# De geboorte van de complexe getallen

Jan Hogendijk

De meeste lezers van dit stukje zullen ergens in hun studie wel complexe getallen zijn tegengekomen. Complexe getallen hebben geen directe interpretatie in de werkelijkheid, want we hebben genoeg aan reële getallen voor het uitdrukken van hoeveelheden, afstanden, banktegoeden, enz. Maar kunnen ons wel iets voorstellen bij complexe getallen dankzij het “complexe vlak”. Daarom zouden we complexe getallen virtueel kunnen noemen in de zin van: niet aanwezig in de wereld om ons heen, maar wel voorstelbaar met “software.” Dat is dan de software die in ons hoofd is aangebracht als onderdeel van een exacte studieloopbaan.

Als we het zo bekijken zijn veel wiskundige begrippen virtueel. Het getal $\pi$ bijvoorbeeld is ook niet direct uit de natuur te halen, en het zal ook nooit in alle decimalen kunnen worden uitgerekend. Je kunt $\pi$ definiëren als de verhouding tussen omtrek en middellijn van een volmaakte cirkel, die ook niet in de natuur bestaat, net zo min als oneindig dunne rechte lijnen, punten zonder afmeting, en andere begrippen uit de meetkunde zoals die sinds de Griekse oudheid wordt bestudeerd. Cirkels en rechte lijnen kunnen wel op voor de hand liggende manier uit de werkelijkheid worden geabstraheerd. Bij complexe getallen is dit lastiger. In dit stukje zullen we uitleggen hoe complexe getallen de wiskunde zijn binnengedrongen, zonder dat dat eigenlijk de bedoeling was van de eerste wiskundigen die ze gebruikten.

We beginnen met een lange inleiding, die op het eerste gezicht niets met complexe getallen te maken lijkt te hebben. In het zestiende-eeuwse Italië bloeide de handel, en was er grote behoefte aan rekenonderwijs. Rekenmeesters beconcurreerden elkaar en probeerden zo veel mogelijk leerlingen te krijgen, en indien mogelijk ook een tijdelijk contract aan een universiteit. Om de pikorde te bepalen, daagden ze elkaar regelmatig uit met problemen die veel moeilijker waren dan nodig was voor de gewone handelspraktijk. Vaak gingen die problemen over algebra. De Arabische kennis over lineaire en kwadratische vergelijkingen was in de twaalfde eeuw bekend geworden door de boeken van Leonardo Fibonacci, die in Algerijë had gestudeerd en daarna naar Italië was teruggekeerd. De wiskundigen in de Islamitische wereld hadden zich ook met derdegraads vergelijkingen beziggehouden, maar zij konden de wortels van deze vergelijkingen alleen meetkundig construeren met cirkels en kegelsneden (parabool, hyperbool of ellips). Ze waren er niet in geslaagd een algebraïsche oplossing te vinden.

Zo'n oplossing kenden ze wel voor kwadratische vergelijkingen. We zullen van nu af aan de notatie gebruiken die door René Descartes in 1637 is ingevoerd, maar die aan die Islamitische en Italiaanse wiskundigen nog niet bekend was. Deze wiskundigen werkten alleen met positieve coëfficienten, en ze onderscheidden verschillende typen kwadratische vergelijkingen, zoals $x^2 + px = q, x^2 = px + q$ en $x^2 + q = px$ met $p, q > 0$. Deze werden alle drie afzonderlijk opgelost, bijvoorbeeld het derde type $x = \frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Voor 1500 geloofden gezaghebbende Italiaanse wiskundigen dat zo'n algemene oplossing voor derdegraads vergelijkingen onmogelijk was. Maar omstreeks 1510 keam een onverwachte doorbraak: de rekenmeester Scipione del Ferro uit Venetië vond een oplossing voor (modern) $x^3 + px = q$, in Italiaanse termen: "een kubus plus dingen is gelijk aan een getal". Zijn oplossing is niet bewaard, maar moet ongeveer op het volgende neergekomen zijn (alweer in moderne notatie). We bekijken een kubus met zijde $u = x + v$ met $x$ de wortel van de vergelijking en $v$ nader te bepalen. Deze kubus is gelijk aan een kubus met zijde $x$, plus een kubus met zijde $v$, plus drie rechthoekige blokken met zijden $x, v$ en $u$. Scipione moet dit met een meetkundige tekening gezien hebben, en wij kunnen het in formules zien door $u^3 = (x + v)^3$ uit te werken als $x^3 + 3xv^2 + 3x^2v + v^3$. We stellen nu in de vergelijking de drie blokken gelijk aan $px$, zodat $p = 3uv$. Dan moet $x^3 + px + v^3 = u^3$, dus $q = u^3 - v^3$. Met $p = 3uv$ kunnen we nu $u$ of $v$ uit $q = u^3 - v^3$ elimineren, en we krijgen uiteindenlijk een kwadratische vergelijking in $u^3$ en ook een in $v^3$. Scipione kon deze vergelijking uiteraard oplossen. Uiteindelijk kreeg hij:

$$x = u - v = \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} + \frac{q}{2}} - \sqrt[3]{\sqrt{(\frac{q}{2})^2 + (\frac{p}{3})^3} - \frac{q}{2}}.$$

