Occulte Wiskunde

J. Hogendijk
Mathematisch Instituut, RU Utrecht

Dit artikel vormde een bijdrage aan het van der Blij-symposium.

De laatste jaren is er een toenemende belangstelling voor toepassingen van de wiskunde in de praktijk, en het ligt in de lijn dat er ook meèr aandacht komt voor de geschiedenis van dit onderwerp. Vandaag wil ik hieraan een kleine bijdrage leveren, door een aantal minder bekende toepassingen van de wiskunde te behandelen, in een tijdperk waarbij u misschien niet zozeer aan toepassingen denkt, namelijk de middeleeuwen.
Zolang de wiskunde bestaat zijn er al een aantal praktische toepassingen geweest, zoals rekenen, eenvoudige meetkundige constructies in de bouwkunst en het berekenen van afstanden, oppervlakten en inhouden. Vanaf de klassieke oudheid werd wiskunde ook op minder voor de hand liggende manier toegepast, in andere wetenschappen zoals astronomie en optica, maar ook in een meer praktische context.
In de middeleeuwen was de constructie van zonnewijzers zo'n praktische toepassing. Omvangrijker waren de toepassingen van de wiskunde op het terrein van de 'occulte wetenschappen' magie en astrologie. Deze toepassingen zijn om verschillende redenen historisch belangrijk geweest.

1. De astrologie hield een maatschappelijke vraag naar wiskunde (en astronomie) in stand, want de astroloog had tabellen en andere hulpmiddelen nodig, die door wiskundigen en astronomen moesten worden geleverd. Er is leuke wiskunde ontwikkeld met het oog op astrologische of magische toepassingen, hiervan volgen straks voorbeelden.
2. De astroloog had zelf enige kennis van wiskunde en dus enig wiskunde-onderwijs nodig.
3. De astrologie en magie waren twee manieren waardoor wiskundige resultaten en berekeningen zichtbaar werden bij een groot publiek, en zo heeft vooral de astrologie het beeld van de wiskunde bij de buitenwacht beïnvloed.

Over het historisch belang van astrologie en magie wordt in de standaard leerboeken over geschiedenis van de wiskunde weinig gezegd. Misschien komt dit doordat de meeste astrologische en magische ideeën niet passen in het moderne natuurwetenschappelijk wereldbeeld. Daarbij wordt vaak vergeten, dat zulke ideeën meestal wel een interne logica hebben, en dat ze binnen het wereldbeeld van hun tijd heel begrijpelijk zijn. Dit zal straks in het geval van de astrologie nader worden toegelicht.
Magische en astrologische toepassingen van de wiskunde begonnen in de late oudheid op bescheiden schaal, en werden in de middeleeuwen over zeer veel landen en culturen verspreid, waarvan de Islamitische wereld en middeleeuws Europa (vanaf ca. 1100) de belangrijkste zijn. Ook na de middeleeuwen zijn er in elk geval astrologische toepassingen van de wiskunde, maar dit valt buiten het kader van deze lezing.

Magische vierkanten

Volgens de Pythagoreeërs (ca. 500 v. Chr.) waren (natuurlijke) getallen de essenties van alle dingen. Als we dit combineren met het idee, dat een verwantschap een onderlinge aantrekking met zich mee brengt, dan ligt het voor de hand, aan getallen een magische werking toe te kennen. In de vroege middeleeuwen is de gedachte ontstaan, dat van bepaalde configuraties getallen, namelijk magische vierkanten, een nog sterkere werking uitgaat. Het is mogelijk dat magische vierkanten voor het eerst in het voorislamitische Perzië (omstreeks 600) zijn gebruikt, want volgens de legende namen de Perzische koningen vaandels met magische vierkanten mee in veldslagen. [1] Misschien vindt u dit geen toepassing van de wiskunde, omdat u niet in de werking van een vaandel met een magisch vierkant gelooft. Hier gaat het er echter om dat deze koningen er (al-

thans volgens de legende) wel in geloofden.
Een magisch vierkant is een vierkant in n × n vakjes verdeeld, met in elk vakje precies een van de getallen 1 t/m n^2, zodat de som van de getallen in elke rij, in elke kolom, en in elke diagonaal gelijk is aan een vast getal M(n), dat we de magische constante zullen noemen. Er geldt:

$$M(n) = (\tfrac{1}{2})n\,(n^2 + 1).$$

Magische vierkanten waren in de middeleeuwen een internationaal onderwerp, en er zijn vele magische vierkanten bewaard gebleven, in teksten en op amuletten. Ook zijn er in de middeleeuwen algemene methodes gevonden om magische vierkanten te construeren.
Vaak begon men met een vierkant waarin de getallen 1,..., n^2 op volgorde staan, zoals in Figuur 1 voor n = 5 (merk op M(5) = 65).

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20
21	22	23	24	25

Fig. 1

De som van de getallen op de middelste rij en kolom is 65, zoals vereist. Ook is de som van de getallen op elke diagonaal al 65.
We voeren nu de term 'onechte diagonaal' in voor een systeem van twee lijnen beide evenwijdig aan één diagonaal, zo dat op die twee lijnen samen 5 getallen staan (voorbeelden: 3-9-15 gecombineerd met 16-22; 4-8-12-16 gecombineerd met 25). Het blijkt dat de som van de vijf getallen op elke onechte diagonaal ook 65 is. We hebben dus som 65 voor twee echte en acht onechte diagonalen, en voor één rij en één kolom, totaal dus twaalf maal.
Bij een magisch vierkant moet de som 65 zijn voor tien rijen en kolommen, en voor twee diagonalen, dus ook twaalf maal.
Zouden we van de middelste rij en kolom in Fig. 1 diagonalen kunnen maken, en van de (echte en onechte) diagonalen rijen en kolommen?
Het antwoord wordt gegeven in Figuur 2. Hier is in het oude vierkant een nieuw vierkant met 25 vakjes getekend.

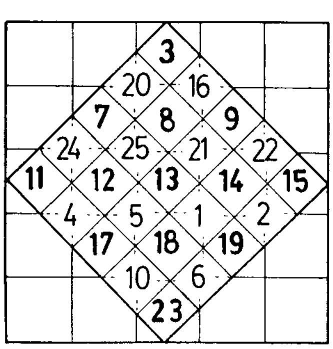

Fig. 2

De getallen die al in het nieuwe vierkant staan laten we op hun plaats, en de driehoeken buiten het nieuwe vierkant verplaatsen we zodat de basis van elke driehoek op de tegenovergestelde zijde van het nieuwe vierkant komt te liggen. De middelste rij en kolom van het oude vierkant zijn de diagonalen van het nieuwe vierkant, en de echte en onechte diagonalen van het oude vierkant worden zo de rijen en kolommen van het nieuwe vierkant. Het nieuwe vierkant is dus een magisch vierkant.
Deze methode, die gebruikt kan worden voor willekeurige oneven n, werd tot voor kort toegeschreven aan de Franse wiskundige Bachet de Méziriac (1624). De bekende historicus van de wiskunde J. Sesiano heeft echter in Istanbul een middeleeuws Arabisch handschrift ontdekt, waarin dezelfde methode wordt behandeld met een bewijs van de beroemde geleerde Alhazen (ca. 1000). [2] Voor n = 3 schijnt de methode (met de vakjes) ook beschreven te worden in een Chinees werk uit de tiende eeuw. [3]

