Jaargang 3

Januari 2006

Nummer 12

Eureka!

Informatica Natuurkunde Sterrenkunde Wiskunde, Universiteit Leiden, in samenwerking met studievereniging De Leidsche Flesch.

Twisters: linksom of rechtsom?

Over de hele wereld gereisd

Interview met oudstudent Mischa Barthel

Het rekenwonder van het Rapenburg

Het rekenwonder van het Rapenburg

In de zeventiende eeuw was de Republiek der Verenigde Nederlanden een wereldmacht, niet alleen in de politiek maar ook in techniek en wetenschap. Tot 1575 was Antwerpen het culturele centrum van de lage landen, maar toen de stad door de Spanjaarden werd belaagd, vertrokken veel geleerden en rekenmeesters naar het noorden. Tussen 1600 en 1660 was Leiden een wiskundig centrum van wereldformaat.

Ludolf van Ceulen

Door Jan Hogendijk

Aan de Leidse universiteit, die in 1575 was opgericht, werd in het begin alleen wiskunde in het Latijn onderwezen. De Belg Simon Stevin, die na 1580 naar Noord Nederland gekomen was, pleitte voor het doen van wetenschap in de Nederlandse taal. Niet alleen omdat deze taal volgens hem de beste structuur had, maar ook omdat "gewone" mensen, die geen Latijn kenden, dan mee konden doen, zodat hun talenten voor de Republiek konden worden ingezet.

Een van deze "gewone" mensen was Ludolf van Ceulen. oorspronkelijk afkomstig uit Hildesheim in Duitsland. Hij werd in 1540 geboren en kwam vermoedelijk in 1578 uit Antwerpen naar Delft, en vestigde zich in 1593 of 1594 in Leiden. Hij verdiende de kost met het geven van lessen in rekenen en in schermen. Voor het geven van schermlessen kreeg hij van het stadsbestuur de beschikking over een deel van de Faliedenbegijnekerk, een van de vele katholieke kerkgebouwen die na de reformatie een andere bestemming hadden gekregen. Deze kerk is nu een deel van het gebouw van de oude universiteitsbibliotheek (Rapenburg 70-74). Van Ceulen kende Nederlands en Duits, maar geen Latijn en Grieks, en als hij Latijnse teksten nodig had, moesten zijn vrienden die voor hem vertalen. In 1600 werd Ludolf van Ceulen benoemd tot hoogleraar aan de nieuwe Nederlandstalige school, die door Prins Maurits aan de Leidse universiteit was toegevoegd voor de opleiding van (militaire) ingenieurs. De lessen vonden plaats in hetzelfde gebouw aan het Rapenburg waar ook de schermschool gevestigd was.

Ludolfs naam is verbonden aan het getal π, dat vroeger in het Duits wel bekend stond als

"Ludolphsche Zahl". In 1596 publiceerde hij in zijn boek *Vanden Circkel* een berekening van 20 decimalen van π. Daarna berekende hij nog eens 15 extra decimalen, die zijn weduwe na zijn dood in 1610 op zijn grafsteen in de Pieterskerk liet graveren. Ludolf's berekening van π komt neer op stug doorrekenen en trekken van vierkantswortels in heel veel decimalen. Minder bekend is dat Ludolf veel moeilijkere berekeningen heeft gedaan. We zullen nu een voorbeeld laten zien van zijn fenomenale begaafdheid. Voor het gemak gebruiken we moderne wiskundige notatie en begrippen.

Tegenwoordig kunnen we een sinus "uitrekenen" door het drukken op een een functietoets op een rekenmachine. In de rekenmachine wordt de sinus benaderd door reeksen zoals de bekende Taylorreeks voor $\sin(x) = x - x^3/3! + x^5/5! \ldots$, (met x in radialen), die pas na 1675 in het Westen bekend werd. Zo'n soort reeks was al omstreeks 1450 in de staat Kerala in Zuid-India ontdekt, maar deze kennis was niet naar Europa gekomen. De sinus zelf is een veel oudere functie. Sinustabellen waren belangrijk in de middeleeuwse sterrenkunde in India, de Islamitische cultuur, en West-Europa.

