Pythagoras en de wiskunde

Dr. Jan Hogendijk

Wiskunde is veel ouder dan de meeste andere vakken die aan de Utrechtse universiteit worden onderwezen. Toen omstreeks 3200 voor Christus in Zuid-Iran het oudste spijkerschrift ontstond, was er al een notatie voor getallen. In het jaar 2000 *voor* Christus leerden de studenten aan de tempels in Irak een hoogontwikkelde wiskunde. Ze moesten bijvoorbeeld stelsels vergelijkingen kunnen oplossen, zoals $xy = 600$, $(3x+2y)^2+2\cdot\frac{1}{13}(4(\frac{1}{7}((x+y)-1\frac{1}{2}(x-y)))^2+(x+y)^2) = 17300$. Dit voorbeeld komt van een oefentablet uit die tijd, de notatie was toen natuurlijk anders dan nu. Om dit soort problemen op te lossen leerden de studenten regels die lijken op de moderne abc-formule. Er waren niet alleen regels, maar ook redeneringen. Ter illustratie een redenering in de stijl van de Babyloniërs om aan te tonen wat later de Stelling van Pythagoras zou worden genoemd. (De stelling was toen bekend; de redenering is niet teruggevonden, maar lijkt op andere wiskundige redeneringen die uit die tijd bekend zijn.)

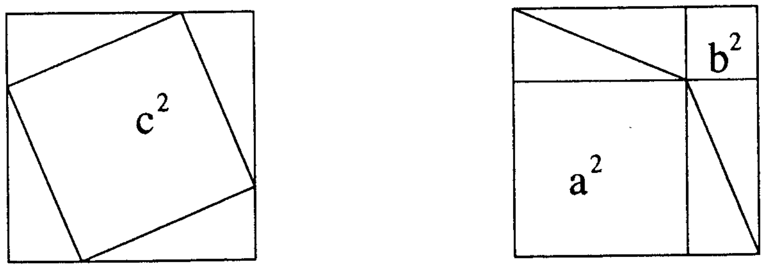
Teken vier rechthoekige driehoeken met zijden a en b en schuine zijde c. Die vier driehoeken met een vierkant met zijde c kunnen we als in Figuur 1, links, als een groot vierkant met zijden $a+b$ leggen. Maar we kunnen zo'n vierkant ook leggen uit de vier driehoeken en vierkanten met zijde a en zijde b, zie Figuur 1, rechts. Conclusie: $c^2 = a^2 + b^2$.

Met de praktijk had dit allemaal niet veel te maken, wiskunde was schoolvak en intellectuele bezigheid.

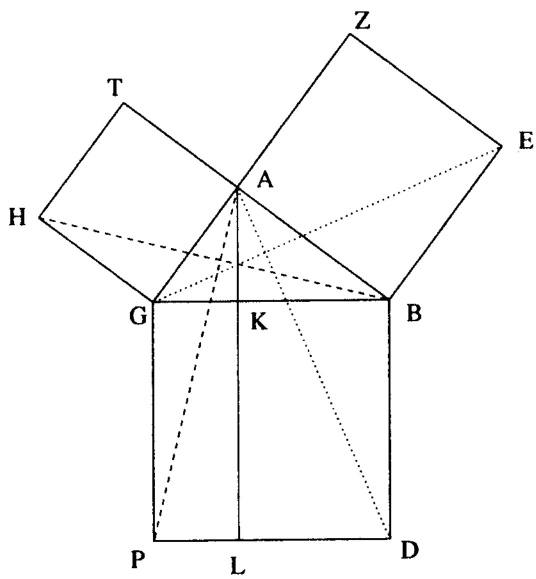
Pythagoras zelf leefde 1400 jaar later, in de 6e eeuw voor Christus. Hij was in de eerste plaats religieus leider, te vergelijken met sommige Indiase goeroes van tegenwoordig. Hij preekte een wereldbeeld met veel wiskunde, en had leerlingen, die zijn leer niet verder mochten vertellen, en bij overtreding van dit verbod gestraft werden. Twee van zijn ideeën waren: 1. de essentie van de hele werkelijkheid is getallen (voor hem waren dit natuurlijke getallen); en 2. wiskunde is iets niet-materieels.