Bij de meeste bewaarde magische vierkanten worden de auteur en de vindmethode niet gegeven; dit is geen grote verrassing, omdat (net als tegenwoordig) de gebruiker zich vooral voor het resultaat interesseert.
Een aardig voorbeeld hiervan is een reeks van magische vierkanten in de 'brieven van de Broeders der Zuiverheid', een tiende-eeuwse mystieke groepering uit Basra (Irak). [4]
De broeders geven zeven vierkanten, met afmetingen 3 × 3, 4 × 4 enzovoort, tot 9 × 9. In Figuur 3 (links) zien we het 5 × 5-vierkant uit de serie. Het is een aardig puzzeltje na te gaan hoe dit vierkant gevonden zou kunnen zijn. We zouden aan de volgende manier kunnen denken: [5]

21	**3**	**4**	12	25
15	17	**6**	19	**8**
10	24	13	2	16
18	7	**20**	9	11
1	14	**22**	**23**	5

21	4	3	**12**	25
15	17	8	19	6
10	**24**	13	**2**	**16**
20	7	18	9	**11**
1	**14**	23	22	5

21	4	3	2	**25**
10	**17**	8	**19**	6
15	14	**13**	12	11
20	**7**	18	**9**	16
1	24	23	22	**5**

Fig. 3

We beginnen met een vierkant met de getallen 1 t/m 25 in de Arabische volgorde, van rechts naar links. Als we de diagonalen spiegelen ten opzichte van het 'punt' 13, krijgen we Figuur 3 (rechts), met rijensommen 55, 60, 65, 70, 75, en kolommensommen 67, 66, 65, 64, 63; de som van de getallen op elke diagonaal blijft 65. Door in vier kolommen twee getallen te verwisselen kunnen we alle rijensommen 65 maken, terwijl de kolommensommen dan gelijk (en dus dicht bij 65) blijven, als in Figuur 3 (midden). Door tot slot in vier rijen twee getallen te verwisselen, krijgen we het gevraagde vierkant met rij- en kolommensommen 65.
De werking van een n bij n-vierkant hing samen met het getal n, en werd vaak gekoppeld aan astrologie; van de reeks van 7 vierkanten van de Broeders hoorde het 3 × 3-vierkant bij Saturnus, het 4 × 4-vierkant bij Jupiter, en zo verder tot het 9 × 9-vierkant dat bij de maan hoorde, en dat extra werkzaam was bij bepaalde standen van de maan, namelijk als de maan in het negende huis staat (wat dat is wordt straks uitgelegd).
Om zelf nog wat te puzzelen geven we in Figuur 4 een 8 × 8 magisch vierkant uit een reeks van zeven vierkanten in een tekst die (waarschijnlijk ten onrechte) wordt toege-

schreven aan Paracelsus (1493-1541); dit vierkant hoort bij Mercurius. De opdracht is na te gaan hoe het gevormd is, en de methode te generaliseren voor 4n × 4n-vierkanten. Men kan de oplossing eventueel nalezen in een Griekse tekst van de Byzantijnse geleerde Manuel Moschopulos [6] (ca. 1265-1315) en ook in het door Sesiano ontdekte Arabische handschrift.

8	58	59	5	4	62	63	1
49	15	14	52	53	11	10	56
41	23	22	44	45	19	18	48
32	34	35	29	28	38	39	25
40	26	27	37	36	30	31	33
17	47	46	20	21	43	42	24
9	55	54	12	13	51	50	16
64	2	3	61	60	6	7	57

Fig. 4

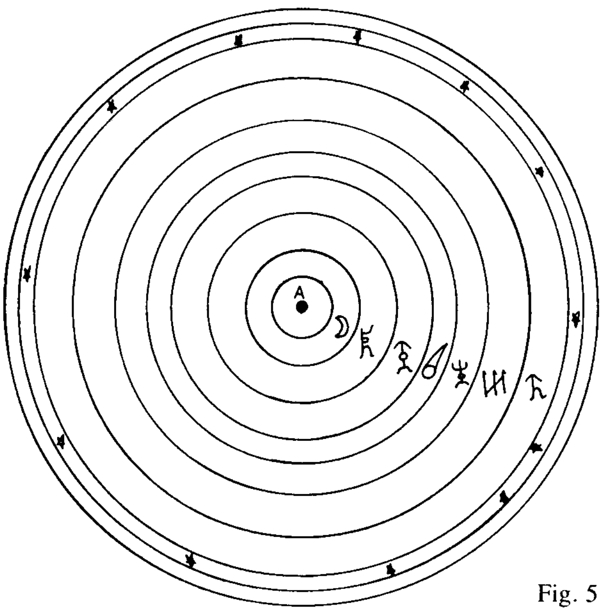

Fig. 5

In de middeleeuwen werd verschillend gedacht over het nut van magische vierkanten, en het lijkt mij, dat (de overigens nogal rationalistische) Alhazen van de methode van Figuur 2 zich vooral voor de wiskundige aspecten interesseerde. Ook na de middeleeuwen ondervonden velen de wiskundige betovering van magische vierkanten; zo schreef de beroemde wiskundige P. de Fermat in 1641 dat hij magische vierkanten één van de mooiste onderwerpen in de getallenleer vond.

Astrologie

Astrologie had in de eerste plaats met wiskunde te maken via de astronomie. Dat de astrologie een hoofddoel van de middeleeuwse astronomie was, wordt duidelijk als we middeleeuwse astronomische handboeken bekijken, deze bevatten bijna altijd hoofdstukken over astrologie. Belangrijke gedeelten van de middeleeuwse astronomie (bijvoorbeeld de theorieën voor Mercurius, Venus, Mars, Jupiter en Saturnus) hadden eigenlijk alleen een astrologische toepassing. Voor deze theorieën was ingewikkelde wiskunde nodig, en daarom had de astrologie een belangrijke indirecte relatie met de wiskunde. Maar er zijn ook directe verbanden tussen middeleeuwse astrologie en wiskunde. Astrologie stond namelijk in direct verband met de boldriehoeksmeetkunde, een gebied waarin in de middeleeuwen belangrijke nieuwe ontwikkelingen plaatsvonden. We zullen hiervan straks voorbeelden geven, maar we beginnen met een zeer schetsmatige inleiding over de middeleeuwse astrologie.
De astrologie kon gemakkelijk worden ingepast in het wereldbeeld van Ptolemaeus (omstreeks 150 n. Chr.), dat in de middeleeuwen domineerde. Ptolemaeus zelf was trouwens ook de auteur van een leerboek over de astrologie, de zgn. Tetrabiblos ('vier boeken'). [7]
In het Ptolemaeisch wereldbeeld werd de aarde, het middelpunt van het heelal, omringd door negen sferen: van de maan, Mercurius, Venus, Zon, Mars, Jupiter, Saturnus, de vaste sterren, en een buitenste sfeer. Figuur 5 is een schematische weergave met middeleeuwse symbolen voor de planeten. Het was bekend dat de afstand van de planeten (inclusief zon en maan) tot de aarde varieerde, en men nam aan dat elke planeetsfeer bestond uit de bol met straal de maximumafstand van die planeet, waaruit de bol met straal de minimumafstand van die planeet was weggenomen. De zeven binnenste planeetsferen (tot en met de Saturnussfeer) waren daarom tamelijk dikke bolschillen, die elk een systeem van andere bolschillen en bollen bevatten. Al deze onderdelen voerden elk een eenparige rotatie uit, en deze bewegingen veroorzaakten samen de schijnbaar veranderlijke bewegingen van de zon, maan en planeten. De schillen en bollen bestonden uit een onveranderlijke doorzichtige 'etherische' substantie, die essentieel anders was dan de aardse materie. Alleen onder de maansfeer (in het 'ondermaanse') kon verandering plaatsvinden, alles in de maansfeer en daarboven was onveranderlijk en eeuwig.
In de astrologie werd aangenomen dat de posities en bewegingen van de hemellichamen (of: hemelsferen) samenhangen met gebeurtenissen op aarde, hierbij inbegrepen karakter en lotgevallen van personen en van volkeren. Sommige astrologen namen aan dat van de planeten zelf geen invloed uitgaat, en dat er alleen een analogie is tussen planeetstanden en gebeurtenissen op aarde. Anderen geloofden dat de planeten als ze ver van de aarde afstonden energie uit hogere sferen opnamen, en dat die energie weer doorgegeven werd als de planeten dichtbij de aarde stonden. In deze opvatting is er wel sprake van invloed van de planeten. Een algemeen argument voor de astrologie was het feit dat sommige bewegingen van de hemelsferen aantoonbaar een zeer sterke invloed hebben op de aarde. Zo is de dagelijkse beweging van het universum oorzaak van dag en nacht, de jaarlijkse beweging van de zon staat in verband met de seizoenen, en de beweging van de maan heeft te maken met de getijden. Hierdoor wordt volgens de astrologen aangetoond dat invloed van de hemelsferen op de aarde mogelijk is. Vanzelfsprekend hoefde deze invloed niet beperkt te blijven tot de maan en de zon. Sommigen concludeerden zelfs, dat de bewegingen van de hemelsferen de oorzaak zijn van alle verandering op aarde.
In principe poogde men het astrologische karakter van elke

