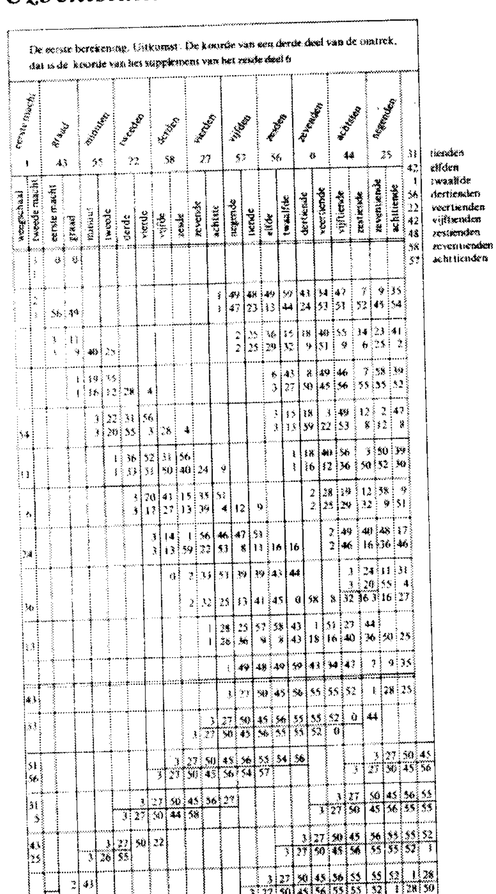
Het rekenwonder van Samarkand

Jan Hogendijk

Op 5 juli 2000 werd in de Pieterskerk in Leiden een reconstructie onthuld van de grafsteen van Ludolf van Ceulen (1539-1610). Op deze steen staan de 34 decimalen van het getal π die Van Ceulen aan het eind van zijn leven heeft uitgerekend (zie de vorige IMPACT). In 1596 had Ludolf van Ceulen al 20 decimalen van π gepubliceerd. Hij brak daarmee het wereldrecord dat tot op dat moment op naam stond van al-Kashi, het rekenwonder van Samarkand in Uzbekistan.



Figuur 1. Berekening van de wortel uit 3×60^2

Al-Kashi

Jamshid al-Kashi (spreek uit: Dzjamsjied al Kaasjie) werd in de tweede helft van de 14e eeuw geboren in de stad Kashan in het midden van Iran. Tot 1415 werkte hij daar in armoedige omstandigheden, maar daarna maakte hij snel carrière als wiskundige en astronoom aan het hof van Ulugh Begh, koning van Samarkand en omgeving van 1409 tot 1449. Ulugh Beg liet in Samarkand een groot sterrenkundig observatorium bouwen en hij nam een staf van meer dan 70 astronomen in dienst om nieuwe waarnemingen van zon, maan en planeten te doen. Hieruit werden, onder leiding van al-Kashi, nieuwe astronomische tabellen berekend voor de voorspelling van de maan- en planeetstanden. Ulugh Beg had zelf ook veel belangstelling voor wis- en sterrenkunde en hij was vaak aanwezig bij de wiskundige en sterrenkundige colloquia in zijn observatorium. We krijgen van dit alles een goede indruk uit twee brieven die al-Kashi heeft geschreven aan zijn vader, die nog in Kashan woonde. Al-Kashi liet in deze brieven aan zijn vader duidelijk merken dat hij de beste wiskundige in Samarkand was. Daarom tolereerde Ulugh Begh zijn af en toe nogal onbeschoft gedrag. Al-Kashi stierf in Samarkand in 1429.

Al-Kashi's berekening van π

Net als Ludolf van Ceulen gebruikte al-Kashi een methode die uiteindelijk op Archimedes terugging. In moderne termen komt deze methode op het volgende neer. De omtrek van een cirkel met straal 1 is 2π, en deze is groter dan de omtrek van de ingeschreven regelmatige zeshoek, 6. We krijgen hieruit $2\pi > 6$, dus $\pi > 3$.
Om dit idee uit te werken schrijven we I(n) en O(n) voor de omtrek van de regelmatige ingeschreven en omgeschreven n-hoek van een cirkel met straal 1.
We hebben dan I(6) = 6. Als I(n) of O(n)

Jamshid al-Kashi op een Iraanse postzegel.