Buiten de school van Pythagoras ontstond er in dezelfde tijd in het oude Griekenland een filosofeer- en debatteercultuur, waarin alles in twijfel werd getrokken. Wiskunde leent zich natuurlijk ideaal voor discussiëren. Na een paar eeuwen ontstond uiteindelijk de structuur van wiskunde die omstreeks 300 v. Chr. in de *Elementen* van Euclides is vastgelegd. In wiskunde volgens Euclides begin je met definities (namen) en axioma's (aannamen). Voorbeelden: Iets in de ruimte wat niet verder onderverdeeld kan worden noem je een punt. Dan neem je aan, dat je elk paar punten met een rechte lijn kan verbinden, dat je een rechte lijn kan verlengen, dat je met willekeurige middelpunt en straal een cirkel kan trekken, enzovoort (Je moet ook even vastleggen wat een rechte lijn is, maar dit is leuk om zelf over na te denken.) Hierna probeer je alle wiskundige objecten uit de aannamen te construeren, en alle stellingen af te leiden door logisch te redeneren.

Figuur 2 hoort bij het bewijs van Euclides (300 v. C.) van de stelling van Pythagoras: het vierkant met zijde BG is gelijk aan de som van de vierkanten met zijden AG en zijden AB. Om te beginnen toont Euclides aan dat de vierkanten met zijde AB, AG, BG bestaan. Daarna trekt hij uit A een loodlijn op PD in de figuur, en hij laat dan heel precies zien waarom: vierkant ATHG = 2 x driehoek BHG = 2 x driehoek APG = rechthoek GKLP (= betekent dat de oppervlakten gelijk zijn). Met



Figuur 1: Babylonisch bewijs voor de stelling van Pythagoras.



Figuur 2: Bewijs van Euclides.

deze methode kun je ook voor willekeurige driehoeken ($\angle GAB$ niet recht) de cosinusregel bewijzen, maar waarschijnlijk heeft Pythagoras dit niet gezien, en is het bewijs van Euclides van later datum.Volgens de legende was Pythagoras zo blij toen hij "zijn" stelling ontdekte dat hij 100 ossen offerde (maar volgens andere bronnen was hij vegetariër.)

De Grieken waren het niet eens over de vraag, wat deze wiskunde nu met de werkelijkheid te maken heeft. Volgens Aristoteles, zelf geen wiskundige, was de wiskunde een slap aftreksel van de werkelijkheid. Volgens Plato was het omgekeerd. De "werkelijkheid"die wij zien is volgens hem helemaal niet werkelijk, maar een schaduw van een hogere, werkelijke wereld van ideeën, en de wiskunde is een brug tussen die twee. Vandaar dat toekomstige filosofen verplicht wiskunde moesten leren. Als je wiskunde leert, dan leer je volgens hem niets nieuws, maar je herinnert je dingen uit die wereld, die je voor je geboorte al gezien hebt. Helaas bleven er een paar problemen in de fundamenten van de wiskunde over, vooral een ingewikkelde aanname die bekend staat als het parallellenpostulaat. (Wat dit is wordt uitgelegd in het college geschiedenis van de wiskunde.) Je kunt een beetje een idee krijgen van het probleem uit het volgende voorbeeld. De stelling van Pythagoras is niet waar op de bol. Als we een driehoek ABC op een bol met straal R nemen, met zijden a, b, c de kortste verbindingen over de bol tussen de hoekpunten, en hoek ACB recht, dan geldt op het oog iets heel anders, namelijk $\cos(c/R) = \cos(a/R)\cos(b/R)$.

Echter, bij benadering geldt, als c klein is en R groot,

$$\cos\frac{c}{R} = 1 - \frac{1}{2}\frac{c^2}{R^2} + \frac{1}{2.3.4}\frac{c^4}{R^4}\cdots$$

en dezelfde formules voor $\cos\frac{a}{R}$ en $\cos\frac{b}{R}$ (eerstejaars wis- en natuurkundestudenten: dit krijgen jullie half september). Als we dit invullen in $\cos(c/R) = \cos(a/R)\cos(b/R)$, links en rechts 1 wegstrepen, en met $-2R^2$ vermenigvuldigen, krijgen we $c^2 = a^2 + b^2 + \frac{1}{R^2}(\frac{1}{12}(c^4 - a^4 - b^4) - \frac{1}{2}a^2b^2) + \ldots$ De stelling van Pythagoras is dus bij benadering waar als R groot is. Als onze ruimte nu eens een 3-dimensionaal boloppervlak van een 4-dimensionale bol met heel grote maar net niet oneindige straal R zou zijn, dan zou dus de stelling van Pythagoras bij benadering waar zijn, maar niet precies ...

