LE ROI-GEOMETRE AL-MU'TAMAN IBN HŪD ET SON LIVRE DE LA PERFECTION (KITĀB AL-ISTIKMĀL)

J.P.Hogendijk

Beaucoup de rois et de princes du monde islamique médiéval ont créé dans leur pays des conditions favorables pour le travail des mathématiciens et astronomes. Mais on trouve peu d'exemples d'un roi qui s'est occupé lui-même de l'étude des sciences mathématiques. Un cas bien connu est celui d'Ulugh Beg, roi à Samarcande au commencement du quinzième siècle, qui a fondé un observatoire astronomique, dans lequel il a employé plus de soixante mathématiciens et astronomes, et qui a lui-même participé activement aux discussions des sujets mathématiques et astronomiques (1). Moins connu jusqu'à présent était le cas des deux Banū Hūd, rois de Saragosse, en Espagne : Ahmad al-Muqtadir, qui régna de 1041 jusqu'à 1081, et son fils et successeur Al-Mu'taman, qui mourut en 1085.

Les ouvrages bibliographiques et historiques louent les talents mathématiques des deux rois (2), et quelques auteurs disent que le fils, Al-Mu'taman, composa un livre mathématique intitulé *Kitāb al-Istikmāl*, «livre de la perfection». Le bibliographe ibn al-Afkani dit que le *Kitab al-Istikmāl* était un livre incomplet et que, s'il avait été complété, tous les autres livres géométriques seraient devenus superflus (3). L'écrivain Ibn 'Aqnīn, qui vivait au douzième siècle, donne une description assez détaillée de l'Istikmāl dans son ouvrage *Tibb al-Nufūs* (écrit en arabe, mais en caractères hébreux). Ibn 'Aqnīn dit (4).

«Il (c'est-à-dire Al-Mu'taman) a divisé son livre (c'est-à-dire le *Kitāb al-Istikmāl*) en cinq parties (*anwa'*). Dans la première partie, sur l'arithmétique, il a étudié les sujets qui ont été traités par Euclide dans les septième, huitième et neuvième livres des *Eléments*, et par Thābit ibn Qurra dans son *Traité sur les nombres amiables*. La seconde partie

(1) Voir A.P. Youschkevitch, *Les mathématiciens arabes* (VIIIe-XVe siècles), Paris 1976, pp.157-158. Pour un document intéressant sur la vie scientifique à Samarcande à cette époque, voir E.S. Kennedy «A letter of Jamshid al-Kāshi to his father», *Orientala* 29 (1960), pp.191-213, réimprimé dans E.S. Kennedy, colleagues and former students, *Studies in the Islamic exact sciences*, Beirut 1983, pp.722-744.

(2) Pour toutes les références utiles, voir A. Djebbar, *Deux mathématiciens peu connus de l'Espagne du XIe siècle : Al-Mu'taman et Ibn Sayyid.* Université Paris-Sud, Département de Mathématique, 91.405 Orsay CEDEX, 1984.

(3) A. Sprenger. Two works on Arabic bibliography, in : *Bibliotheca Indica, Collection of Oriental works*, vol.VI, n°21. Calcuta 1843.

(4) Pour le texte arabe d'Ibn Aqnīn voir J.P.Hogendijk, Discovery of an 11th century géométrical compilation : the Istikmāl of Yusuf al-Mu'taman ibn Hud, king of Saragossa. *Historia Mathematica* 13 (1986), pp.43-52.

traite les propriétaires des lignes, angles et aires, mais pas en relation mutuelle, ici, il a étudié les sujets des livres I, II, III et IV des *Eléments* d'Euclide, en y ajoutant des problèmes. Dans la troisième partie, il s'est occupé des propriétaires des lignes, des angles et des aires, et il a ajouté beaucoup de théorèmes ; en outre, il a résumé le contenu du livre d'Euclide qui est connu sous les titres *Données* ou bien *Suppositions.* Dans la quatrième partie, il a présenté le contenu du livre XI des *Eléments* d'Euclide. Dans la cinquième partie, il a exposé les relations mutuelles entre les polyèdres».

On n'avait pas d'informations plus concrètes concernant l'œuvre mathématique d'Al-Mu'taman, jusqu'à l'identification récente, par mon collègue A. Djebbar et moi-même, de quatre manuscrits, tous anonymes, comme fragments du *Kitāb al-Istikmāl* (5) (figure 1). Le plus important de ces manuscrits se trouve à Copenhague (6) ; les autres sont à Leyde (7) (Hollande), au Caire (8) et à Damas (9). Les deux manuscrits du Caire et de Damas contiennent le texte complet de la première partie, et n'ont jamais contenu plus. Le manuscrit de Leyde est un fragment de la troisième partie, dont le commencement et la fin ont disparu. Le manuscrit de Copenhague a contenu l'ouvrage complet, mais beaucoup de feuilles manquent, et ce qui reste est en grand désordre ; dans son état présent, le manuscrit contient de larges parties des première, seconde, troisième, quatrième et cinquième parties du traité. Les lignes noires dans la figure 1 indiquent les parties du texte qui sont contenues dans les quatre manuscrits (K = Copenhague, D = Damas, L = Leyde, C = le Caire).