Het probleem een sinustabel te berekenen komt neer op het bepalen van de sinus van 1 graad, en voor wie nog nauwkeuriger wil, ook de sinus van 1 minuut. Daaruit kunnen alle andere sinussen berekend worden door herhaalde toepassing van de formules $\sin(a + b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$ en $\cos(a) = \sqrt{1 - \sin^2(a)}$. Voor 1675 kon men in Europa de sinus alleen berekenen met behulp van ingeschreven regelmatige veelhoeken in een cirkel. Van nu af aan zijn alle regelmatige veelhoeken ingeschreven in een cirkel met straal 1. De sinus van 1 graad en 1 minuut zijn dan de helft van de lengte van de zijde van een regelmatige 180-hoek en 10800-hoek. Van sommige regelmatige veelhoeken (zoals 3, 4, 6, 8, 10, ... -hoek) kunnen de zijden berekend worden door het trekken van vierkantswortels.
(de antwoorden zijn respectievelijk
$\sqrt{3}, \sqrt{2}, 1, \sqrt{2-\sqrt{2}}, \frac{1}{2}\left(\sqrt{5}-1\right) \ldots$

Er zijn ook veelhoeken, zoals de 9, 45, 180 en 10800-hoek, waarvan de zijden op deze manier nooit te vinden zijn. Dit geldt dus helaas ook voor de sinus van 1 graad en 1 minuut.

In Hoofdstuk 14 van *Vanden Circkel* vertelt Ludolf dat hij in aanraking kwam met dit probleem door correspondentie met zijn vriend Adriaan van Roomen, een Belgische wiskundige. Deze was bezig met het berekenen van een sinustabel in 9 decimalen.

Van Roomen had ontdekt of gehoord dat de zijden van bijv. een 9- en 45-hoek gevonden konnen worden door het oplossen van vergelijkingen. Als c de zijde is van een regelmatige n-hoek dan kun je de zijde van de regelmatige 3n-, 5n-, 7n-, 9n- enz. -hoek vinden door het oplossen van de vergelijkingen
$c = 3x - x^3$, $c = 5x - 5x^3 + x^5$, $c = 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$, $c = 9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9$ (ik gebruik hier de moderne notatie, die pas in 1637 door Descartes is ingevoerd, in een werk dat voor het eerst gedrukt werd in Leiden). Zo is bijvoorbeeld de zijde van de regelmatige negenhoek een oplossing x van $3x - x^3 = \sqrt{3}$.

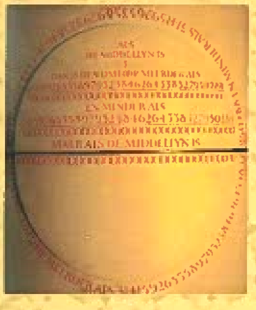
Adriaan gaf Ludolf een stel zulke vergelijkingen op, zonder te zeggen dat deze met veelhoeken te maken hebben, namelijk namelijk
$9x - 30x^3 + 27x^5 - 9x^7 + x^9 = \sqrt{3}$ en
$2 = 7x - 14x^3 + 7x^5 - x^7$ (voor resp. de 27-hoek en de 14-hoek). Ludolf loste deze op in 14 decimalen op 'met grooter arbeyt ...Oorsake mijn onbekent was tot wat eynde deze twee laetste vergelijckinge streckten'. De vriendschap met Adriaan schijnt niet onder dit extra werk geleden te hebben. Daarna gaf Adriaan aan Ludolf de volgende vergelijking op:

$$225x^2 - 4200x^4 + 30940x^6 - 119340x^8 + 277134x^{10} - 419900x^{12} + 436050x^{14} - 319700x^{16} + 168245x^{18} - 63756x^{20} + 17250x^{22} - 3250x^{24} + 405x^{26} - 30x^{28} + x^{30} =$$

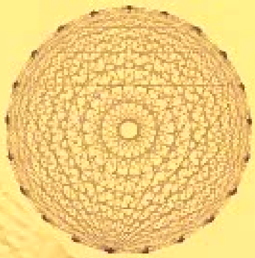
$$1\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{5}{16} - \sqrt{1\frac{7}{8} - \sqrt{\frac{45}{64}}}}.$$

Het getal aan de rechterkant noemen we a.