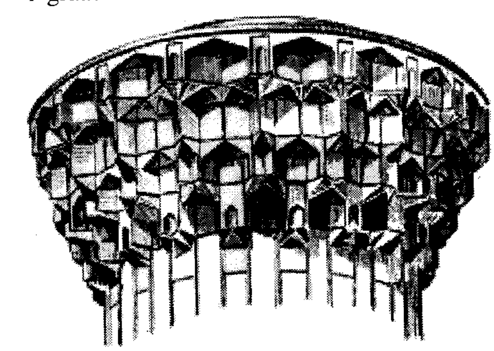
bekend is, kan I(2n) of O(2n) worden uitgerekend met worteltrekken. Archimedes leidde uit $I(96) < 2\pi < O(96)$ af dat 3 10/71 $< \pi <$ 3 1/7.

Al-Kashi had de beschikking over de goniometrische functies sinus, cosinus en tangens, die in de tijd van Archimedes nog niet bekend waren, en daardoor worden de berekeningen nog wat inzichtelijker. Er geldt $O(n) = 2n \tan(360/2n)$, $I(n) = 2n \sin(360/2n)$, en $O(n)-I(n)$ is de maximale fout in de benadering van 2π.
Al-Kashi berekende nu niet de sinus van deze hoeken, maar twee maal de cosinus, vanwege het handige verband: $2\cos(2x) = (2\cos(x))^2 - 2$. Pas bij de kleinste hoek berekent hij de sinus uit $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$. In figuur 1 zien we de eerste van zijn in totaal 28 worteltrekkingen. Al-Kashi werkt in een cirkel met straal 60 en hij berekent 60 maal 2cos(30), dat is de wortel van 3×60^2. Hij noemt dit de koorde van het derde deel van de omtrek (van een cirkel met straal 60), d.w.z. de zijde van de gelijkzijdige driehoek in die cirkel. Al-Kashi rekent in 18 sexagesimalen nauwkeurig. Voor de wortel van 3×60^2 vindt hij: $1 \times 60 + 43 + 55/60 + 22/60^2 + \ldots$, zie de literatuur-

lijst voor verdere toelichting. Al-Kashi zette zijn berekening voort tot I(N) met $N=3.2^{28}$, hij krijgt de zijde daarvan in 18 sexagesimalen nauwkeurig, en de omtrek (en dus 2π) in 9 sexagesimalen. Daarna geeft hij de waarde ook in 16 decimalen: $2\pi = 6{,}2831853071795865$. Het decimale systeem werd in die tijd wel gebruikt voor gehele getallen maar voor breuken was het een nieuwigheid. (Wij rekenen met hoeken en met tijd ook nog steeds sexagesimaal: 1 graad of uur = 60 minuten, 1 minuut = 60 seconden.) Al-Kashi beschreef zijn hele π-berekening in een speciaal werk, de "omvattende brief" (risala muhitiyya), die in het Arabisch met een Duitse vertaling is gepubliceerd.

Waarom zoveel decimalen?

Al-Kashi wilde het probleem van de π-berekening voor eens en altijd oplossen en hij wilde daarom π zo nauwkeurig uitrekenen dat de omtrek van de grootste cirkel in het heelal met een fout van maximaal een haarbreedte (0.5 mm) kon worden gevonden. Volgens de ideeën van Ptolemaeus (150 na Chr), waar al-Kashi en zijn collega's enthousiaste aanhangers van waren, was het heelal een bol met de aarde in het middelpunt. Hierom draaiden van binnen naar buiten de maan, Mercurius, Venus, de zon, Mars, Jupiter en Saturnus. Dat de volgorde van de planeten Mercurius-Venus-Mars-Jupiter-Saturnus was, werd afgeleid met filosofische argumenten. Zon, maan en planeten hadden bewegingen die samengesteld waren uit eenparige cirkelbewegingen, en waarmee de standen van al deze hemellichamen voorspeld konden worden met een nauwkeurigheid van ca. 10 boogminuten, goed genoeg voor astronomen die alleen met het blote oog konden waarnemen. De aarde werd als een bol beschouwd, en de afstand (ca. 110 km) tussen twee plaatsen op dezelfde meridiaan met een verschil van 1 graad noorderbreedte was diverse keren gemeten, zodat de aardstraal vrij nauwkeurig bekend was. De afstand van de maan werd uit metingen van parallax geschat op ongeveer 64 aardstralen. Er bestond ook een methode voor het bepalen van de afstanden van de zon uit de schijnbare grootten van de zonneschijf, de maanschijf en de aardschaduw tijdens een maansverduistering. Doordat deze methode zeer gevoelig is voor fouten, vond men voor de afstand van de zon tot de aarde de veel te kleine waarde van ongeveer 1210 aardstralen (ca. 7.200.000 km). Met het axioma dat er in de natuur geen nutteloze ruimte bestaat, volgde nu bijv. dat de maximale afstand van de zon tot de aarde gelijk is aan de minimale afstand van Mars tot de aarde. Uit de veronderstelde cirkelbewegingen van Mars volgde de verhouding van de minimale afstand van Mars tot zijn maximale afstand, die weer gelijk was aan de minimale afstand van Jupiter, enz. Zo kreeg men de maximale afstand van Saturnus van ongeveer 20.000 aardstralen. De vaste sterren zaten allemaal op een bol om de bol van Saturnus. Hieromheen zat nog een buitenste bol, die verantwoordelijk was voor de rotatie van het hele heelal om de aarde. In deze bol zaten alleen de hemelequator en de tekens van de dierenriem (niet de sterren!) Aangezien er geen nutteloze ruimte kon zijn, kon de straal van deze bollen niet erg dik zijn.