Le manuscrit de Copenhague a de longs passages en commun avec tous les autres manuscrits, d'où il suit que les quatre manuscrits sont des fragments du même ouvrage. Or, cet ouvrage doit être le *Kitāb al-Istikmāl :* le texte dans les manuscrits est divisé en cinq parties dont le contenu correspond approximativement à la description d'Ibn 'Aqnīn citée plus haut. On peut ajouter que l'on connaît quelques rares réfé-

---

(5) Voir mon article précité pour tous les détails.

(6) Copenhague, Or 82. Voir : *Codices orientalis Bibliotheca regiae Hafnensis, Pars altera, codices hebraicos et arabicos continens.* Copenhague 1851, pp.64-67.

(7) Leyde, Librairie de l'Université, n° Or.123/1. Voir M. de Goeje, *Catalogus codicum orientalum Bibliothecae Academiae Lugduno-Batavae,* vol.5, 1873, n°2646, pp.238-239 ; P. Voorhoeve, *Handlist of Arabic manuscripts in the Library of the University of Leiden and other collections in the Netherlands,* Leiden 1957, p.432.

(8) Le Caire, Dar al-Kutub Mustafa Fadil Riyada 41 m, f.1b-37b. Voir D. King, *A survey of the scientific manuscrits in the Egyptian National Library* (American Research Center in Egypt, Catalogs, Volume 5) Winona Lake (Indiana), n° B.110, p.53.

(9) Damas, Zahiriyya, 'Amm 5648, f.223b-227a. Voir M.S.A'idi, *Fihris makhtutat Dar al-Kutub al-Zahiriyya, al-Riyadiyyat,* Damas 1973, p.106.

rences au *Kitāb al-Istikmāl* dans les ouvrages d'autres auteurs, et que ces références sont toutes en accord avec le texte des quatre manuscrits. Mais ces quatre manuscrits ne forment pas un texte complet du *Kitāb al-Istikmāl*. Il y a neuf lacunes, qui consistent en une ou plusieurs pages, comme indiqué dans la figure 1. Les fragments préservés suffisent toutefois à montrer qu'Al-Mu'taman était un géomètre de premier rang.

Pour pouvoir analyser les contributions géométriques d'Al-Mu'taman, quelques remarques préliminaires sur la structure de l'*Istikmal* seront nécessaires. Al-Mu'taman a probablement expliqué au commencement de l'*Istikmāl* pourquoi il a écrit ce livre, mais son introduction ne nous est pas parvenue. Il est clair qu'il a voulu rassembler, systématiser et simplifier les connaissances mathématiques les plus notables de son époque.

On peut à l'aide des quatre manuscrits compléter la table du contenu de l'*Istikmāl* rapportée par Ibn 'Aqnīn. La première partie de l'*Istikmal* est consacrée à l'arithmétique, et A. Djebbar en a préparé une analyse détaillée.

Les autres parties concernent la géométrie.

La deuxième partie traite la géométrie élémentaire de la ligne droite, du cercle, et du triangle.

Al-Mu'taman a subdivisé la troisième partie en trois chapitres (qu'il indique par le même terme *anwa'*). Les trois chapitres concernent la théorie des rapports, les quantités irrationnelles, et l'analyse géométrique ancienne, dans le style des *Données* d'Euclide.

Les quatrième et cinquième parties concernant la stéréométrie.

La quatrième partie est divisée en trois chapitres, sur la stéréométrie élémentaire, la géométrie de la sphère, et les sections coniques. Al-Mu'taman traite les sections coniques dans la partie stérémétrique parce que ces courbes sont définies comme intersections d'un cône (c'est-à-dire une figure stéréométrique) et un plan.

La cinquième partie est aussi divisée en deux chapitres. Le premier chapitre donne certaines constructions préliminaires — sur lesquelles nous reviendrons plus tard — et des théorèmes sur les polyèdres réguliers. Le second chapitre est consacré à la détermination du volume et de la surface d'une sphère et à des sujets apparentés.

Al-Mu'taman a subdivisé la première et la seconde partie, ainsi que les autres chapitres, en sections (*fusūl*) dont chacune contient environ vingt propositions.

Selon Al-Mu'taman, les cinq parties font partie du «premier genre des sciences mathématiques» (*al-jins al-awwal min al-'ulūm al-*

riyādiyya). Il est vraisemblable qu'Al-Mu'taman eût l'intention, mais pas l'occasion de continuer avec un «second genre des sciences mathématiques» ; rappelons que, selon Ibn al-Akfani, l'*Istikmāl* est un ouvrage incomplet. Les troisième et cinquième parties dans notre texte contiennent quelques propositions géométriques empruntées à l'*Optique* d'ibn al-Haytham et à l'*Almageste* de Ptolémée, ce qui indique que le «second genre des sciences mathématiques» a peut-être compris l'astronomie et l'optique.