In de 19e eeuw werd duidelijk, dat het parallellenpostulaat niet kan worden bewezen uit de overige aannamen die standaard waren, en dat er andere meetkundes zijn (o.a. een soort meetkunde op de bol) die even goed in elkaar zitten als de gewone. Welke meetkunde "echt klopt" in de ruimte waarin wij leven is niet van te voren te zeggen. Maar: als het parallellenpostulaat niet meer geldt, dan gaan allerlei geliefde zekerheden overboord: de som van de hoeken van een driehoek is niet langer precies 180 graden, vierkanten (met gelijke zijden en hoeken van 90 graden) bestaan niet, ruitjespapier bestaat dus ook niet echt, en je bent in het VWO voor de gek gehouden met "het vlak" en een coordinatenstelsel dat in de echte ruimte niet bestaat. Langzamerhand kregen veel mensen het idee dat de wiskunde een product van de menselijke geest is. De meetkunde had afgedaan als basis voor de wiskunde, en de wiskundigen zochten hun heil bij de getallen. Terug naar Pythagoras zou je zeggen, maar in de 19e eeuw werden ook irrationale getallen zoals $\sqrt{2}$ bekeken die volgens hem niet bestonden. Tegenwoordig baseert men de getallen op de theorie van verzamelingen, en die theorie stoelt op definities en aannamen, net als de meetkunde bij Euclides. Er zijn nu heel algemene meetkundige theorieën waarin je op een gegeven moment verschillende definities van rechte lijn kunt kiezen, bij de ene definitie krijg je de oude meetkunde weer terug, bij een andere definitie een soort meetkunde op de bol, enz.

Als de wiskunde een product van de menselijke geest is, is de relatie met de "werkelijkheid" een filosofisch probleem. Sinds Newton en Maxwell is duidelijk dat de planeten zich bewegen in banen, die uit de gravitatiewet (een wiskundige formule) kunnen worden afgeleid, en dat magnetische en elektrische velden zich ook volgens gecompliceerde formules gedragen. Dus het blijkt, of het lijkt, dat die planeten en die velden zich gedragen volgens moeilijke wiskunde die een product is van de menselijke geest. Waarom doen die planeten en die velden dat? Ikzelf weet hier geen antwoord op. Het is wel een interessante vraag. De broodwinning van de wiskundigen berust namelijk op dit fenomeen.

Pythagoras zou het antwoord geven dat de essentie van alles getal is, maar helaas zijn er de afgelopen eeuw een paar dingen duidelijk geworden waarmee hij niet blij zou zijn. Binnen de wiskunde zijn er beweringen ontdekt, die zelf niet uit de standaard axioma's kunnen worden afgeleid, maar het tegendeel ook niet. (Een voorbeeld is de zgn. continuumhypothese, die zegt dat er een verzameling bestaat die echt groter is dan de natuurlijke getallen, maar echt kleiner dan de reële getallen.) En er zijn veel processen in de natuur, die wel door wiskundige vergelijkingen kunnen worden gemodelleerd, maar niet op de lange termijn voorspeld (bijv. weersvoorspelling voor periodes langer dan 14 dagen). Er zijn hier essentiële moeilijkheden die niet door meer en betere wiskunde overwonnen kunnen worden.

De wiskundekennis is de afgelopen eeuw geëxplodeerd. Er is nu zoveel wiskunde bekend, dat één mens dit allang niet meer kan overzien. Sommige stukken van de werkelijkheid kunnen wel, en andere absoluut niet met wiskunde worden beschreven. Aan alle eerstejaars studenten zou ik daarom willen toewensen: geniet van de studie, maar word geen vakidioot, want er is nog zoveel meer dan wiskunde en wetenschap!

Jan Hogendijk is medewerker van het Mathematisch Instituut. Hij doet onderzoek naar de geschiedenis van de wiskunde, en geeft in het najaar van 2000 de colleges Infinitesimaalrekening 1A en 1B.