planeet en van elk teken van de dierenriem enz. empirisch te bepalen, dat wil zeggen door onderzoek van gebeurtenissen op aarde. In de praktijk was de empirische basis uiteraard zeer wankel, omdat theoretische vooronderstellingen bij elke conclusie een cruciale rol speelden. Dit feit was natuurlijk niet onbekend, en het verklaart voor een deel de dubbelzinnige houding van sommige middeleeuwse wiskundigen en astronomen ten opzichte van de astrologie. Er werden ook andere bezwaren tegen de astrologie geformuleerd. Een aantal theologen argumenteerde dat de astrologie op gespannen voet staat met de almacht van God. Anderen stelden, dat de invloed van planeten in principe mogelijk was, maar dat er daarnaast nog zoveel andere invloeden zijn, dat de astrologische invloeden niet nauwkeurig geïdentificeerd kunnen worden. [8]
Deze bezwaren (en ook het feit dat de voorspellingen regelmatig niet uitkwamen) namen niet weg, dat de astrologie uitgebreid beoefend werd en vele aanhangers had, ook onder wiskundigen en astronomen.

De ascendant en het astrolabium

De astrologen namen aan dat de hemellichamen op het moment van de geboorte van een baby in verband staat met de persoon of de toekomstige lotgevallen van die baby. De achterliggende theorie was, dat het geboortemoment in verband stond met het moment van conceptie, waarop de vormende krachten van de planeten zeer werkzaam waren. (Het moment van conceptie kon volgens sommige astrologen zelfs berekend worden met behulp van de 'regel van Hermes', die zegt dat de maanstand op het geboortemoment gelijk is aan de ascendant op het moment van conceptie, en dat de ascendant bij de geboorte gelijk is aan de maanstand op het moment van conceptie.)
De ascendant is het punt van de dierenriem dat aan de Oostelijke horizon opkomt, en het zal duidelijk zijn dat dit begrip in de hele astrologie een sleutelrol speelde. De astroloog moest in staat zijn, op ieder ogenblik de ascendant te bepalen, en dit werd vaak met een astrolabium gedaan.
Het astrolabium is een zeer interessant instrument, dat nu zal worden uitgelegd. Hiertoe zullen eerst een aantal begrippen op middeleeuwse manier in herinnering worden geroepen. We stellen ons in de positie van een waarnemer in de gematigde of subtropische streken op het Noordelijk halfrond (Figuur 6, links).

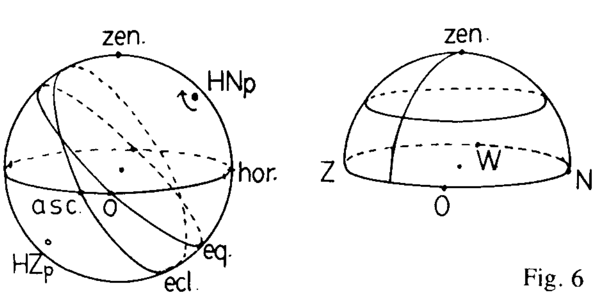

Fig. 6

De hemelbol is de buitenste sfeer in het Ptolemaeisch heelal. Omdat de aardstraal verwaarloosbaar klein is in verhouding tot de afstand tot de vaste sterren kunnen we aannemen dat de waarnemer het middelpunt van de hemelbol is. Elke waarnemer ziet de helft van de hemelbol begrensd door zijn horizon. De straal van de hemelbol is eigenlijk de afstand van de waarnemer tot de buitenste sfeer, maar in feite doet de straal er niet toe; voor alle berekeningen stelde men de straal op 60, en zo kon de hemelbol zonder dat iemand het merkte willekeurig worden verkleind.
De *hemelnoordpool* is het punt op de hemelbol boven de horizon dat in rust is, alle andere sterren draaien eens per etmaal om de hemelas door hemelnoordpool en waarnemer.
Het vlak door de waarnemer loodrecht op de hemelas snijdt de hemelbol in de *hemelequator*, en de hemelas snijdt de hemelbol onder de horizon in de *hemelzuidpool*.
De *ecliptica* (dierenriem) is de projectie van de baan die de zon in een jaar doorloopt; dit is een cirkel op de hemelbol die een hoek $\varepsilon \approx 23°30'$ met de hemelequator maakt. In de middeleeuwen was bekend dat de positie van de ecliptica ten opzichte van de vaste sterren zeer langzaam verandert. (Of om het precies te zeggen: de ecliptica is in de buitenste negende sfeer, die eens per etmaal om de aarde beweegt, en de vaste sterren en ook de hemelpool zijn in de achtste sfeer, die uiterst langzaam beweegt ten opzichte van de negende sfeer. In de praktijk kan die langzame beweging worden verwaarloosd.) De ecliptica wordt verdeeld in 12 tekens ter lengte van 30°: Ram, Stier, Tweelingen, enz. te beginnen bij het lentepunt, dat is het punt waar de zon de hemelequator passeert en van het zuidelijk naar het noordelijke deel van de hemelbol overgaat.
Zoals gezegd draait de hemelbol (in middeleeuwse ogen!) ten opzichte van de waarnemer één keer per etmaal rond. Dit neemt niet weg, dat we op de hemelbol een coördinatensysteem kunnen definiëren dat vast is ten opzichte van de waarnemer, en waarin elk punt wordt bepaald door hoogte en windrichting. Op de hemelbol kunnen we een netwerk aanbrengen bestaande uit cirkels van gelijke hoogte, allemaal evenwijdig aan de horizon, en cirkelbogen van (gelijke) windrichting (Arabisch: dawā'ir al-sumūt, en dus 'azimuthale cirkels'), die allemaal door het 'zenith' gaan (van Arabisch: samt al-ra's, de richting van het hoofd). In Figuur 6 (rechts) is het gedeelte van de hemelbol boven de horizon met een hoogtecirkel en een azimuthale (kwart)cirkel getekend.
Het astrolabium is een instrument met als doel de dagelijkse draaiïng van de vaste sterren om de waarnemer te simuleren. Het bestaat uit een draaiend deel, het *spinneweb*, dat draait over een vast deel, de *plaat*. Figuur 9 en 10 zijn samen een bouwplaat van deze twee delen van een astrolabium. Deze zijn ontworpen met als voorbeeld een Jemenitisch astrolabium [9] uit 1291, maar de figuren zijn getekend voor een geografische breedte van ca. 50°, en met de huidige posities van de sterren. Ter vereenvoudiging zijn een aantal niet-essentiële delen weggelaten.
De plaat (Figuur 9) is een stereografische projectie van de horizon en een netwerk van de hoogtecirkels en de azimuthale cirkels, in Figuur 9 met intervallen van 10 graden, maar in middeleeuwse astrolabia vaak met kleinere intervallen. De pool van de projectie is de hemelzuidpool, het vlak van projectie wordt meestal gezegd het vlak van de hemelequator te zijn (hoewel dit niet essentieel is). Het midden van de plaat correspondeert dus met de hemelnoordpool. Geprojecteerd wordt het gedeelte van de hemel tussen de hemelnoordpool en de cirkel $\varepsilon°$ ten Zuiden van de hemelequator (die we steenbokskeerkring zouden kunnen noemen). De plaat hangt uiteraard af van de geografische breedte, en de meeste astrolabia werden geleverd met een setje uitneembare platen, voor een aantal verschillende plaatsen op aarde. De platen pasten in de *moeder*, die