L'*Istikmāl* ne contient aucune proposition algébrique, bien que les mathématiciens arabes aient beaucoup travaillé sur l'algèbre. Il est donc possible qu'Al-Mu'taman avait aussi classifié l'algèbre comme appartenant à un autre «genre des sciences mathématiques».

Dans les parties de l'*Istikmāl* qui nous sont parvenues, Al-Mu'taman ne fait pas mention d'autres ouvrages ou d'autres géomètres. Toutefois, il a résumé un nombre impressionnant de sources. Voici la liste des sources que j'ai identifiées jusqu'à présent, auxquelles j'ai ajouté leurs dates ; cette liste montre qu'Al-Mu'taman était bien au fait de la littérature géométrique de son époque.

1. Euclide (env. 300 avant J.-C.) *Eléments,* I-XIII
2. Euclide, *Données.*
3. Archimède (env. 240 avant J.-C.), *Livre de la sphère et du cylindre,* I-II.
4. Archimède, *Lemmes.*
5. Appollonius (env. 200 avant J.-C.) *Coniques,* I-VII.
6. Théodose (env. 100 avant J.-C.), *Sphériques.*
7. Ménalaus (env. 100), *Sphériques.*
8. Ptolémée (env. 500), *Almageste,* I et III.
9. Eutocius (env. 500), Commentaire au *Livre de la sphère et du cylindre* d'Archimède.
10. Banū Mūsa (env. 850), *Livre de la mesure des figures planes et sphériques.*
11. Thābit ibn Qurra (836-901), *Sur la figure transversale.*
12. Thābit ibn Qurra, *Traité des nombres amiables.*
13. Ibrahim ibn Sinān (909-946), *Quadrature de la parabole.*
14. Ibn al-Haytam (965-env. 1041), *Traitè sur l'analyse et la synthèse.*
15. Ibn al-Haytham, *Optique,* Livre V.

Il est possible qu'Al-Mu'taman ait obtenu ses connaissances des ouvrages tardifs 13-15 pendant un voyage en Orient, et qu'il ait pris des copies de ces ouvrages avec lui.

Al-Mu'taman a copié dans l'*Istikmāl* certaines propositions presque littéralement de ces sources. Dans d'autres cas, il a rendu les propositions d'une manière plus succinte, ou il leur a apporté des modifications et des simplifications. En outre, l'*Istikmāl* contient un assez grand nombre de propositions qui ne se trouvent pas dans les sources connues antérieures à l'*Istikmāl*. il est parfois difficile de décider si telle proposition est une contribution d'Al-Mu'taman lui-même, ou si cette proposition a été emprunté à une source qui ne nous est pas parvenue. On ne peut pas résoudre ces problèmes historiques sans faire des suppositions sur les talents mathématiques d'Al-Mu'taman.

Voilà la question centrale de cette étude : dans quelle mesure Al-Mu'taman était-il un mathématicien original ?

Pour répondre à cette question, je vais discuter quelques exemples où nous pouvons identifier la contribution d'Al-Mu'taman avec une certaine probabilité.

Commençons avec le fameux problème des deux moyennes proportionnelles. Soit p, q deux segments donnés. Il faut trouver deux autres segments x, y de sorte que $p : y = y : x = x : q$. En termes algébriques, il s'agit de résoudre l'équation cubique $x^3 = pq^2$. Il est bien connu qu'on ne peut pas résoudre ce problème par la règle et le compas [10]. Al-Mu'taman donne quatre solutions du problème au moyen des sections coniques [11]. Nous allons exposer les deuxième, quatrième et troisième solutions, dans cet ordre, afin d'identifier la contribution d'Al-Mu'taman.

Al-Mu'taman a emprunté la seconde des quatre solutions au commentaire d'Eutocius sur la proposition 4 du deuxième *livre de la Sphère et du Cylindre* d'Archimède. L'auteur de la solution est le géomètre grec Ménechme. La solution est, en notations modernes, la suivante (figure 2).

On suppose que $p = AB$ et $q = AG$ comprennent un angle droit, et que $DE = y$, $BD = x$ sont les lignes cherchées (où D est un point sur BA, et DE est perpendiculaire à BD). Comme $AB : y = y : x$, nous avons $y^2 = px$, de sorte que E est sur une parabole de sommet B, d'axe BA, et de paramètre BA. Comme $p : y = x : q$ on a $xy = pq$, de sorte que E est sur une hyperbole qui passe par G, dont les asymptotes sont AB et la perpendiculaire BZ passant par B. Puisque nous connaissons AB, AG,

(10) Pour l'histoire de ce problème dans l'antiquité, voir T.L. Heath, *A history of Greek mathematics*, Oxford 1921, vol.1, pp.244-270.

(11) Proposition 1, section 1, chapitre 1, partie 5, ms.K,f. 104a-105a.

nous pouvons décrire la parabole et l'hyperbole (on suppose, comme Apollonius l'a fait dans ses *Coniques*, qu'on peut décrire toutes les sections coniques, dès lors que certains éléments fondamentaux sont connus). Ainsi nous pouvons construire E et D, et donc résoudre le problème.

