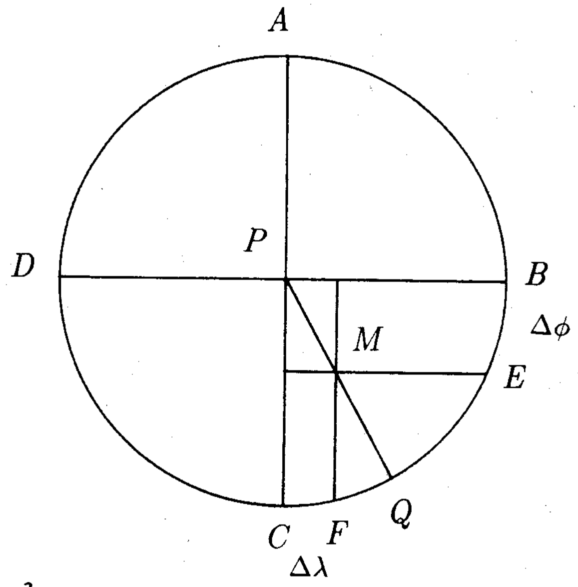

fig. 3

We nemen een in 360 graden verdeelde cirkel met middelpunt P, die door twee loodrechte lijnen AC en BD in

vier kwadranten verdeeld is. Hierbij is A het noorden, B het oosten, C het zuiden en D het westen. Als P ten noordwesten van Mekka ligt, zetten we op het gedeelte rechts onder vanaf punt B de horizontale lijn, een boog $BE = \Delta\phi$ af, en vanaf punt C op de verticale lijn een boog $CF = \Delta\lambda$, als in figuur 3. We trekken door E een lijn evenwijdig aan BD en door F een lijn evenwijdig aan AC; deze twee lijnen snijden elkaar in M. We trekken PM en verlengen hem tot hij de in graden verdeelde cirkel in Q snijdt. Lijn PQ geeft de richting van de qibla aan, en de 'afwijking van de qibla' is boog CQ. Voor plaatsen ten noordoosten van Mekka zetten we $\Delta\phi$ vanaf D af op boog DC, en $\Delta\lambda$ vanaf C op boog CD, enz.
Voor P_1 = Bagdad en P_2 = Utrecht geeft de methode respectievelijk $q_1 = 21° 16' W$. en $q_2 = 48° 25' O$.

Een exacte methode voor het bepalen van de qibla

Het heeft enige tijd geduurd voordat men in de Islamitische wiskunde de qibla op exacte manier uit $\Delta\lambda$, ϕ_M en ϕ_P kon bepalen. In de negende eeuw werden de eerste methoden gevonden, maar deze waren tamelijk omslachtig. We bespreken hier een methode die vanaf de tiende eeuw veel gebruikt werd, en als 'methode van de astronomische handboeken' (Arabisch: ṭarīq al-azyāj, van zīj = astronomisch handboek) bekend stond. Voor het gemak geven we alle stappen in moderne notatie en in de moderne sinus en cosinusfuncties weer. Verder gebruiken we het begrip 'hoek' in een boldriehoek, hetgeen in die tijd nog niet algemeen werd gebruikt. Door deze wijzigingen verandert er niets wezenlijks aan de methoden.
We beschouwen in figuur 4 de aardbol: N is de noordpool, M is Mekka en P is de plaats waar wij ons bevinden. We verbinden deze punten door bogen van grootcirkels (dat zijn cirkels waarvan het middelpunt met het middelpunt van de bol samenvalt).

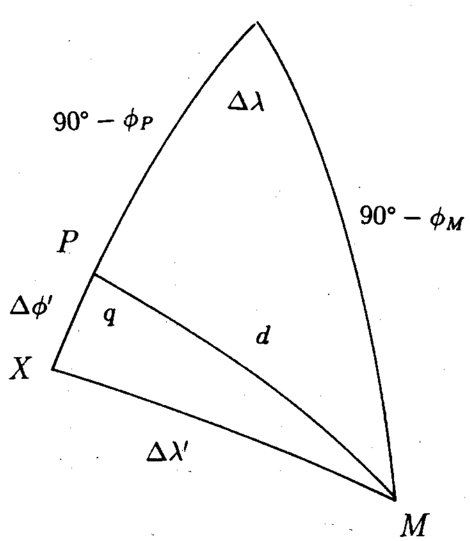

fig. 4

We kunnen nu het probleem formuleren als een probleem over deze boldriehoek MNP.
Gegeven zijn $\angle MNP = \Delta\lambda$, boog $NM = 90° - \phi_M$, boog $NP = 90° - \phi_P$. Gevraagd $\angle MPN = 180° - q$.