Stereografische projectie (Figuur 7)

We beschouwen een vast punt P op een bol met middelpunt M, en een vlak V loodrecht op PM.
Elk punt A $\neq$ P op de bol wordt geprojecteerd op de doorsnede A′ van AP en V, evenzo wordt B geprojecteerd op B′.
Stereografische projectie heeft de volgende eigenschappen:

1. cirkels door P op de bol worden geprojecteerd op rechten, cirkels niet door P worden geprojecteerd op cirkels.
2. stereografische projectie is een conforme afbeelding: de hoek tussen twee cirkels op de bol is gelijk aan de hoek tussen hun projecties.

Eigenschap 1 was al bekend aan Hipparchûs (ca. 150 v. Chr.) die de stereografische projectie als eerste beschreef. Eigenschap 2 wordt in geen enkele bekende middeleeuwse tekst genoemd.
Een eenvoudig bewijs van eigenschap 1: Kies een cirkel op de bol, niet door P, en zodat het vlak van de cirkel niet door het middelpunt van de bol gaat. Noem ~~M~~ T de top van de kegel die de bol in de cirkel raakt. Kies een punt A op de cirkel, met projectie A′, en laat T′ de projectie van T zijn. Figuur 8 is de doorsnede van de bol met vlak ATP. QT′A′R is de doorsnede van V met vlak ATP; omdat V loodrecht op PM staat, geldt boog QP = boog PR. (Merk op dat M niet noodzakelijkerwijs in vlak ATP ligt.) Kies C op AP zodat TC // T′A′. Dan geldt

boog AP = boog AQ + boog PR, en dus
$<$TAP $= <$AA′Q $= <$ACT, zodat TA = TC.

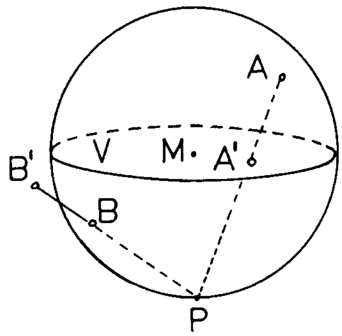

Fig. 7

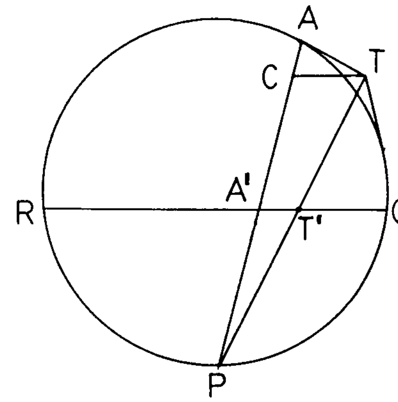

Fig. 8

Daarom T′A′/T′P = TC/TP = TA/TP. Hieruit volgt dat A′ op een cirkel ligt met middelpunt T′, en met straal bepaald door P, V, en de cirkel op de bol.
Doe zelf de gevallen: M in het vlak van de cirkel, en P op de cirkel.

bestond uit de rand met de verdeling in 360 graden en een achterwand. Het astrolabium werd opgehangen aan een *ring*, die aan de moeder verbonden werd door de *troon*, meestal een fraai metalen netwerk.
Het spinneweb (Figuur 10) (ook 'spin' genaamd) bestaat uit de stereografische projecties van heldere sterren en de ecliptica. De pool van projectie is weer de hemelzuidpool, het vlak van projectie de hemelequator. De projecties van de sterren vallen precies op de uiteinden van de 'puntjes', en de ecliptica is de buitenste rand van de cirkel. Het spinneweb werd vaak op zeer kunstzinnige manier gemaakt, met 'puntjes' in de vorm van sierlijke blaadjes. Op de ecliptica staan de tekens en een schaalverdeling in graden aangegeven.
Het midden van het spinneweb is ook de stereografische projectie van de hemelnoordpool. Wanneer het spinneweb daar draaibaar aan het midden van de plaat wordt bevestigd en met de wijzers van de klok mee wordt rondgedraaid, simuleren we de dagelijkse beweging van de hemel; de sterren gaan op in het Oosten (links van het midden), bereiken hun hoogste stand (in het midden), gaan onder in het Westen (rechts van het midden). Aan het spinneweb zit een wijzertje dat draait over de schaalverdeling in de moeder, en waarmee men kan aflezen over hoeveel graden de hemelbol wordt gedraaid. Deze schaalverdeling fungeert dus als tijdmeter; 1 graad komt overeen met 4 klokminuten.

We keren nu terug naar de bepaling van de ascendant. Als de geboorte 's nachts plaatsvond bepaalde de astroloog op het moment van de geboorte de hoogte van een heldere ster boven de horizon. Een instrument hiervoor was op de achterkant van de meeste astrolabia gemonteerd. Nemen we aan dat hij de hoogte van Spica meette, met als resultaat 20°. Dan draaide hij het spinneweb zodat het 'puntje' voor Spica op de hoogtecirkel voor 20° terecht kwam. (Hiervoor zijn twee mogelijkheden, want Spica kan boven de Oostelijke en de Westelijke horizon staan. Welk van de twee de juiste was, was meestal duidelijk; in een twijfelgeval kon altijd de hoogte van een tweede ster gemeten worden.) Het spinneweb geeft nu de positie van de hemel op het geboortemoment aan, en de ascendant kan direct worden afgelezen (op het getekende astrolabium komt er 20° Schorpioen; berekening levert 18° Schorpioen).
Overdag bepaalde de astroloog de hoogte van de zon. Hij zocht dan de positie van de zon op die dag op in een tabel, en bracht een merkje aan op de desbetreffende graad van de ecliptica op het spinneweb. (In gebieden met een zonnejaar (zoals het Christelijke Europa) kan de positie van de zon ook uit de datum worden benaderd, bijvoorbeeld op 13 mei staat de zon tegenwoordig altijd in ca. 23° Stier.)
Men kan met een astrolabium meer doen dan alleen de ascendant bepalen; als men de positie van de zon weet, en het spinneweb 's nachts heeft ingesteld, kan men door vooruit en achteruit te draaien vinden hoeveel tijd er sinds

