In de islamitische wereld worden moskeeën en andere gebouwen vaak versierd met mozaïeken. De ontwerpers daarvan moeten aardig wat van wiskunde weten. **Jan Hogendijk** gaf in Iran een workshop voor docenten aan de hand van een middeleeuws document over mozaïeken.

Een workshop over Iraanse mozaïeken

Inleiding

In de middeleeuwen zijn in de hele Islamitische wereld prachtige moskeeën gebouwd die vaak versierd zijn met mozaïeken. De mooiste mozaïeken zijn te vinden in Iran, tegenwoordig een onbekend en daardoor onbemind land. Mozaïeken werden gebruikt als vlakvulling en ook op koepels en andere driedimensionale structuren. Behalve puur meetkundige vormen werden ook gestileerde plantmotieven gebruikt (ranken, bloemen, enzovoort) en soms godsdienstige teksten of gedichten (zie foto 3). De mozaïeken zijn in prachtige kleuren uitgevoerd met de nadruk op blauw, dat een verkoelend effect heeft in het hete klimaat.

De ontwerpers en de makers van deze mozaïeken moeten een behoorlijke wiskundige kennis gehad hebben. De *Elementen* van Euclides waren in het Arabisch vertaald en overal bekend, maar de mozaïekmakers hadden niet al te veel op met de manier van wiskunde bedrijven van Euclides met axioma's, stellingen en bewijzen. Dat wil niet zeggen dat er geen theorievorming geweest is: geredeneerd werd er zeker! Kennis over mozaïeken schijnt vooral mondeling van meester op leerling overgedragen te zijn en er wordt gezegd dat sommige mozaïekmakers leden waren van mystieke ordes die hun kennis niet openbaar maakten. Pas een paar jaar geleden zijn enkele middeleeuwse documenten over mozaïeken ontdekt.
In het Topkapi-paleis in Istanbul is een rol van 30 meter lengte met werktekeningen van mozaïeken gevonden en in een prachtige facsimile-uitgave gepubliceerd[1]. Verder zijn in een Perzisch handschrift (Ancien Fonds 169) in de Bibliothèque Nationale in Parijs ongeveer 40 bladzijden tekeningen van mozaïeken gevonden met geschreven instructies. Dit handschrift is in het Russisch vertaald[2] en ook in het Perzisch uitgegeven[3], maar de wiskunde hierin is tot nu toe niet goed bestudeerd, ook niet in Iran zelf.

Op de *First Iranian Mathematics Education Conference* in Isfahan (27-29 augustus 1996) heb ik een workshop aan wiskundeleraren en -leraressen gegeven op basis van een stukje van dit oude handschrift.

Enkele Iraanse wiskundeleraressen bezig met de opdrachten

Mijn bedoeling was de leraren en leraressen voor de traditionele Iraanse wiskunde te interesseren en eenvoudige problemen te behandelen die mogelijk ook geschikt zijn te maken voor gebruik in de klas. Hieronder vindt u een iets ingekorte en gewijzigde versie van de workshop[4].

In het Perzische handschrift staan drie soorten problemen. We zullen van elke soort een voorbeeld behandelen. In het handschrift staan tekeningen en constructies maar geen bewijzen. Het is wiskunde van een heel ander type dan bij Euclides en in de meeste middeleeuwse islamitische teksten.

Verdelen van figuren

De eerste reeks problemen gaat over hoe je een gegeven figuur kunt verknippen en de stukjes anders aan elkaar kunt leggen zodat een nieuwe figuur ontstaat. Er mag geen enkel stukje overblijven! Figuur 1 laat zien hoe je een zespuntige ster zo kunt verknippen dat de stukjes aan elkaar gelegd kunnen worden tot een vierkant.

Opgave
Laat dit zien door de stukjes van een fotokopie van figuur 1 uit te knippen en opnieuw aan elkaar te leggen.

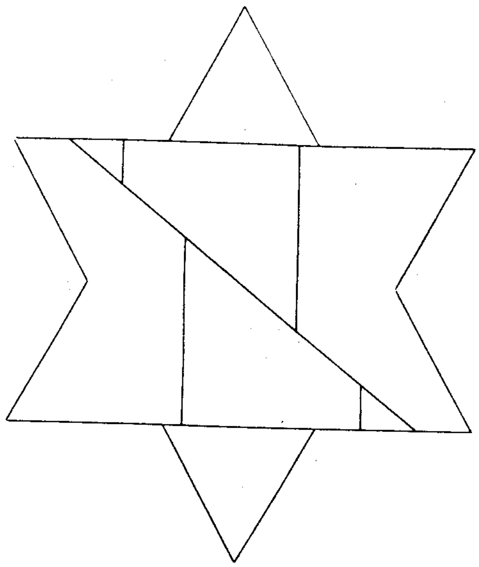


fig. 1

Het handschrift vertelt ook hoe de kniplijnen moeten lopen (zie figuur 2):

> 'De methode hiervoor is dat we op het verlengde van lijn AB segment AD gelijk aan segment AG afzetten. We delen DB doormidden in E. We beschrijven met passeropening EB boog BZD. Dan trekken we lijn AZ in het verlengde van AG tot hij eindigt aan de omtrek van de cirkel. Segment AZ is de zijde van het vierkant dat gelijk is aan de zeshoek. We zetten dan op lijn AB segment AH gelijk aan segment AZ af. De rest is gemakkelijk. God weet het het beste.'