Dit probleem wordt opgelost door toepassing van twee regels voor een rechthoekige boldriehoek, die we eerst zullen afleiden.

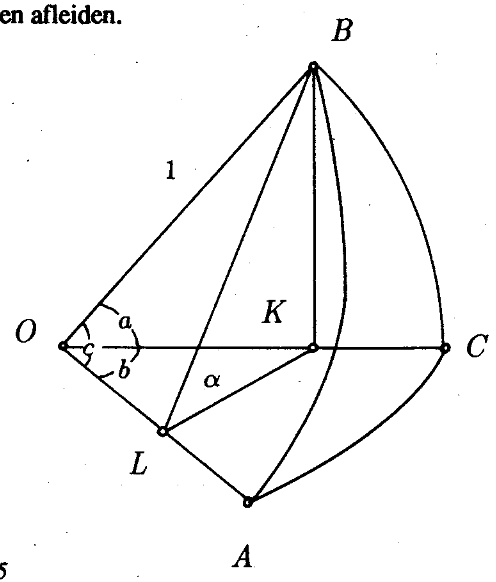

fig. 5

In figuur 5 is O het middelpunt van een bol en ABC is een boldriehoek met $\angle C = 90°$. Noteer de zijden van de boldriehoek als $a = BC$, $b = AC$, $c = AB$ (deze worden in graden gemeten) en de hoeken $\alpha = \angle A$, $\beta = \angle B$, $\gamma = \angle C$.

We verbinden O met A, B en C. Nu is ook $a = \angle BOC$, $b = \angle COA$, $c = \angle AOB$, en verder is α de hoek tussen de vlakken BOA en COA, en γ (= 90°) de hoek tussen de vlakken BOC en AOC. We laten uit B een loodlijn BK op OC neer en een loodlijn BL op OA. Met enig denkwerk is in te zien dat OA loodrecht staat op LK. Hieruit volgt $\alpha = \angle BLK$.

Stellen we de straal van de bol 1, dan is $BK = \sin a$, $BL = \sin c$. Verder $\frac{BK}{BL} = \sin\alpha$. Dus

(1) $\sin\alpha = \dfrac{\sin a}{\sin c}$.

Ook $OL = \cos c$, $OK = \cos a$ en $\frac{OL}{OK} = \cos b$.
(2) Dus $\cos c = \cos a \cos b$.
Voor later gebruik merken we het volgende op:
$\cos\alpha = \frac{KL}{BL}$, $\tan b = \frac{KL}{LO}$ en $\tan c = \frac{BL}{LO}$, dus
(3) $\cos\alpha = \dfrac{\tan a}{\tan b}$,
$\tan\alpha = \frac{BK}{KL}$, $\tan a = \frac{BK}{KO}$ en $\sin b = \frac{KL}{KO}$, dus
(4) $\tan\alpha = \dfrac{\tan a}{\sin b}$.

We keren nu terug naar figuur 4. Uit M trekken we een boog van een grootcirkel MX waarbij X op NP of het verlengde daarvan ligt en $\angle NXM = 90°$. We noteren boog $MX = \Delta\lambda'$[11] en boog $PM = d$. Stel ϕ' is de geografische breedte van X, dan is boog $NX = 90° - \phi'$. We stellen $\Delta\phi' = \phi_P - \phi'$. We berekenen nu achtereenvolgens[12] $\Delta\lambda'$, ϕ', d en q door toepassing van (1), (2), (2) en (1):

(5) $\sin \Delta\lambda' = \sin \Delta\lambda \cos \phi_M$,

(6) $\sin \phi_M = \sin \phi' \cdot \cos \Delta\lambda'$,

$\Delta\phi' = \phi_P - \phi'$,

(7) $\cos d = \cos \Delta\lambda' \cos \Delta\phi'$,

(8) $\sin \Delta\lambda' = \sin q \sin d$.