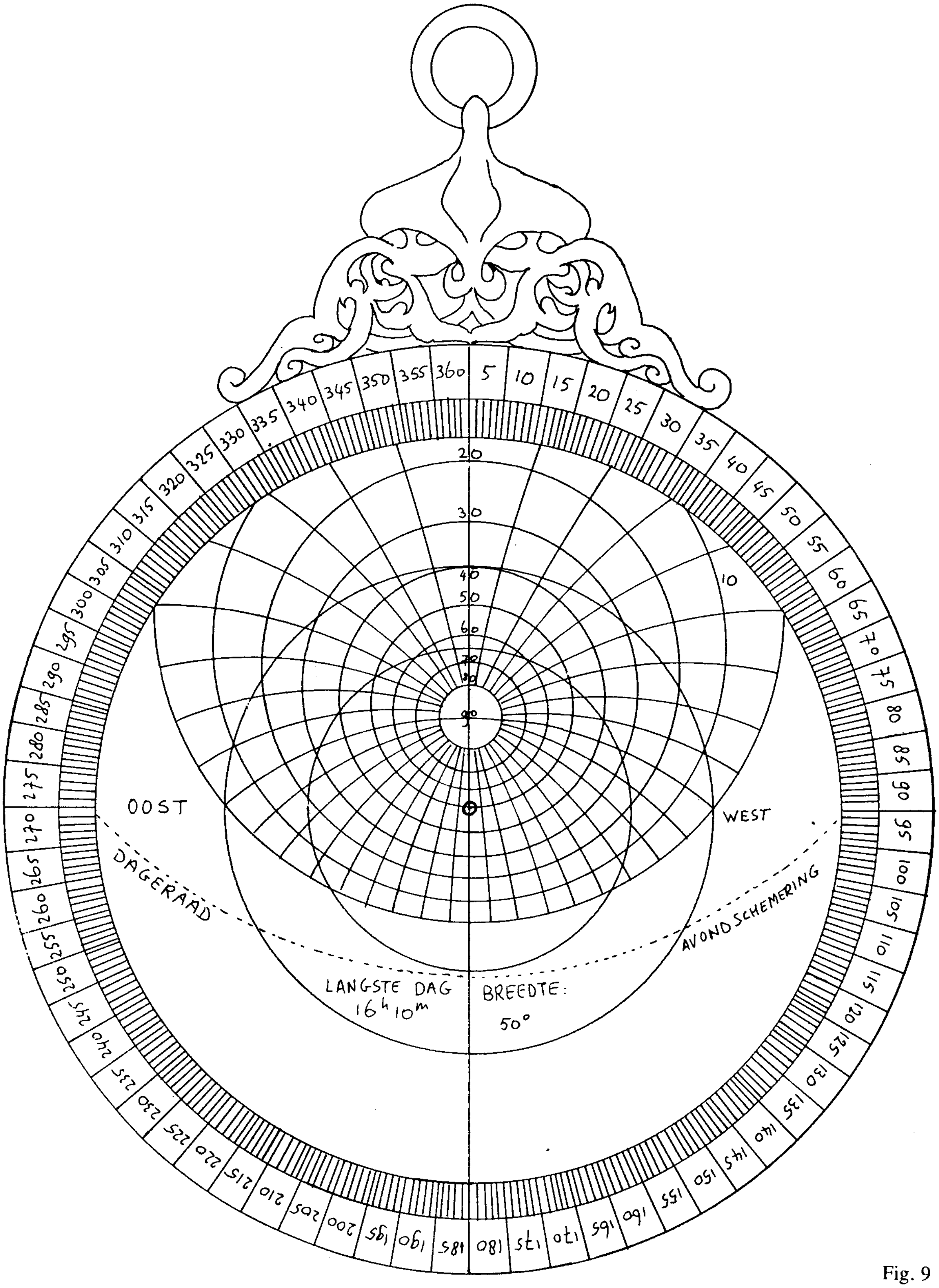
OOST
WEST
DAGERAAD
AVOND SCHEMERING
LANGSTE DAG
16h 10m
BREEDTE:
50°

Fig. 9

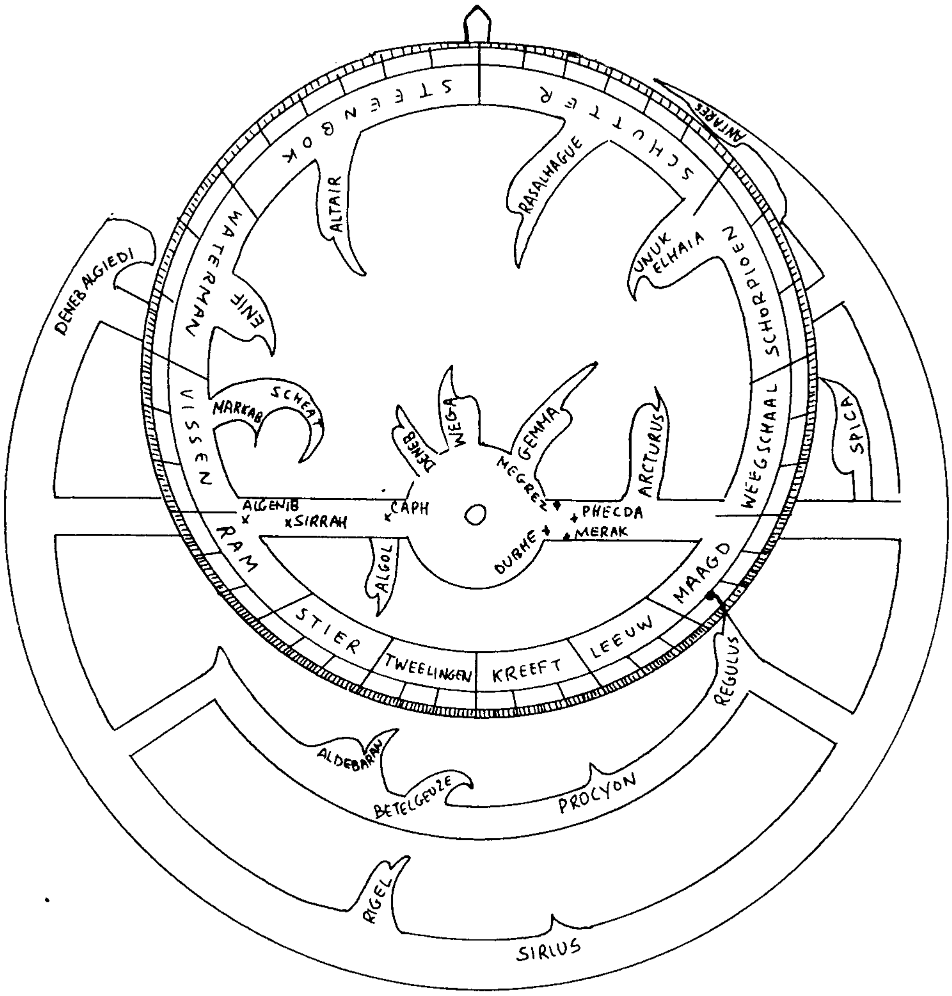

Fig. 10

Gebruiksaanwijzing bouwplaat

1. Fotokopieer Figuur 9, plak de kopie op een stuk dun karton, knip eventueel het gedeelte buiten de moeder, troon en ring weg.
2. Fotokopieer Figuur 10 op een stuk transparant, knip het gedeelte buiten de rand weg, *behalve* in de buurt van het wijzertje (tussen schutter en steenbok), laat hier een strookje van ca. 3 cm lang zitten, zodat het spinneweb een handvat krijgt.
3. Maak een gaatje in het rondje in het midden van Figuur 10, en ook in het rondje in het midden van Figuur 9 (let op! Niet in het gebied waar 90 staat). Bevestig nu Figuur 10 op Figuur 9 met behulp van bijvoorbeeld een splitpen.