Al-Mu'taman a emprunté sa quatrième solution à la version arabe (12) des *Coniques* d'Apollonius, et cette solution se trouve aussi dans quelques textes grecs. On suppose (figure 3) que ABGD est un rectangle, et qu'il faut trouver deux moyennes proportionnelles entre AB, AD. On construit le cercle qui passe par A,B,G,D, et on décrit l'hyperbole passant par A dont les asymptotes sont BG, GD. L'hyperbole et le cercle se coupent au point E. Les prolongements de AE, GD et GB se rencontrent aux points H, Z. Comme les points A, E sont deux points de l'hyperbole dont les asymptotes sont GZ, GH, on a, par le huitième théorème du Livre II des *Coniques* d'Apollionius, ZA = HE.

Donc, on a aussi ZE = HA, de sorte que ZA.ZE = HA.He.

Le théorème III : 36 d'Euclide donne ZA.ZE = ZB.GZ, parce que les points A, E, B, G se trouvent sur le même cercle. Pour la même raison HA.HE = HD.HG, de sorte que HD.HG = ZB.GZ, d'où HG:GZ = ZB:HD. Mais on a aussi HG:GZ = HA:DA = AB:BZ. Par conséquent, AB:BZ = ZB:HD = HD:DA, si bien que BZ et HD sont les deux moyennes proportionnelles cherchées.

Bien que la démonstration soit un peu plus compliquée, la quatrième solution peut être considérée comme plus simple que la seconde solution, parce que l'on utilise dans la quatrième solution une seule section conique, — à savoir une hyperbole. Quelques géomètres arabes, comme Abu'l-Jud (env. 970), ont pensé que la parabole était la section conique la plus simple, et la troisième solution dans l'*Istikmāl* est une construction au moyen d'un cercle et d'une parabole. Bien que le problème des deux moyennes proportionnelles eût été extrêmement populaire pendant l'antiquité et le Moyen-Age, on n'a pas trouvé une telle solution dans les sources connues. Ceci suggère qu'Al-Mu'taman lui-même était, selon toute probabilité, l'auteur de cette élégante solution.

Al-Mûtaman a obtenu sa solution par la combinaison des deux solutions précédentes. Dans la solution de Ménechme (figure 2), AG et AB sont les lignes données, et, dans la solution de la version arabe des

(12) Voir A. Jones, *Pappus of Alexandria, Book 7 of the Collection*, p.488.

Coniques (figure :), AB et AD (qui est égal à BG) sont les lignes données. Al-Mu'taman a identifié AG et AB dans la figure 2 avec AB et BG dans la figure 3, et il en a conclu que les deux hyperboles devaient coïncider. On peut alors obtenir le point E dans la figure 2 comme intersection d'une parabole et d'un cercle. Ainsi, il a obtenu la solution suivante (figure 4).

AB, BG sont les lignes données, et l'angle B est droit. On construit le cercle A, B et G et la parabole de sommet G, d'axe GB et de paramètre GB. La parabole coupe le cercle au point D (qui correspond au point E dans la figure 2). On abaisse la perpendiculaire DE. Il faut démontrer que DE et EG sont les deux moyennes propotionnelles entre AB, BG, c'est-à-dire que BG:DE = DE:EG = EG:AB. Ici la démonstration est encore plus compliquée.

Comme D sur la parabole, on a déjà $DE^2 = BG.EG$, d'où BG:DE = DE:EG.

On prolonge DA jusqu'à son intersection Z avec GB. Puisque l'angle B est droit, AG est un diamètre du cercle, de sorte que l'angle D est lui aussi droit ; d'où $DE^2 = ZE.EG$. Nous avons déjà démontré que $DE^2 = BG.EG$. Par conséquent BG = ZE, d'où ZB = EG. Alors BG:DE = ZE:DE = ZB:AB = EG:AB. C'est ce qu'il fallait démontrer.

La découverte de cette construction par la superposition des figures 2 et 3 peut paraître assez triviale aux mathématiciens modernes. Si l'on considère que cette construction ne se trouve dans aucun des ouvrages anciens et médiévaux connus — avec la seule exception de l'*Istikmāl* — on voit que l'impression de trivialité est erronnée du point de vue historique. Rappelons que les notations dans les textes géométriques anciens et médiévaux sont parfois assez confuses (les figures 2, 3 et 4 le montrent). Al-Mu'taman a compris les constructions des figures 2 et 3 plus complètement et plus profondément que la plupart des autres mathématiciens anciens et médiévaux.

L'originalité d'Al-Mu'taman est aussi mise en évidence par certaines modifications qu'il a apportées à ses sources. Ses simplifications des propositions dans le cinquième livre de l'*Optique* d'ibn al-Haytam en formant un bel exemple.

Les propositions d'ibn al-Haytham en question (13) sont des préliminaires à la solution du fameux «problème d'Alhazen» (nommé d'après la forme latinisée du prénom, Al-Hasan, d'ibn al-Haytham),

(13) Pour une traduction anglaise et toutes les références, voir A.I.Sabra, Ibn al-Haytham's Lemmas for solving «Alhazen's Problem», *Archive for History of Exact Sciences* 26 (1982), pp.299-324.

c'est-à-dire le problème de cosntruire le point de réflexion sur un miroir circulaire donné, si les positions de l'œil et de l'objet sont données.