In de situatie van figuur 4 ligt P westelijk van Mekka, en hoek q geeft de oostelijke afwijking van de qibla aan ten opzichte van het zuiden. Als P oostelijk van Mekka ligt (dit is bijvoorbeeld het geval voor Bagdad), blijven alle formules hetzelfde; q geeft nu de westelijke afwijking van de qibla van het zuiden aan. $\Delta\lambda$ wordt steeds als positief beschouwd (in de middeleeuwen rekende men niet met negatieve grootheden). Als $\phi_P < \phi'$, hetgeen bijvoorbeeld voor zuidelijk gelegen plaatsen in Soedan of Jemen kan voorkomen, bekeek men $\Delta\phi' = \phi' - \phi_P$; q wordt dan de afwijking van de qibla van het noordpunt van de horizon.

We vermelden hieronder alle hulpgrootheden en de uitkomst voor Bagdad, Cordoba en Utrecht (gebruik makend van moderne waarden van de plaatscoördinaten).

	Bagdad	Cordoba	Utrecht
ϕ	33° 20′	37° 53′	52° 6′
$\Delta\lambda$	4° 37′	44° 35′	34°42′
$\Delta\lambda'$	4° 18′	40° 47′	32° 0′
ϕ'	21° 30′	28° 51′	25° 31′
$\Delta\phi'$	11° 50′	9° 2′	26° 35′
d	12° 35′	41° 36′	40° 41′
q	20° 8′ W.	79° 41′ O.	54° 23′ O.

Qiblatabellen

Diverse middeleeuwse Islamitische wiskundigen hebben tabellen berekend, waarin de qibla voor elke ϕ_P en $\Delta\lambda$ eenvoudig kon worden afgelezen.
De oudste van deze tabellen zijn gebaseerd op eenvoudige benaderingsmethoden. Vanaf de twaalfde eeuw zijn er ook tabellen berekend die op de (veel ingewikkeldere) exacte methoden waren gebaseerd. De meest nauwkeurige hiervan is berekend door de veertiendeeeuwse astronoom al-Khalīlī uit Damascus. Al-Khalīlī geeft voor elke waarde van $|\Delta\lambda|$ tussen 1° tot 60° en voor elke gehele waarde van ϕ tussen 10° en 56° en daarbij ook nog voor $\phi = 33°\ 30'$ de bijbehorende waarde van q. Voor tussenliggende waarden kon de qibla met lineaire interpolatie worden gevonden.
De tabel bevat in totaal $60 \times 48 = 2880$ waarden. De meeste zijn correct, of wijken (door afrondfouten tijdens de berekening) hoogstens 1 of 2 boogminuten van de correcte waarden af. Om deze tabel met de hand uit te rekenen is een onvoorstelbare hoeveelheid rekenwerk nodig geweest.
We geven hieronder de waarden in de tabel van al-Khalīlī waarmee de qibla voor punten in Nederland kan worden gevonden (met daarbij de namen van tegenwoordige plaatsen die vlakbij die punten liggen).[13] We geven ook de fout (dat wil zeggen waarde in de tabel minus correcte waarde).

$\phi = 51°$:	$\Delta\lambda = 34°$	(Sittard)	$q = 54°\ 41'$	(fout: + 1′)
$\phi = 52°$:	$\Delta\lambda = 33°$	(Winterswijk)	$q = 52°\ 27'$	(fout: – 1′)
	$\Delta\lambda = 34°$	(Oosterbeek)	$q = 53°\ 41'$	(fout: – 1′)
	$\Delta\lambda = 35°$	(Oudewater)	$q = 54°\ 54'$	(fout: – 1′)
$\phi = 53°$:	$\Delta\lambda = 33°$	(Stadskanaal)	$q = 51°\ 30'$	(fout: – 2′)
	$\Delta\lambda = 34°$	(Joure)	$q = 52°\ 45'$	(fout: – 2′)
	$\Delta\lambda = 35°$	(Den Helder)	$q = 54°\ 0'$	(fout: + 2′)

De hoek q is hier steeds de afwijking van de qibla in oostelijke richting vanaf het zuidpunt van de horizon.