Hierna volgt een geschiedenis van bluf, leugens en bedrog, die aan een soap-opera doet denken. Helaas kunnen we er hier maar een klein deel van behandelen. Scipione del Ferro stierf zonder de oplossing te publiceren, maar gaf hem wel door aan zijn leerling Antonio Maria Fior, een minder getalenteerde rekenmeester. In 1534 daagde Fior een andere rekenmeester, Niccolo Tartaglia, in een weddenschap uit, dertig derdegraads vergelijkingen van de vorm $x^3 + px = q$ voor een bepaalde datum in februari 1535 op te lossen. Aan deze weddenschap was een behoorlijk geldbedrag verbonden, en vlak voor de deadline slaagde Tartaglia erin, zelf de oplossing van $x^3 + px = q$ te vinden, en een dag daarna ook $x^3 = px + q$ (wij kunnen de oplossing gemakkelijk vinden door in de bovenstaande formule $p$ door $-p$ te vervangen). Tartaglia kon daarna Fior met deze nieuwe vergelijking uitdagen, en won de weddenschap. De oplossingen moesten bij een notaris worden ingeleverd en werden daarna door een jury bekeken, maar de oplossingsmethoden zijn hierdoor niet uitgelekt! Wel werd algemeen bekend dat Tartaglia enkele derdegraadsvergelijkingen had opgelost. Vervolgens werd de arme Tartaglia door de rijke arts en astroloog Cardano in 1539 naar diens residentie in Milaan gelokt. Door veel gesoebat en een gul onthaal (waaraan alcoholica niet ontbraken) kreeg Cardano de oplosmethoden van Tartaglia los in de vorm van een gedicht. Tartaglia liet Cardano wel zweren, de methodes nooit te publiceren. Na wat extra bijles van Tartaglia lukte het Cardano de methoden langzamerhand te begrijpen. In 1545 publiceerde Cardano een boek onder de titel *Ars Magna* (de "Grote Kunst"). Hierin onthulde hij de methoden van Scipione del Ferro en Tartaglia, samen met andere algebraïsche ontdekkingen die hij (met hulp van zijn geniale huisknecht Ludovico Ferrari) gedaan had. Veel moderne historici van de wiskunde hebben lof voor Cardano, maar ik heb toch de indruk dat Cardano veel van wat hij in "zijn" *Ars Magna* opschreef zelf niet helemaal begreep.

Bij het oplossen van derdegraads vergelijkingen ontstaat een vreemd probleem, dat we nu zullen illustreren aan de hand van de vergelijking $x^3 + 6x = 20$. Cardano noemt deze vergelijking in het begin van de *Ars Magna*, en hij zegt dat $x = 2$ de enige wortel is. Verderop gebruikt hij dezelfde vergelijking bij het uitleggen van de oplossing van $x^3 + px = q$ (Cardano had nog geen notatie voor de bekende maar onbepaalde coëfficienten $p$ en $q$). Hij past hier op toe wat modern de "formule van Cardano" heet (d.w.z. de bovenstaande methode van Scipione del Ferro) en vindt $x = \sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10}$. Is dit nu gelijk aan 2? Cardano gaat niet op deze vraag in. Door het getal op een rekenmachine in te typen vind je 2.0000000 of 1.999999, maar hieruit volgt niet dat het precies 2 is.

Dit probleem werd in 1572 opgelost door een andere rekenmeester, Raphael Bombelli. Deze liet zien dat $(\sqrt{3} \pm 1)^3 = \sqrt{108} \pm 10$ (dit volgt gemakkelijk door uitwerken), en dus is inderdaad $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10} - \sqrt[3]{\sqrt{108} - 10} = \sqrt{3} + 1 - (\sqrt{3} - 1) = 2$. Maar nu rijst de vraag, hoe je kunt zien dat een uitdrukking als $\sqrt[3]{\sqrt{108} + 10}$ kan worden vereenvoudigd tot $\sqrt{3} + 1$. Dit blijkt te kunnen als je kunt zien dat de oorspronkelijke vergelijking (hier $x^3 = 6x + 20$) een eenvoudige oplossing (hier $x = 2$) heeft. Als je al een 'mooie' oplossing van deze vergelijking gevonden hebt, lukt het dus ook wel deze oplossing met die formule te krijgen, maar je kunt niet direct aan de formule zien of de vergelijking misschien een 'mooie' oplossing heeft. Dit is een vreemde situatie.

Een nog vreemder probleem treedt op bij sommige vergelijkingen van de vorm $x^3 = px + q$. Bombelli behandelde het voorbeeld $x^3 = 15x + 4$. Door proberen zie je dat $x = 4$ een oplossing is. Maar de formule geeft (vul in $p = -15, q = 4$) $x = \sqrt[3]{\sqrt{-121} + 2} - \sqrt[3]{\sqrt{-121} - 2}$. De complexe getallen komen hier boven water.