Een islamitisch stalactietengewelf.

Door naar de cirkelbewegingen van de maan, Mercurius en Venus te kijken, kon men ook uit de maximale afstand van de maan de minimale afstand van de zon afleiden. Er waren dus twee onafhankelijke methoden voor het uitrekenen van de afstand van de zon, die helaas ongeveer hetzelfde resultaat opleverden. Dit was een argument voor de geldigheid van dit Ptolemaische wereldbeeld.

De grootste cirkel in het heelal van al-Kashi had dus een straal van 20.000 aardstralen. Voor alle zekerheid koos al-Kashi een cirkel die 30 keer zo groot was, en de omtrek hiervan wilde hij uitrekenen met een fout van 0.5 mm. Hiervoor zijn 16 decimalen van het getal π nodig.

Ander werk van al-Kashi

Het belangrijkste werk van al-Kashi is de "Sleutel tot de Rekenkunde", waarvan een Arabisch handschrift in de Universiteitsbibliotheek van Leiden aanwezig is. Hij laat hierin verdere rekentrucs zien, o.a. zijn berekening van de oppervlakten van stalactietengewelven die in middeleeuwse moskeeën voorkomen. Kort geleden is hierover een video uitgekomen, en in het wereld wiskundejaar 2000 wordt al-Kashi in het Iraanse Kashan met een speciale conferentie herdacht.

Literatuur:

Petr Beckmann, A History of Pi, New York: St. Martin's Press, 1971.

Biografie van al-Kashi: A.P. Yuschkewitsch, B.A. Rosenfeld, artikel: al-Kashi, in: C.G. Gillispie (ed.), Dictionary of Scientific Biography, New York, Scribner's Sons, 1934, vol. 7, pp. 255-262.

Brieven van al-Kashi: E.S. Kennedy, A Letter of Jamshid al-Kashi to His Father: Scientific Research at a Fifteenth Century Court. Orientalia 29 (1960), pp. 191-213; M. Bagheri, A Newly Found Letter of Al-Kashi on Scientific Life in Samarkand, Historia Mathematica 24 (1997), pp. 241-256.

Al-Kashi's π-berekening: Der Lehrbrief über den Kreisumfang, übersetzt und erläutert von P. Luckey, herausgegeben von A. Siggel, Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften, Jahrgang 1950 Nr.6, Berlin: Akademie-Verlag, 1953. Toelichting bij de worteltrekking: zie J.P. Hogendijk, Twee vertellingen over π, Euclides 55 (1979), p. 407.

Ptolemaeisch wereldbeeld: Olaf Pedersen, A Survey of the Almagest, Odense: Odense University Press, 1974.

Video: Yvonne Dold-Samplonius, Qubba for al-Kashi, Universiteit van Heidelberg, 1997; te verkrijgen bij de American Mathematical Society (*www.ams.org/bookstore*)

Verdere literatuur over al-Kashi is te vinden in de bibliografie over middeleeuws Arabische wiskunde op *http://www.math.uu.nl/people/hogend/islamath.html*

Dr. Jan Hogendijk is verbonden aan de vakgroep wiskunde van de Universiteit Utrecht.