De zon als richtingaanwijzer naar Mekka

Een tabel voor de bepaling van de qibla kon pas gebruikt worden als de richting van het zuiden bekend was, maar de bepaling daarvan was weer een apart probleem. In de praktijk omzeilde men dit vaak door de qibla te koppelen aan de hoogte van de zon. De positie van de zon in de dierenriem kon elke dag gemakkelijk worden berekend[6], en hieruit kon men (door berekening of met behulp van het astrolabium)[14] de hoogte van de zon boven de horizon bepalen op het moment dat hij precies in de richting van Mekka staat. Die hoogte hangt natuurlijk af van de plaats waar de waarnemer zich bevindt, en de methode kan niet voor alle plaatsen op alle momenten gebruikt worden (zie hieronder, het voorbeeld van Utrecht).
Voor de belangrijkste steden in het Midden Oosten is de methode wel altijd bruikbaar, omdat de zon het hele jaar door boven de horizon is als hij in de richting van de qibla staat.
We geven nu in moderne notatie een gestroomlijnde beschrijving van een berekening, die in hoofdzaak al te vinden is[15] bij de uit Marrakesh afkomstige astronoom al-Marrākushī (dertiende eeuw). In figuur 6 zien we enkele boldriehoeken op de bovenste helft van de hemelbol.
H is de hemelnoordpool, P is het zenith van de plaats waar wij ons bevinden, Q is de richting van Mekka op

de horizon, S, O, W en N zijn het zuidpunt, het oostpunt, het westpunt en het noordpunt van de horizon.

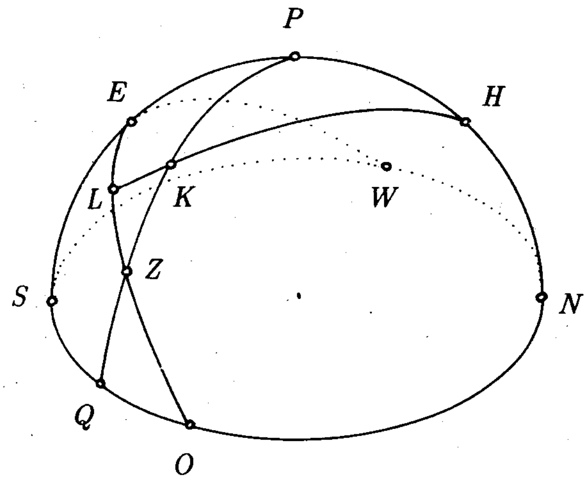

fig. 6

We trekken door O en W de hemelequator, die PS in E en PQ in Z snijdt. We noteren $h_0 = ZQ$. Nu zijn van driehoek PEZ de volgende elementen bekend: $\angle EPZ = q$, boog $PE = \phi_P$, de geografische breedte van de plaats waar wij ons bevinden, en $\angle PEZ = 90°$. We kunnen boog PZ uitrekenen met (3):

$$\cos\angle EPZ = \frac{\tan PE}{\tan PZ} .$$

Gevolg:[16]

$$(9) \quad \tan h_0 = \frac{\cos q}{\tan\phi_P} .$$

Als de declinatie van de zon 0° is, staat hij op de hemelequator, dus is h_0 de hoogte van de zon als hij in de richting van Mekka staat. Stel nu de declinatie van de zon is $\delta \neq 0$, en stel de zon staat in punt K als hij precies de richting van Mekka aangeeft. Dan ligt K op PQ. Trek uit H een grootcirkel door K, deze zal de hemelequator in een punt L loodrecht snijden. Nu is boog KL de declinatie δ. We noteren $\Delta h =$ boog KZ.

We kunnen Δh berekenen door twee maal de sinusregel (1) toe te passen:

$$\sin\angle PZE = \frac{\sin PE}{\sin PZ} = \frac{\sin KL}{\sin KZ} .$$

Hieruit volgt:

$$(10) \quad \frac{\sin\phi_P}{\cos h_0} = \frac{\sin\delta}{\sin\Delta h} .$$

De gevraagde hoogte van de zon is $h \pm \Delta h$. Het teken is + bij noordelijke declinatie, – bij zuidelijke declinatie van de zon.

Voor Utrecht geldt het volgende tabelletje:

data		declinatie zon	hoogte zon
21 dec.		23° 27′ Z	(onder de horizon)
21 jan.	21 nov.	20° 10′ Z	0° 57′
21 feb.	21 okt.	11° 29′ Z	11° 6′
21 mrt.	21 sept.	0°	24° 23′
21 apr.	21 aug.	11° 29′ N	37° 40′
21 mei	21 juli	20° 10′ N	47° 49′
21 juni		23° 27′ N	51° 43′

Deze informatie werd op slimme wijze vastgelegd op de achterkant van vele astrolabia.[17]