zonsondergang is verstreken, of wanneer de dageraad zal beginnen (dit gebeurt als de zon 18° onder de horizon staat), en ook hoeveel uren er verstreken zijn sinds middernacht of het begin van de middag. Dit gegeven was nodig voor het uitrekenen van de precieze positie van de maan, het snelst bewegende hemellichaam. Ook werden er meestal op het onderste gedeelte van het astrolabium extra lijnen aangebracht waarmee men de tijd in burgerlijke uren kon bepalen (1 burgerlijk uur = $\frac{1}{12}$e deel van de periode tussen zonsopgang en zonsondergang). De astrologische toepassingen waren echter minstens even belangrijk. Dit blijkt onder meer uit het feit, dat op vele astrolabia de lege plekken op de achterkant met astrologische informatie zijn gevuld.
Het astrolabium is in de late oudheid ontwikkeld, eerst met alleen hoogtecirkels. De azumuthale cirkels zijn in de Islamitische traditie toegevoegd, en ook zijn toen tabellen berekend voor de nauwkeurige constructie van de diverse onderdelen. Door de hele middeleeuwen heen is het astrolabium zeer populair geweest, want het is een mooi en zeer gebruikersvriendelijk instrument, dat gemakkelijk te hanteren was ook door een astroloog met minimale wiskundige kennis en vaardigheid.
Ik heb goede ervaringen met het astrolabium in (moderne) onderwijssituaties, onder andere omdat er op allerlei niveaus mee kan worden gewerkt. Op een elementair niveau kan het gebruikt worden om de dagelijkse beweging van de sterren te illustreren, en om begrippen zoals projectie, hemelequator, hoogtecirkel en dierenriem uit te leggen. Op een hoger niveau kunnen leerlingen of studenten zich afvragen hoe een astrolabium geconstrueerd moet worden, en dit leidt vanzelf tot allerlei vragen over stereografische projectie en over het netwerk van cirkels op de plaat. Ook zal men zich moeten afvragen, hoe de verdeling in graden op de ecliptica geconstrueerd moet worden (hint: kijk waar rechten door de projectie van de pool van de ecliptica de ecliptica en de equator snijden). Bij het zelf construeren van een astrolabium (een plezierige bezigheid)

zal men de middelpunten en stralen van de diverse cirkels moeten berekenen met behulp van goniometrische functies. Het schoonheidsaspect en het historisch belang zorgen voor een voortdurende motivatie. [10]

Huizen

De ascendant was in de astrologie belangrijk onder meer omdat hij als onafhankelijke variabele optrad in een aantal andere astrologische functies. Ter inleiding hiervan volgt eerst een (onvolledige) lijst van de invloeden waarmee de astroloog werkte.
In de eerste plaats was er de stand van de planeten (inclusief zon en maan) in de tekens van de dierenriem. Elke planeet had speciale eigenschappen, en elk teken van de dierenriem ook, zodat er al vele mogelijke combinaties waren. Verder werd elk teken op onregelmatige manier in kleine deelintervallen verdeeld, die elk door een bepaalde planeet werden beheerst, en hierdoor nam het aantal combinaties nog aanzienlijk toe.
Ook was de stand van de hemellichamen ten opzichte van de horizon van de waarnemer van belang. Men verdeelde de hemel in vier kwadranten door middel van het vlak van de horizon en het vlak van de meridiaan (d.w.z. het vlak door het zenith en de hemelpolen). Deze vier kwadranten werden op hun beurt in drieën verdeeld, zodat in totaal 12 zogenaamde 'huizen' ontstonden. Elk huis had zijn eigen astrologische betekenis. De vraag was, hoe precies de grenzen van de drie huizen binnen een kwadrant moesten worden bepaald. [11] In Figuur 11 is vier keer het Oostelijke kwadrant van de hemel boven de horizon getekend. M is het snijpunt van de ecliptica met de meridiaan, Asc. is de ascendant, N het Noordpunt van de horizon en Z het zuidpunt. Het getoonde kwadrant bevat het tiende, elfde en twaalfde huis. Het tiende huis begon altijd in M. Voor het bepalen van de beginpunten van het elfde en twaalfde huis (in de figuur door 11 en 12 aangegeven) worden in middeleeuwse bronnen verschillende methoden beschreven, waaruit ik hier een selectie maak.
Het eenvoudigste lijkt misschien, de boog MAsc in drie gelijke delen te verdelen, als in Fig. 11 links boven. Volgens Al-Bīrūnī (ca. 1020) werd deze simpele methode in de oudheid gebruikt.

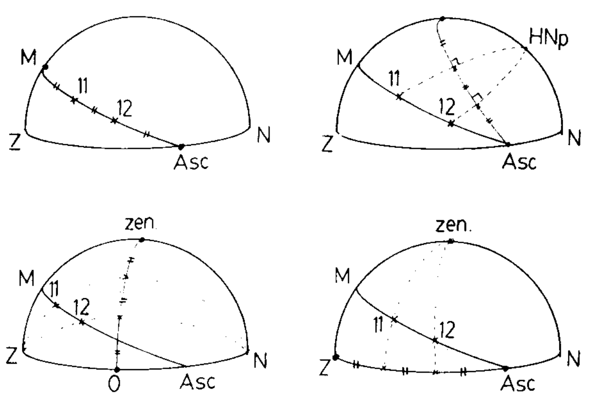

Fig. 11

Het meest gebruikte systeem was dat van Fig. 11 rechts boven. Men trekt door de ascendant een cirkel evenwijdig aan de hemelequator, verdeelt deze in drieën en trekt vanuit de hemelpool grootcirkels door de deelpunten. Er zijn uitgebreide huizentabellen bewaard die op dit systeem gebaseerd zijn, en waarin men de grenzen van de huizen kan aflezen als functie van de ascendant. Deze tabellen waren van de geografische breedte afhankelijk, en moesten dus voor elke breedte apart berekend worden door de wiskundigen.
Intuïtief ligt het misschien voor de hand elk kwadrant in drie gelijke partjes te verdelen zoals in Fig. 11 links onder. Dit systeem wordt inderdaad al door al-Bīrūnī beschreven, maar het schijnt in de middeleeuwen minder gebruikt te zijn, omdat de berekening gecompliceerd was.
De astronoom Habash (ca. 850) verdeelde de boog ZAsc in drie gelijke delen en trok cirkels door het zenith naar de deelpunten, zoals in Fig. 11 rechtsonder. [12]
Het is in ieder geval duidelijk dat er in de middeleeuwen een 'huizenprobleem' bestond.
Als de standen van planeten en huizen eenmaal bekend waren, kon de astroloog de horoscoop tekenen, dat is een diagram bestaande uit 12 vakjes (voor elk huis één) waarin de planeten werden gezet, met hun posities.
Zulke middeleeuwse horoscopen zijn uiterst waardevolle historische documenten. Een voorbeeld hiervan is een serie van 17 horoscopen in een astrologische 'wereldgeschiedenis' van de achtste-eeuwse Joodse astroloog Māshā'llāh, die bewaard is in een Arabisch verzamelwerk van de Christelijke astroloog Ibn Hinbintā (ca. 900). Uit onderzoek van E.S. Kennedy en D. Pingree is gebleken, dat deze horoscopen zijn berekend met behulp van methoden uit de (voorislamitische) Perzische astronomie, waarover verder praktisch niets bekend was. [13] Uit de horoscopen kunnen de Perzische methoden voor een groot deel gereconstrueerd worden. In dit voorbeeld komt het internationale karakter van de middeleeuwse astrologie goed naar voren.

Stralen en aspecten

Naast de stand van planeten in tekens èn huizen werd ook aandacht besteed aan speciale posities van planeten ten opzichte van elkaar. Men ging er van uit, dat een planeet stralen wierp naar een aantal punten op de ecliptica. Wanneer een andere planeet zich bevond in de buurt van zo'n punt, dan werd die andere planeet 'aangekeken' (Latijn: adspectus), vandaar dat men in zo'n geval spreekt van een aspect tussen de twee planeten.
Vaak werd aangenomen, dat elke planeet zeven stralen wierp; één naar het diametraal tegenoverliggende punt van de ecliptica, en drie paren van twee stralen, langs de zijden van een regelmatige zeshoek (sextiel aspect), vierkant (vierkant aspect) en gelijkzijdige driehoek (driehoeksaspect).