Dans l'*Optique*, ibn al-Haytham résoud comme préliminaire, le problème suivant :

Etant donné le diamètre BG d'un cercle, un point A sur le cercle, et un segment KL, construire une ligne droite AHD qui coupe le cercle en H et le diamètre BG en D de sorte que HD = KL.

Ibn al-Haytham distingue deux cas : soit HD est à l'extérieur du cercle (comme dans la figure 5), soit HD est à l'intérieur du cercle (comme dans la figure 6). Il en donne les solutions suivantes.

Dans le premier cas (figure 5), ibn al-Haytham choisit un segment TN arbitraire. Il construit le rectangle NMTQ de sorte que le triangle TNM soit semblable au triangle GBA. Il décrit l'hyperbole passant par M dont les asymptotes sont TQ, QN. Puis il prend un segment R tel que R:TN = BG:KL, et il construit le cercle dont le centre est M et le rayon R. Ce cercle coupera l'hyperbole au point S. Il mène TJF parallèle à MS, et il construit DA en sorte que l'angle ADG soit égal à l'angle FTN. DH est la ligne cherchée. La démonstration repose sur quelques théorèmes concernant le cercle et l'hyperbole, ainsi que sur la similitude des figures DZGA et TJNF (GZ est parallèle à BA).

Dans le second cas (figure 6), il construit un rectangle KQLM de sorte que les triangles KQL et BAG soient semblables. Il décrit les deux branches de l'hyperbole passant par M, dont les asymptotes sont QK, QL. Puis il construit le cercle dont le centre est M et le rayon R = BG. Si ce cercle et la deuxième branche de l'hyperbole n'ont pas de point commun, ce cas du problème n'a pas de solution. Mais si le cercle et l'hyperbole ont un point S en commun, il trace alors JLF parallèles à MS. Finalement, il construit H sur le cercle de sorte que les angles DBH et LHM soient égaux, et il trace la ligne de jonction ADH. DH est la ligne cherchée. La démonstration est basée sur la congruence des figures KFLJ et HGDB.

On voit qu'ibn al-Haytham a traité les deux cas comme des problèmes tout à fait différents, bien que les solutions aient une certaine analogie. Plus précisément, ibn al-Haytham a ramené les deux cas à deux cas d'un autre problème : si deux lignes KM, KQ, un point L, est une longueur R sont donnés, trouver un segment passant par le point L qui coupe les deux lignes données en des points J, F de sorte que JF soit égal à la longueur donnée R. Les solutions des deux cas de ce problème auxiliaire sont tout à fait analogues, comme mes notations le montrent.

Les historiens modernes M. Nazif et A.I. Sabra ont remarqué qu'on peut simplifier la solution si on projette les figures auxiliaires (JMFQS etc.) dans les figures originales (ABGD) d'une manière appropriée [14]. Il est remarquable que, neuf siècles avant eux, Al-Mu'taman ait fait la même découverte. Al-Mu'taman a remarqué en outre que les solutions d'ibn al-Haytham peuvent être généralisées pour le cas où BG est une corde arbitraire donnée du cercle. Donc, Al-Mu'taman a résolu le problème suivant [15].

(Figure 7) soit ABG le cercle donné, BG la corde donnée, A le point donné, et K le segment donné. Il faut construire ADH qui coupe le cercle au point H et la corde BG (ou son prolongement rectiligne) au point D, de sorte que $DH = K$. Al-Mu'taman complète le parallélogramme AGQB, et il décrit les deux branches de l'hyperbole par A dont les asymptotes sont GQ, QB. Puis il construit le cercle de centre A et de rayon $R = BG^2/K$. Si le cercle coupe l'une des deux branches en S, il trace AS, qui coupera le cercle en H et BG (ou son prolongement rectiligne) en D. Al-Mu'taman démontre l'égalité de HD et K dans une seule démonstration générale et simple, comme suit :

Supponsons que AS rencontre QG en Z e QB en E. Menons MGL parallèle à AS, rencontrant AB en M et QB en L. Comme A, H, B et G sont sur le même cercle, on a $DB.DG = DA.DH$, d'où $DB/DA = DH/DG$. Lorsque AB et GZ sont parallèles, $DB/DA = GB/ZA$, d'où il suit $DH/DG = GB/ZA$, donc $DH/GB = DG/ZA$. Les deux triangles ZAG, MLB sont semblables puisque leurs côtés correspondants sont parallèles, de sorte que $DG/ZA = GB/ML$ (les deux figures AGZD, LBMG sont en effet semblables). Dès lors $DH/GB = GB/ML$.

Par le théorème 8 du deuxième livre des *Coniques* d'Apollonius on a $SE = ZA$ ($\doteq GM$) ; mais on a aussi $AE = GL$, puisque AG et EL sont parallèles. Donc $AS = ML$ et conséquement $DH/GB = GB/AS$.

On a, par construction de S, $AS = BG^2/K$, donc $K/BG = BG/AS$. Ainsi, $DH = K$.