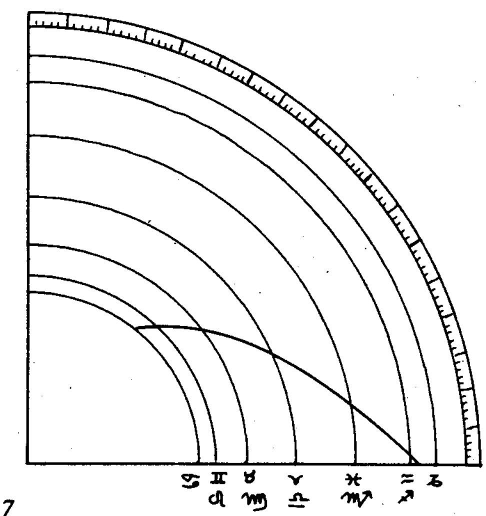

fig. 7

Op het rechter bovenkwadrant (figuur 7) werd een schaalverdeling (van 1 tot 90 graden) aangebracht, die gebruikt werd om de hoogte van de zon te meten. Vlak daarbinnen werden zeven concentrische cirkelbogen getekend;[18] hiervan is de binnenste cirkelboog voor zon in 0° Kreeft (langste dag); de een na binnenste voor de zon in 0° Tweelingen en 0° Leeuw, enzovoort, en de buitenste voor zon in 0° Steenbok (kortste dag). Op elke boog markeren we de hoogte van de zon op het moment dat hij in de richting van Mekka staat. Door deze punten te verbinden ontstaat een kromme lijn. Dit kan men voor verschillende plaatsen doen, en zo werden er op de achterkant van een astrolabium vaak een stel van deze lijnen gegraveerd.[19] Als men nu op een bepaalde dag de positie van de zon in de dierenriem weet, kan men op de lijn markeren hoe hoog de zon zal staan op het moment dat hij de richting van Mekka aangeeft. Men kan nu af en toe met het astrolabium de hoogte van de zon meten, totdat deze de gewenste hoogte heeft bereikt; de richting van de zon is dan de richting van Mekka.

Zo is een methode tot stand gekomen waarmee ook een leek op exacte manier, maar zonder veel wiskundige voorkennis 'in het veld' de qibla kan bepalen.
Tegenwoordig kan men de qibla exacter bepalen dan de middeleeuwse Islamitische geleerden, omdat (met behulp van geavanceerde landmeetkundige apparatuur, radar, satellieten, etc.) meer nauwkeurige waarden van de plaatscoördinaten kunnen worden gemeten.
De benodigde wiskunde is sinds de middeleeuwen niet wezenlijk veranderd. De bepaling van de qibla is een probleem dat door de middeleeuws Islamitische wiskundigen volledig is opgelost. Genoeg stof voor intercultureel wiskundeonderwijs, niet alleen voor mavo, maar ook voor havo en vwo!

Noten

[1] Dit betekent ook, dat men in één stad in verschillende moskeeën verschillende qiblas kan vinden.
[2] Deze methode houdt geen rekening met de bolvorm van de aarde, en dit kon tot problemen leiden voor plaatsen die veel noordelijker dan Mekka liggen. Bepaalde sterren uit de Grote Beer, die voor het bepalen van de richting gebruikt werden, gingen in Mekka wel op en onder, maar staan in het veel noordelijker gelegen Perzië altijd boven de horizon. Daarom werden ook meteorologische kenmerken gebruikt. Aangenomen werd, dat de vier meest voorkomende winden in Mekka frontaal tegen de zijden van de Kaaba bliezen. Perzië ligt in de zone tegenover de zijde van de Kaaba waar de noordoostenwind tegenaan blaast, dus wie in Perzië de qibla wil vinden, moet de noordoostenwind in de rug hebben, enz.
[3] Moderne metingen hebben aangetoond dat de korte as wijst naar het meest zuidelijke punt aan de westelijke horizon waar de maan op de kortste dag kan ondergaan.
[4] Niet precies, omdat de poolster niet precies in de hemelpool staat; wie preciezer wilde meten nam het gemiddelde van de minimale hoogte en de maximale hoogte van een willekeurige circumpolaire ster.
[5] Deze regel is een toepassing van formule (1) verderop in het artikel.
[6] Wie wel eens een horoscoop heeft gelezen, weet op welke dagen van het jaar de zon in welke tekens van de dierenriem staat. De zon staat aan het begin van de lente (21 maart) in 0° Ram, op dit punt is $\lambda = 0°$. Elk teken van de dierenriem heeft een lengte van 30°. Op 21 april staat de zon in 0° Stier, dan $\lambda = 30°$, op 21 Mei in 0° Tweelingen, dan $\lambda = 60°$ enz. De zon beweegt elke dag circa 1 graad, dus op 1 juni staat hij ongeveer in 11° Tweelingen ($\lambda = 71°$).
[7] Beide waarden worden opgegeven. Zie de beschrijving van Al-Bīrūnī (literatuurlijst) 178-180.
[8] Een zonsverduistering is hiervoor niet bruikbaar, omdat die op verschillende plaatsen op aarde op verschillende momenten plaatsvindt.
[9] Voor een gedetailleerde beschrijving van de methode en talrijke voorbeelden zie het in de literatuurlijst genoemde werk van Al-Bīrūnī, 120-191.
[10] In feite ligt de zaak nog iets ingewikkelder, omdat de middeleeuws Arabische tangens en sinus anders gedefinieerd zijn dan de onze, en daarom elk een constante factor van het moderne equivalent verschillen, maar het zou te ver voeren hier in detail in te gaan op de geschiedenis van de trigonometrie.
[11] In het Arabisch heet deze boog: de gecorrigeerde lengte.
[12] De methode kan worden vereenvoudigd; men kan bijvoorbeeld (7) en (8) vermijden door na (6) te gebruiken

