Redeneren met figuren als Euclides

Jan P. Hogendijk

De *Elementen* van Euclides (ca. 300 voor Chr.) is ongeveer 2000 jaar lang het belangrijkste wiskundeleerboek geweest, hoewel het nooit als zodanig bedoeld was. Euclides schreef zijn boek voor collega's die al bekend waren met de wiskundige denkwijze en het jargon. Het boek begint plompverloren met definities en axioma's, en daarna worden honderden stellingen afgeleid met bewijzen. Euclides doet wel moeite om wiskundig correct te zijn, maar niet om zijn lezers te motiveren.

De Griekse wiskundigen waren diepe denkers, en in hun bewijzen waren figuren veel belangrijker dan tegenwoordig, want er bestond nog geen begrip van reëel getal. Een "getal" was een aantal (dus 1, 2, 3, 4 ...) of een verhouding tussen twee aantallen. De Grieken wisten dat er verhoudingen bestonden, bijvoorbeeld tussen diagonaal en zijde van een vierkant, die niet door aantallen uitgedrukt kunnen worden, en daarom was het getal niet bruikbaar als basisbegrip in de wiskunde. De basisbegrippen werden lijnsegment en oppervlakte. Oppervlaktes kunnen gelijk aan elkaar zijn, maar een oppervlakte kan ook groter of kleiner zijn dan een andere. Euclides bouwt zijn theorie op een klein aantal axioma's (onbewezen aannamen), zoals: figuren zijn gelijk (als oppervlakte) als ze op elkaar passen (1) en: als gelijke oppervlakten bij elkaar worden gevoegd zijn de combinaties gelijk (2). Vergelijk in moderne notatie: als $a = c$ en $b = d$ dan $a + c = b + d$.

Bewijzen bij Euclides gaan volgens een nogal plechtstatig ritueel.

Bewijzen bij Euclides gaan volgens een nogal plechtstatig ritueel. We volgen nu dit ritueel bij het bewijs van wat tegenwoordig de Stelling van Pythagoras heet. Bij Euclides is dit stelling 47 van boek 1. Hij begint met het heel algemeen formuleren van de te bewijzen stelling:

> MZ. In de rechthoekige driehoeken is het vierkant op de zijde die de rechte hoek bespant gelijk aan de vierkanten op de zijden die de hoek bevatten.

Met enige moeite herken je hierin waarschijnlijk het moderne $c^2 = a^2 + b^2$. De Griekse kwadraten waren geen getallen, maar echte vierkanten, en dus oppervlakten.

Daarna wordt de stelling herhaald, maar nu in notatie:

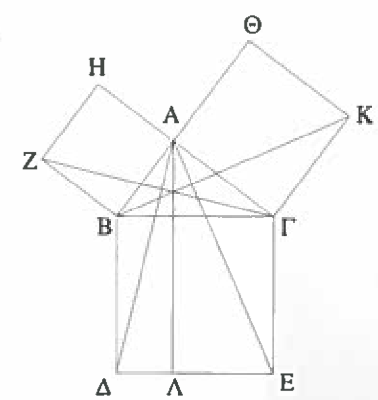
> Laat $AB\Gamma$ een rechthoekige driehoek zijn met rechte hoek $BA\Gamma$. Ik zeg dat het vierkant op $B\Gamma$ gelijk is aan de vierkanten op BA, $A\Gamma$.

De driehoek $AB\Gamma$ is de basis van onze uitdrukkingen zoals "driehoek ABC" maar voor Euclides stonden de letters A, B en Γ voor de getallen 1, 2 en 3; aparte getalsymbolen bestonden niet. Ook de rest van het alfabet werd als getallen gebruikt: $\Delta = 4$, $E = 5$, $F = 6$, $Z = 7$, $H = 8$, $\Theta = 9$, $I = 10$ en daarna tientallen $K = 20$, $\Lambda = 30$, $M = 40$ die met eenheden werden gecombineerd, zoals $MZ = 47$.

Euclides construeert nu vierkanten $B\Delta E\Gamma$ (ook te vertalen als $P_2P_4P_5P_3$), $BZHA$, $A\Theta K\Gamma$ en loodlijn $A\Lambda$ en hij trekt nog een paar rechte lijnen zoals in de figuur.

"Wat te bewijzen was", zo concludeert Euclides.

Het bewijs verloopt dan als volgt: we bekijken eerst de twee driehoeken $AB\Delta$, $ZB\Gamma$. Omdat de zijden AB en ZB even lang zijn, en ook zijden $B\Gamma$ en $B\Delta$, en hoek $AB\Gamma$ en hoek $ZB\Delta$ gelijk zijn (beide namelijk hoek $AB\Gamma$ plus een rechte hoek), passen de driehoeken $AB\Delta$ en $ZB\Gamma$ op elkaar. Wegens het axioma (1) zijn ze daardoor gelijk. Verder is driehoek $ZB\Gamma$ = driehoek ZBA (want $A\Gamma // ZB$; je kunt dit nu zelf aantonen, denk aan de formule: de oppervlakte van beide driehoeken is half maal basis ZB maal hoogte), en daardoor is driehoek $AB\Delta$ gelijk aan driehoek ABZ. Door dit te verdubbelen krijgen we met axioma (2) vierkant $ABZH$ = rechthoek $B\Lambda$.[1] Op precies dezelfde manier zien we in: vierkant $A\Gamma K\Theta$ = rechthoek $\Gamma\Lambda$. Nu concluderen we, alweer met axioma (2), dat vierkant $ABZH$ en vierkant $A\Theta K\Gamma$ samen even groot zijn als vierkant $B\Gamma E\Delta$. "Wat te bewijzen was", zo concludeert Euclides.



De figuur bij dit bewijs is vermoedelijk de beroemdste figuur uit de hele geschiedenis van de wiskunde. Er waren speciale namen voor: figuur van de bruid, stoel van de bruid, en ook dulcarnon (van het Arabische dhu'l -qarnayn, met twee hoorns). Geoffrey Chaucer (1343-1400) laat de hoofdfiguur in een van zijn gedichten zeggen:

"I am, til God me bettre minde sende, At dulcarnon, right at my wittes ende."

Bron: de Griekse tekst van Euclides is uitgegeven in J.L. Heiberg, downloaden van `http://www.wilbourhall.org/#euclid`. In het Nederlands is er E.J. Dijksterhuis, *De Elementen van Euclides* deel 1, Groningen 1930. Engelse standaardvertaling in T.L. Heath, *Euclid: the Thirteen Books of the Elements* vol. 1, Cambridge 1925.

[1] Merk op dat Euclides een rechthoek aangeeft met twee punten tegenover elkaar.