On voit que les deux solutions d'ibn al-Haytham ont été transformées en une nouvelle solution, qui est beaucoup plus simple, beaucoup plus courte, et beaucoup plus claire. Nous pouvons être certain que l'auteur de la simplification est Al-Mu'taman, parce qu'ibn al-Haytham

(14) Voir M. Nazif, *Al-Hasan ibn al-Haytham, Buhuthuhu wa kushufuhu al-bassariyya,* Cairo 1942-1943. vol.2, et l'article précitée de Sabra, pp.300-304.
(15) Proposition 3, section 1, chapitre 1, partie 5, ms.K,f. 105a-105b.

a écrit l'*Optique* peu avant sa mort, de sorte que l'*Optique* et l'*Istikmāl* sont à peu près des ouvrages contemporains.

Il y a une autre nouveauté dans l'*Istikmāl*, que nous pouvons identifier sans doute comme une contribution d'Al-Mu'taman lui-même, parce qu'il s'agit là aussi d'une généralisation d'un résultat trouvé peu de temps auparavant. Commençons avec quelques préliminaires historiques.

Archimède avait démontré que l'aire d'un segment parabolique est égal à quatre tiers de l'aire du triangle ayant même base et dont le sommet est le point sur la parabole, défini par la condition que la tangente à la parabole en ce point soit parallèle à la base (figure 8). Nous appelerons ce triangle, de manière abrégée, le triangle inscrit du segment.

La solution d'Archimède n'est pas parvenue aux géomètres arabes, mais la préface du premier *livre de la Sphère et du Cylindre*, dans laquelle Archimède avait annoncé son résultat, fut traduite en arabe. Donc les géomètres arabes ont su que le problème avait été résolu par Archimède, bien qu'ils ne connussent pas sa solution. Plusieurs géomètres arabes ont trouvés leurs propres solutions, dont la plus simple est la solution d'Ibrahim ibn Sinan [16]. Ibrahim a démontré et utilisé deux préliminaires fondamentaux.

1. deux segments paraboliques ont le même rapport que leurs triangles inscrits.

2. si on inscrit dans un segment parabolique son triangle T, il reste deux petits segments ; et si on inscrit dans ces petits segments leurs triangles P, Q (figure 9), la somme des aires des deux petits triangles P, Q est un quart de l'aire du premier triangle T.

Donc, si l'aire du segment parabolique est cT, la somme des aires des deux petits segments est cT/4, parce que les segments paraboliques ont le même rapport que leurs triangles inscrits. Par conséquent

$cT - cT/4 = T$, d'où $c = 4/3$.

Al-Mu'taman a tenté de généraliser la méthode d'Ibrāhim ibn Sinan pour l'hyperbole et l'ellipse [17]. Al-Mu'taman appelle diamètre d'un segment d'une section hyperbolique ou elliptique la ligne droite entre le sommet du triangle et le milieu de la base. Il prolonge ce diamètre jusqu'à la rencontre avec l'ellipse ou l'autre branche de

(16) Le texte arabe a été publié récemment par A.S. Saidan dans *Rasa'il ibn Sinān* (Kuwait, 1983), pp.55-66. Voir aussi *Rasai'l ibn-i Sinān* (Hyderabad 1948), n° 5.

(17) Voir propositions 18-20, section 2, chapitre 3, partie 4 de l'*Istikmāl*, ms.K,f. 100b-102a.

l'hyperbole, et il appelle le segment entre les deux branches le diamètre transverse (correspondant au segment). Puis, il démontre que si deux segments hyperboliques ou elliptiques sont tels que les rapports entre leurs diamètres et leurs diamètres transverses sont égaux, les deux segments ont le même rapport que leurs triangles inscrits. C'est un résultat non trivial, dont la démonstration présuppose des connaissances profondes de la théorie des sections coniques d'Apollionus de Perge. Ainsi Al-Mu'taman a pu trouver les rapports entre les aires de certaines classes de segment hyperbolique et elliptique. Il n'a pas pu exprimer l'aire d'un segment hyperbolique ou elliptique en termes d'un triangle, ou, plus généralement, comme une aire rectiligne. Quelques considérations modernes en mettent la cause en lumière.

Considérons le cas simple de l'hyperbole $x^2 - y^2 = 1$.

L'aire du segment délimité entre l'hyperbole et la ligne $x = c$ est

$2 \int_1^c \sqrt{(x^2-1)}\, dx = c\sqrt{(c^2-1)} - \log(c + \sqrt{(c^2-1)})$.

Comme la formule contient un logarithme, on ne peut pas construire une figure rectiligne ayant cette aire au moyen des méthodes anciennes et médiévales. Al-Mu'taman a donc travaillé sur un problème qui était insoluble pour lui.

Les trois exemples précédents sont suffisants pour montrer qu'Al-Mu'taman était un géomètre de premier rang. On pourrait donc bien penser que toutes les propositions de l'*Istikmāl* qui ne se trouvent pas dans des ouvrages connus, sont ses contributions propres. D'autre part, Al-Mu'taman a certainement consulté des ouvrages géométriques qui ne sont pas parvenus jusqu'à nous. Certaines considérations historiques suggèrent que quelques propositions dans l'*Istikmāl* ont été empruntées à de tels ouvrages inconnus.