$$\tan q = \frac{\tan\Delta\lambda'}{\sin\Delta\phi'}.$$

(Dit is een toepassing van (4)). Met (3) en (4) vindt men de volgende formule, die handig is voor computerberekeningen:

$$\tan q = \frac{\sin\Delta\lambda}{\sin\phi_P\cos\Delta\lambda - \cos\phi_P\tan\phi_M}.$$

[13] In de tabel van al-Khalīlī staat niet $\Delta\lambda$ maar de *lengte* zelf (waarbij de *lengte* van Mekka verondersteld wordt 67° te zijn).
[14] Zie Michel of mijn artikel *Occulte Wiskunde.*
[15] Zie de vertaling van Sédillot, I, Ch. 64.
[16] Hier heb ik de methode van Al-Marrākushī iets vereenvoudigd. Hij vermijdt namelijk in (9) het terugzoeken van h_0 in een tangenstabel door een hulphoek x in te voeren zodat $\sin q \cos \phi_P = \sin x$, dan $\cos h_0 \cos x = \sin \phi_P$.
[17] Zie mijn *Occulte wiskunde* voor een beschrijving van het astrolabium en verdere literatuur.
[18] De stralen zijn om traditionele redenen gelijk aan $c \cdot \tan(\frac{1}{2} \times (90° - \delta))$. Zie Michel p. 80.
[19] Deze zijn mooi te zien op het midden van de voorplaat van het boek van Berggren (de min of meer horizontale bundel door elkaar heen lopende lijnen).

Literatuur

Berggren, J.L. (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York, Springer.
Al-Bīrūnī (1967). *The determination of the coordinates of positions for the correction of distances between cities,* transl. from the Arabic by Jamil Ali, Beirut.
Brink, F.J. van der en M. Meeder (1991). Mekka. *Nieuwe Wiskrant 10* (1), 80-84.
Hogendijk, J.P. (1988). Occulte Wiskunde. *Nieuwe Wiskrant* 7 (3), 35-44.
Kennedy, E.S. and M. H. Kennedy (1987). *Geographical coordinates of localities from Islamic sources.*

Frankfurt am Main, Institut für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wissenschaften.

King, D.A. (1985). The sacred direction in Islam. A study of the interaction of religion and science in the Middle Ages. *Interdisciplinary science reviews 10*, 315-328.

King, D.A. (1975). Al-Khalīlī's Qibla table. *Journal of Near Eastern Studies 34*, 81-122. Herdrukt in: D.A. King (1986), *Islamic mathematical astronomy*. London, Variorum reprints.

King, D.A. (1986). The earliest Islamic mathematical methods and tables for finding the direction of Mecca. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften 3*, 82-149.

King, D.A. Science in the service of religion: the case of Islam. *Impact of science on society*, no. 159, 245-262.

Michel, H. (1947). *Traité de l'astrolabe*. Paris.

Sédillot, J.-J. et L.-A. Sédillot (1834). *Traité des instruments astronomiques des Arabes*. Paris, herdruk Frankfurt, Institut für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften. 1984.