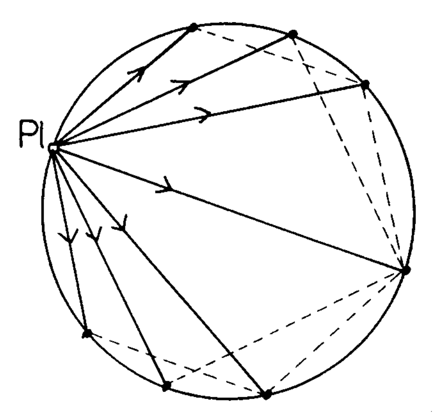

Fig. 12

Deze beschrijving suggereert dat men de positie van de zes stralen eenvoudig kon berekenen als aangegeven in Figuur 12, door bij de positie van de planeet 60°, 90°, 120° en 180° op te tellen, en er 60°, 90° en 120° van af te trekken.

Het blijkt dat er ook astrologen waren die aannamen dat de ascendant en de geografische breedte ook hier meespeelden. In een twaalfde-eeuwse Latijnse versie van een astronomisch handboek van Al-Khwārizmī (ca. 830, de beroemde wiskundige van wiens naam het woord 'algoritme' afgeleid is) is een reusachtige astrologische tabel bewaard gebleven voor de berekening van de aspecten voor de Spaanse stad Cordoba, met geografische breedte 38°30'. [14] De tabel bevat 2808 getallen, en hij is niet door Al-Khwārizmī berekend, maar waarschijnlijk door de Spaans-Islamitische astronoom Maslama van Madrid (Arabisch: al-Majrītī) omstreeks 1050. De tabel bestaat uit 72 delen, zie Figuur 13 voor het eerste deel.

Ascendant: 5° Ram breedte 38°30'

Sextiel 49°3' vierkant 73°34' driehoek 98°6'

	Ram Weegsch.	Stier Schorp.	Tweel. Boogsc.	Kreeft Steenb.	Leeuw Waterm.	Maagd Vissen
5°	2°58'	21°50'	45°20'	76°00'	106°32'	131°09
10°	5°56'	25°15'	49°50'	81°10'	111°43'	134°27'
15°	8°55'	28°50'	54°49'	86°13'	116°55'	138°29'
20°	11°53'	32°28'	60°10'	91°17'	120°11'	141°43'
25°	15°07'	36°33'	65°13'	96°06'	124°06'	143°46'
30°	18°25'	40°45'	70°35'	102°58'	127°49'	147°09'

Fig. 13

Het gebruik van de tabellen kan misschien het beste in een rekenvoorbeeld worden toegelicht.

Stel de ascendant is 5° Ram, stel Jupiter staat in 10° Tweelingen, en stel we willen berekenen met welke punten Jupiter een vierkant aspect maakt. In de tabel vinden we achter 10° Tweelingen het getal 49°50'. Hierbij tellen we de 73°34' voor 'vierkant' op, resultaat 123°24'. Dit zoeken we weer terug in de tabel, we vinden een waarde tussen 20° en 25° Leeuw, om precies te zijn 24°6'. Het andere vierkante aspect ligt precies tegenover het eerste, dus in 24°6' Waterman (we zouden het ook kunnen uitrekenen door 73°34' van 49°50' + 147°09' af te trekken en terug te zoeken).

De wiskundige structuur van deze tabel blijkt tamelijk ingewikkeld te zijn. [15] Het blijkt, dat Maslama van Madrid behoorde tot een groep astrologen, die aannamen dat de stralen en aspecten te maken hadden met de dagelijkse omwenteling van het universum om de aarde. De regelmatige zeshoek, het vierkant en de driehoek moesten daarom niet op de ecliptica worden gedacht, maar op de hemelequator. Om de 'stralen' van een planeet te vinden moest men te werk gaan als in het volgende voorbeeld (Figuur 14): projecteer de planeet P op de equator door middel van een cirkel door het noordpunt N en zuidpunt Z van de horizon; ga nu vanaf de projectie P* voor het sextiele aspect 60° verder (of terug) op de equator, naar Q*; projecteer Q* terug op de ecliptica naar Q, weer via een cirkel door N en Z. Q is dan het punt dat een sextiel aspect met P maakt.

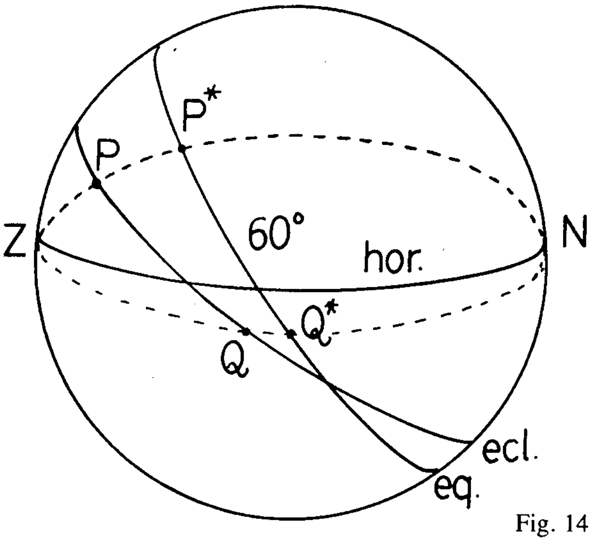

Fig. 14

Maslama van Madrid heeft zich ten doel gesteld de aspecten uit te rekenen voor alle posities van de ascendant (met intervallen van 5°), en voor elke positie van de planeet (met intervallen van 5°).

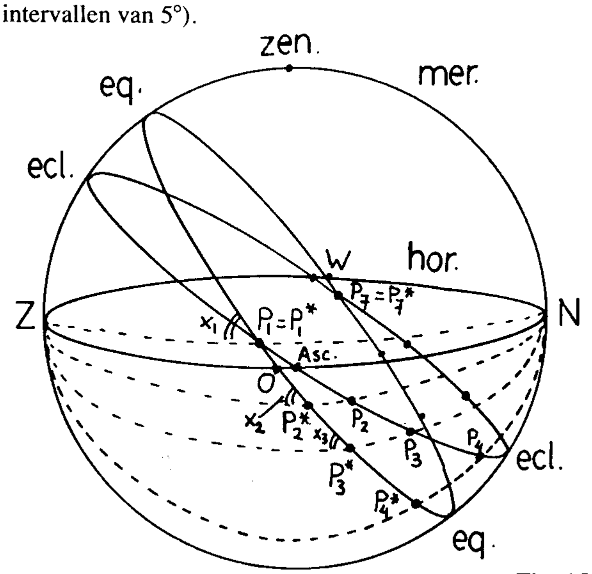

Fig. 15

We leggen zijn methode uit aan de hand van Figuur 15, getekend voor de ascendant 5° Ram. Op de ecliptica zijn P_1, P_2,..., de beginpunten van de tekens Ram, Stier enz. en P_1*, P_2* enz. zijn de projecties van deze punten op de hemelequator, langs cirkels door N en Z. O is het oostelijke punt van de horizon (een van de snijpunten van horizon en hemelequator). Maslama heeft eerst de hoeken x_1, x_2, enz. tussen de cirkels NP_1, NP_2 enz. en de equator berekend. Welke methode hij hiervoor gebruikt heeft is niet bekend; vast staat wel dat het een correcte methode geweest is. Dit is interessant omdat het probleem voor die tijd zeer ingewikkeld was. We zien hier een voorbeeld, waarin de astrologie te maken heeft met nieuwe ontwikkelingen in de wiskunde. Daarna benaderde Maslama boog $P_i{*}P_{i+1}{*}$ als de 'schuine klimming' van boog P_iP_{i+1} voor geografische breedte $90\text{-}x_i°$, zie Figuur 16, waarin A'B' de schuine klimming is van boog AB voor de geografische breedte 90-x° (AA' en BB' zijn bogen van grootcirkels). Hij gebruikte hiervoor waarschijnlijk standaard-tabellen voor schuine klimming, die in zijn tijd in omloop waren. Het resultaat was $P_1{*}P_2{*} \approx 18°25'$, $P_2{*}P_3{*} \approx 22°20'$, $P_3{*}P_4{*} \approx 29°50'$, enz. Door deze waarden te sommeren