Nous donnons comme exemple un théorème sur les grandeurs irrationnelles. Euclide a présenté dans le dixième livre de ses *Eléments* une classification compliquée des grandeurs irrationnelles. Pour Euclide et les géomètres grecs, la raison d'être de cette classification était le fait qu'on ne peut pas exprimer certains rapports en géométrie par des nombres entiers, comme, par exemple, le rapport entre la diagonale et le côté du carré et du pentagone. Ainsi, le plus que ces mathématiciens ont pu dire sur de tels rapports, c'est que si l'un des termes du rapport est rationnel, le second terme est une grandeur irrationnelle de telle ou telle classe. Les mathématiciens arabes ont accepté, progressivement, les nombres irrationnels (comme $\sqrt{2}$), et ils ont donné des interprétations numériques pour les théorèmes démontrés par Euclide. Cependant, si on accepte les nombres irrationnels, la classification grecque devient inutile. Ainsi on ne peut pas s'attendre à ce que les mathématiciens arabes aient développé de nouveaux théorèmes géométriques sur ce sujet fossilisé, et cette impression est confirmée par les commentaires arabes sur le dixième livre des *Eléments*. Toutefois, l'*Istikmāl* contient le théorème suivant, que l'on n'a pas trouvé dans les sources connues : si les trois côtés d'un triangle sont rationnels, et si les trois hauteurs sont «rationnelles en longueur», les rayons du cercle inscrit et du cercle circonscrit du triangle sont aussi «rationnels en longueur» ; si, par contre, les hauteurs sont «rationnelles en puissance», les rayons sont aussi «rationnels en puissance» (18). Il est donc probable que ce théorème provient, directement ou indirectement, d'une source ancienne perdue.

Il reste quelques propositions de l'*Istikmal* dont on n'a pas d'indications sur l'origine. Un bel exemple en est le théorème dit de Ceva : si trois transversales AE, BF et CG d'un triangle ABC ont un point D en commun, on a :

AG/GB = (AF/FC).(CF/EB) (figure 10).

On a pensé jusqu'à présent, que ce théorème avait été donné pour la première fois par le mathématicien Italien Giovanni Ceva en 1678. Mais ce théorème se trouve aussi dans l'*Istikmāl*, avec une démonstration correcte (19). On ne savait pas si Al-Mu'taman l'a trouvé ailleurs, ou s'il est sa propre contribution. En tout cas, l'*Istikmāl* est le premier livre connu où le théorème est démontré, et, conséquemment, le théorème devrait désormais être appelé «théorème d'Al-Mu'taman», ou «théorème d'Ibn Hud».

Les exemples précédents donnent une impression de la richesse des fragments de l'*Istikmāl* qui ont été retrouvés. Il est à espérer que l'on découvrira d'autres fragments qui complèteront le traité.

Nous terminerons cette étude par quelques remarques générales sur ce qui nous semble être l'importance historique de l'*Istikmāl*.

D'abord, l'*Istikmāl* dresse le portrait du mathématicien Al-Mu'taman, sur qui on n'avait pas d'informations concrètes avant la découverte des fragments. L'*Istikmāl* montre que Al-Mu'taman, qui a travaillé en Espagne, était bien au courant des ouvrages récents des

(18) Voir propositions 1-3, section 2, chapitre 2, partie 3, ms.K,f. 58a-b, L f. 38a-40a. Soit p un segment rationnel. Un segment q est appelé «rationnel en longueur» si p:q = m:n pour m, n entier. Si p:q ≠ m:n mais $p^2:q^2 = m':n'$ pour des entiers m', n', q est appelé «rationnel en puissance».

(19) Al-Mu'taman démontre ce théorème dans la proposition 18, section 2, chapitre 1, partie 3, ms. K,f. 43a.

géomètres musulmans orientaux, comme Ibrahim ibn Sinan et ibn al-Haytham. En particulier, Al-Mu'taman a étudié l'*Optique* d'ibn al-Haytham peu d'années après que cet ouvrage eut été écrit. L'*Istikmal* a été étudié, à son tour, dans les pays orientaux : un certain Muhammad ibn Jawbar de Maragha, qui travaillait à Baghdad, a édité le texte de l'*Istikmāl* au 13eme siècle. On sait que l'*Istikmāl* a aussi été édité par Maimonide, qui était un grand philosophe, mais un mathématicien médiocre (comme ses remarques au sujet des *Coniques* d'Apollonius le montrent).

Au sujet de l'*Optique*, on peut aussi remarquer que l'on n'a trouvé aucune trace de cet ouvrage dans tout le monde musulman jusqu'à 1300, à deux exceptions près : Al-Mu'taman a utilisé l'*Optique* dans son *Istikmal* et l'*Optique* a été traduite de l'arabe en latin au douzième siècle en Espagne. Il est bien possible que ces deux événements n'aient pas été indépendants, et qu'Al-Mu'taman ait possédé le manuscrit de l'*Optique* qui fut traduit au douzième siècle — ou bien l'ancêtre de ce manuscrit. Si cette hypothèse est vraie, Al-Mu'taman aura joué un rôle important non seulement dans l'histoire des mathématiques arabes, mais aussi dans le développement de la science européenne.