Ludolf herkende de vergelijking als het kwadraat van $15x - 140x^3 + 378x^5 - 450x^7 + 275x^9 - 9x^{11} + 15x^{13} - x^{15} = \sqrt{a}$. Dit wist Adriaan natuurlijk; wilde hij zijn vriend uitdagen? In elk geval loste



Ludolf van Ceulen is vooral bekend door het getal Pi. Dit is de bekende Pi steen.



Een veelhoek

Ludolf de laatste vergelijking op en vond 'met seer grooten arbeydt' dat x ligt tussen 0,027924360678290 en hetzelfde getal met de laatste decimaal 1 hoger. Dit is alweer moderne notatie; Ludolf schreef het als een breuk met teller 27924360678290 en noemer een 1 met 15 nullen. x blijkt de zijde te zijn van de 225-hoek.

Daarna ontving Ludolf weer nieuwe 'Vraghen' van Adriaan, onder andere de Corda van 1 minuut (d.w.z. de zijde van een 21600-hoek) in 25 decimalen, als oplossing van een stel vergelijkingen. Ludolf wanhoopte eerst, en bepaalde de wortels in 'slechts' 14 decimalen, maar: "Dit gedaen zijnde: is my sulcken lust ende begheerte aengecomen om de voorschreven ghetalen soo naer te soecken als boven begheert: te weten teghen de Diameter van 2 000 000 000 000 000 000 000 000 parten dat ick den groote arbeyt niet achtende ben met een sterck voornemen daer aen ghevallen (ende alle swaerigheydt aen een syde gheset daer ick mede beladen was) ende niet gherust voor ick (met Godts hulpe) ghevonden hadde hetghene van mij begeert was ende 't selve aen den voornoemden Adriaen ghesonden." Inmiddels had Adriaan ook onthuld dat er verband was tussen de vergelijkingen en regelmatige veelhoeken. In *Vanden Circkel* geeft Ludolf een algemene uitleg van het verband tussen veelhoeken en vergelijkingen, en een berekening in 14 decimalen nauwkeurig van de zijden van de regelmatige n-hoeken voor n van 3 tot 80.

Voor de 45-hoek deed Ludolf het nog nauwkeuriger. De zijde hiervan is de wortel x van de vergelijking $3x - x^3 = \sqrt{a}$ met a als boven. $\sqrt{a}$ is de zijde van de regelmatige 15-hoek. Ludolf vond dat x in moderne notatie ligt tussen 0,139512947488250601551917670388286657 en hetzelfde getal met de laatste decimaal 1 hoger (Ludolf presenteert deze getallen als een breuk met in de noemer een 1 met 36 nullen, zie Vanden Circkel fol. 18b). Hieruit kon Adriaan door het trekken van een vierkantswortel de zijde van de 90 en 180-hoek bepalen, en daaruit de sinus van 1 graad in 36 decimalen. Een dergelijke nauwkeurigheid was in 1596 ongehoord.

Van Ceulen moet heel goede algoritmes hebben ontwikkeld voor het oplossen van zijn vergelijkingen. Misschien was hij van plan deze uit te leggen in het boek over meetkunde dat hij wilde laten drukken, maar dit boek is niet verschenen, en de algoritmes zijn verloren gegaan. In de moderne geschiedenis van de wiskunde is Van Ceulen's werk aan hogere graads vergelijkingen nauwelijks bekend. Dit komt ook doordat hij in het Nederlands publiceerde, een taal die weinig moderne historici van de wiskunde buiten het kleine Nederland machtig zijn. Zo is er ongetwijfeld nog veel meer interessant onbekend Nederlandstalig erfgoed in de wiskunde (zie de website www.wiskonst.nl). Onderzoeksmateriaal genoeg voor geïnteresseerde studenten! ■