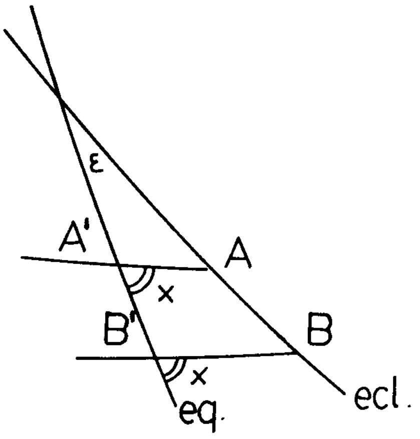

Fig. 16

vond hij de onderste waarden van de tabel in Figuur 13, en door slordige lineaire interpolatie de rest. (We moeten Maslama zijn slordigheid maar vergeven, want hij moest zo in totaal 2160 getallen uitrekenen.) De fouten in de benadering hebben een cumulatief effect; want Maslama vindt $P_1{*}P_2{*} + P_2{*}P_3{*} + \ldots + P_6{*}P_7{*} = 147°9'$ terwijl in werkelijkheid $P_1{*}P_7{*} = 180°$. Om de fouten te compenseren neemt Maslama als waarde voor het sectiele, vierkante en driehoek-aspect niet 60°, 90° en 120° maar $c/3$, $c/2$ en $2c/3$ met $c = 147°9'$. Het resultaat van zijn werk is de genoemde collectie van 72 tabellen, waarmee de astroloog op zeer eenvoudige manier een indrukwekkende en mysterieuze berekening kon uitvoeren.

Er zou nog zeer veel meer over wiskundige methoden in de middeleeuwse astrologie te vertellen zijn. Zo werden wiskundige methoden van dezelfde moeilijkheidsgraad bijvoorbeeld gebruikt bij het voorspellen van het precieze tijdstip waarop gebeurtenissen zullen plaatsvinden. De behandelde voorbeelden geven echter een goed beeld van de ingewikkeldheid en van het internationaal karakter van een merkwaardig hoofdstuk uit de geschiedenis van de toegepaste wiskunde.

Dit hoofdstuk is daarom ook merkwaardig omdat het gaat over intelligente mensen van 1000 jaar geleden, die in wezen dezelfde wiskunde gebruikten als wij, maar die een wereldbeeld hadden dat heel anders is dan het moderne, en die heel andere doelen nastreefden dan de moderne wetenschap. Deze geschiedenis herinnert ons aan het feit, dat het moderne wereldbeeld en de moderne wetenschap niet van nature gegeven zijn, maar onderdeel zijn van een historische ontwikkeling.

Noten

[1] E. Wiedemann. Zu den magischen Quadraten. *Der Islam* 8 (1918), 94-97. Herdruk in : E. Wiedemann. *Gesammelte Schriften zur arabisch-islamischen Wissenschaftsgeschichte*. Frankfurt 1984, 870-873.

[2] J. Sesiano. Herstellungsverfahren magischer Quadrate aus islamischer Zeit (I). *Sudhoffs Archiv* 64 (1980), 187-196.

[3] Vergelijk: Li Yan, Du Shiran. *Chinese mathematics, a concise history*. Oxford 1987, p. 96.

[4] H. Hermelink. Die ältesten magischen Quadrate höherer Ordnung und ihre Bildungsweise. *Sudhoffs Archiv* 42 (1958), 199-217. Een Duitse vertaling van de desbetreffende brief (over meetkunde) met weglating van de meeste magische vierkanten is in: F. Dieterici. *Die Propaedeutik der Araber im 10. Jahrhundert*. Berlin 1865 (Herdrukt in: F. Dieterici. *Die Philosophie bei den Arabern im X. Jahrhundert n. Chr.* Hildesheim 1969, deel 3).

[5] Deze verklaring is een uitwerking van de verklaring in: H. Hermelink. *Arabische magische Quadrate mit 25 Zellen*. Sudhoffs Archiv 43 (1959), 351-354.

[6] Zie voor deze alinea: S. Günther. *Vermischte Untersuchungen zur Geschichte der mathematischen Wissenschaften*. Leipzig 1876 (Herdruk: Wiesbaden 1968), pp. 193-217 en noot 2.

[7] Zie voor een didaktische uiteenzetting van de astronomie en wereldbeeld van Ptolemaeus: O. Pedersen. *A survey of the Almagest*. Odense 1974. Voor de astrologische ideeën van Ptolemaeus zie de Engelse vertaling van de *Tetrabiblos* in: Ptolemy. *Tetrabiblos*, ed. and trl. F.E. Robbins. Cambridge – London 1980 (Loeb Classical Library nr. 435).

[8] Voor een middeleeuwse Islamitische discussie over de waarde van de astrologie zie J. Kraemer, *Humanism*, p. 151. Ik dank deze verwijzing aan Dr. Remke Kruk (Oosterse Talen, Utrecht).

[9] Zie voor alle details en foto's: D.A. King. The medieval Yemeni astrolabe in the Metropolitan Museum of Art in New York City. *Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften* 2 (1985), 99-122. Herdruk in: D.A. King, Islamic astronomical instruments. London 1987.

[10] Aanbevolen literatuur over het astrolabium: H. Michel, *Traité de l'astrolabe*, Paris 1947 (gedegen); R.T. Gunther, *Astrolabes of the world*, Oxford 1932, 2 delen (Herdruk: London 1976) (veel platen); W. Hartner. The principle and use of the astrolabe, in: W. Hartner. *Oriens-Occidens* (Hildesheim 1968), 287-311. Voor verdere verwijzingen zie de literatuurlijst in D.A. King, *Islamic astronomical instruments*, London 1987, pp. 19-20. Kant en klare bouwpakketten voor astrolabia worden verkocht in het National Maritime Museum, Greenwich (bij London), maar het is ook plezierig en leerzaam zelf een astrolabium te construeren.

[11] Zie over dit onderwerp J. North, *Horoscopes and history*. London 1986. Er waren ook speciale platen op het astrolabium voor de constructie van de huizen volgens verschillende systemen, zie North pp. 56-66.

[12] Zie M. Debarnot. *Al-Biruni, Clés d'astronomie*. Damascus 1985, pp. 280-282.

[13] E.S. Kennedy, D. Pingree. *The astrological history of Māshā'llāh*. Cambridge (Mass.) 1971.

[14] De tabel is afgedrukt in: H. Suter. *Die astronomischen Tafeln des Muhammad ibn Musa al-Khwarizmi in der bearbeitung des Maslama ibn Ahmed al-Madjriti und der latein. Übersetzung des Athelard von Bath*. Kopenhagen 1914, pp. 206-229. Herdruk in: H. Suter. *Beiträge zur Geschichte der Mathematik und Astronomie im Islam*. Frankfurt 1986, deel 1, pp. 704-727.

[15] De details zullen worden gepubliceerd in J.P. Hogendijk, The mathematical structure of two Islamic astrological tables for 'casting the rays', voorgelegd aan *Centaurus*.