Tout ceci nous paraît aboutir à la conclusion que, désormais, Al-Mu'taman est un nom qui mérite de retenir l'attention des historiens des sciences.

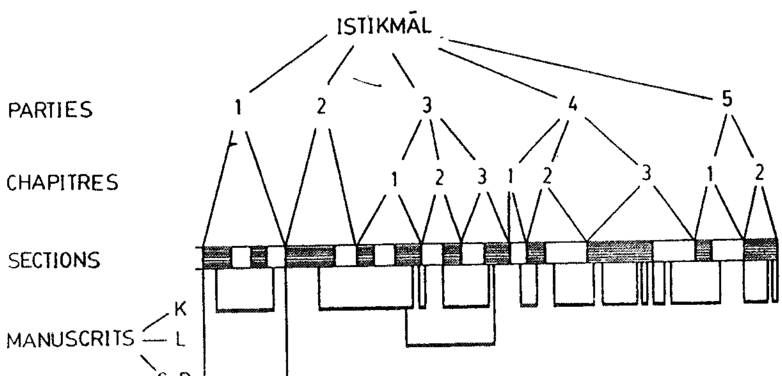

Figure 1

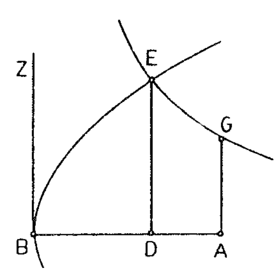

Figure 2

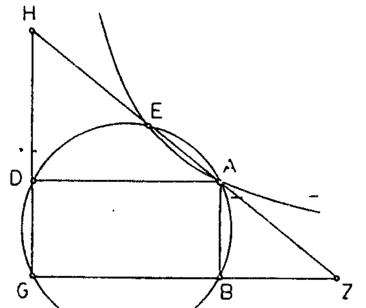

Figure 3

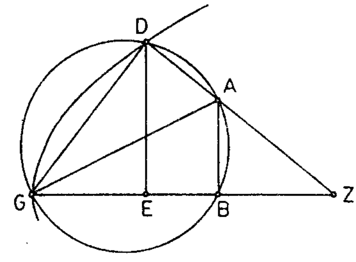

Figure 4

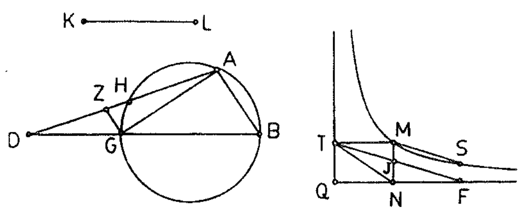

Figure 5

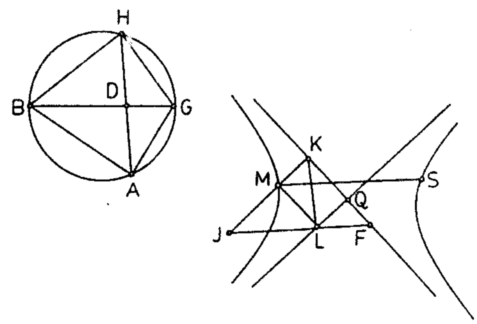

Figure 6

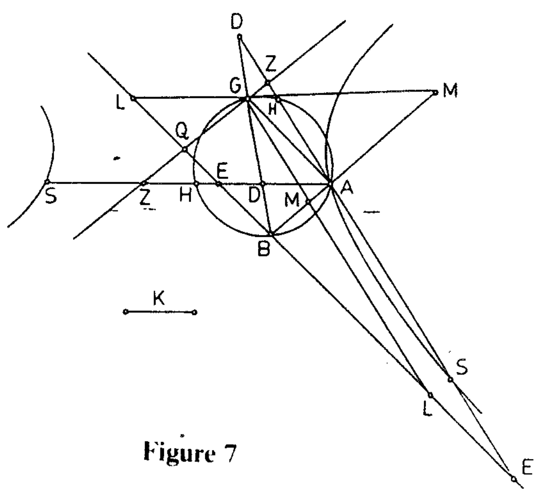

Figure 7

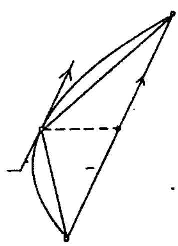

Figure 8

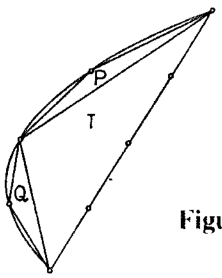

Figure 9

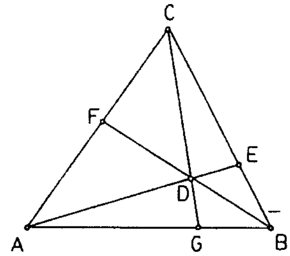

Figure 10