Bombelli ging niet bij de pakken neerzitten. Hij nam aan, dat je met "getallen" van de vorm $a + b\sqrt{-1}$ op dezelfde manier rekent als met gewone getallen. Dan is $(2 \pm \sqrt{-1})^3 = 8 \pm 12\sqrt{-1} - 6 - \pm\sqrt{-1} = 2 \pm 11\sqrt{-1} = 2 \pm \sqrt{-121}$. Bombelli concludeerde dat $x = 2 + \sqrt{-1} + 2 - \sqrt{-1} = 4$!

Bombelli was niet de eerste die complexe getallen gebruikte. Cardano zelf had in zijn *Ars Magna* het volgende probleem behandeld:"verdeel 10 in twee getallen zodat het product 40 is". Cardano stelt de getallen $x$ en $10 - x$ en krijgt de kwadratische vergelijking $10x = 40 + x^2$ met "oplossing" $x = 5 \pm \sqrt{-15}$. Hij merkt nu op dat "als je de mentale kwellingen opzij zet" dus gewoon rekent alsof er niets aan de hand is, inderdaad $(5 + \sqrt{-15})(5 - \sqrt{-15}) = 40$. Aan de andere kant bestaan er geen reële getallen met som 10 en product 40; het probleem is onoplosbaar, en de redenering is "even verfijnd als nutteloos." Bij Bombelli gaat het helaas wel om een reële $x$ die som is van twee complexe getallen. Complexe getallen kunnen dus vanaf 1572 niet meer worden genegeerd.

In de zeventiende eeuw werden met complexe getallen verder weinig nieuws gedaan, en achteraf kunnen we ook niet zeggen dat de wiskundigen er veel van begrepen. Een voorbeeld is René Descartes. Deze beweerde in Boek 3 van zijn *Géométrie* (1637) dat elke vergelijking evenveel wortels kon hebben als de graad van de vergelijking: "dat wil zeggen dat men zich van die wortels zoveel kan voorstellen als ik gezegd heb in elke vergelijking, maar soms is er geen enkele grootheid die met die grootheden die men zich voorstelt, overeenkomt. Bijvoorbeeld men kan zich voorstellen dat er drie zijn in deze (vergelijking) $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$, maar er is echter maar één, namelijk 2, en de overige wortels ... kan men nooit anders dan imaginair (d.w.z. voorstelbaar) maken." Dit wil zeggen: omdat $x^3 - 6x^2 + 13x - 10 = 0$ maar één reële wortel heeft, zegt Descartes dat er nog twee zijn en die noemt hij imaginair! Over wat voor soort getallen dit dan zijn, en of je er mee kan rekenen, geeft Descartes zijn lezer verder geen informatie.

In 1747 gebruikte Leonard Euler complexe getallen met veel succes in zijn leerboek *Inleiding tot de Analyse van het Oneindige*, en onder andere hierdoor verdween langzamerhand de onbekendheid met complexe getallen. Euler legde bijvoorbeeld uit dat uit $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ volgt $(\cos z + i \sin z)(\cos z - i \sin z) = 1$ (de notatie $i$ is door hem ingevoerd). Euler merkt op dat deze factoren "complex" zijn maar "erg nuttig", en hij laat dan zien hoe je hiermee de Taylorreeksen voor de sinus en cosinus kunt uitrekenen. Later geeft hij de formule $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ en leidt hiermee op gemakkelijke manier allerlei resultaten voor reële getallen af, die nog waar zijn ook! Een voorbeeld: door $e^{ix} = (\cos x + i \sin x)$ met $e^{iy} = (\cos y + i \sin y)$ te vermenigvuldigen, krijg je $e^{i(x+y)} = \cos(x+y) + i \sin(x+y) = (\cos x + i \sin x)(\cos y + i \sin y)$. Hieruit volgen door het nemen van reële en imaginaire delen de ware formules $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$ en $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$.

Pas in het begin van de negentiende eeuw kwamen diverse wiskundigen op het idee de complexe getallen op te vatten als elementen van een vlak, of (modern gezegd) anderszins als productverzameling van de reële getallen met de reele getallen. Het duurde nog wel een poos totdat het complexe vlak overal bekend was. Nog in 1839 schrijft de Leidse hoogleraar Jacob de Gelder in zijn *Beginselen der Stelkunst*:

"Alle uitdrukkingen, in welke één of meer termen $\sqrt{-1}$ tot factor hebben, dragen den naam van *onbestaanbare vormen*. Sommigen geven aan dezelfe den naam van *imaginaire (ingebeelde) grootheden*. welk woord echter de zaak niet zoo juist als het woord onbestaanbaar uitdrukt. Ofschoon de onbestaanbare getalvormen geene denkbare getallen voorstellen, zijn zij echter in de Stelkunst van een onschatbaar nut ... welke men naauwelijks van derzelve zou verwachten."

Het zou interessant zijn te weten, wat Euler zich precies voorstelde bij de complexe getallen, waarmee hij zo uitgebreid en met zoveel succes heeft gewerkt.