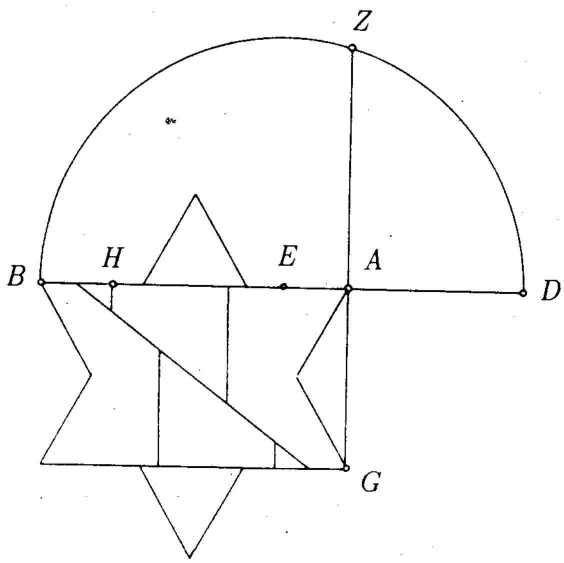


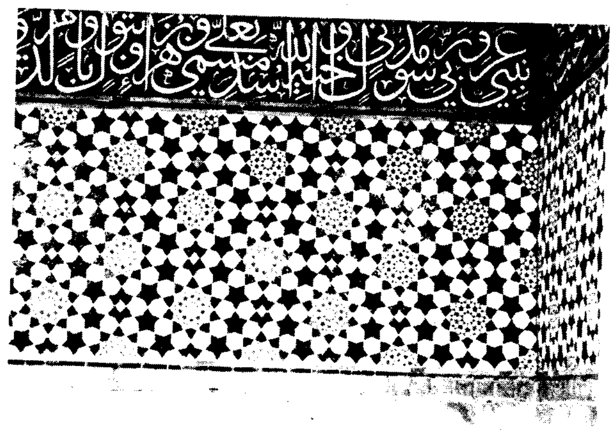
fig. 2

De tekst is wel erg summier; het is ook nuttig om te weten dat de rechte die de ster in tweeën deelt door het midden van HB gaat en dat één van de loodlijnen op AB door het midden van AH gaat. De constructie is correct: uit de eigenschappen van de cirkel volgt $AZ^2 = AB \cdot AD$. Hieruit volgt met enig verder rekenen dat AZ inderdaad gelijk is aan de zijde van het gevraagde vierkant. Voor gebruik in de klas is het misschien leuker met een vierkant te beginnen en dit in een zespuntige ster om te vormen.

Het handschrift geeft nog diverse andere verknippingen van dit type: achthoek ↔ vierkant ↔ achtpuntige ster, zeshoek ↔ gelijkzijdige driehoek ↔ zespuntige ster, zevenhoek ↔ rechthoek ↔ driehoek, enzovoort.

De vijfhoek

Een tweede serie problemen heeft te maken met de regelmatige vijfhoek. Veel Iraanse mozaïeken zijn gebaseerd op vijfhoeken en tienhoeken.



De Vrijdagmoskee te Isfahan, met veel vijfhoeken en tienhoeken

Het handschrift geeft vier constructies van de vijfhoek met passer en liniaal. Het bijzondere hierbij is dat de passer op een vaste opening wordt gezet. Het lijkt erop dat deze eis uit de praktijk is ontstaan, om onnauwkeurigheid in de constructie (door steeds opnieuw instellen van de passer) te beperken. Bij het tekenen van een heel patroon is dat natuurlijk belangrijker dan bij één vijfhoek.

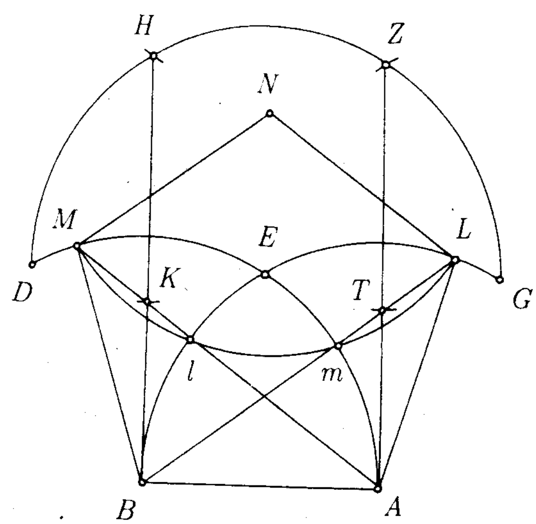


fig. 3

In de constructie van figuur 3 zetten we de passeropening vast op de straal AB van de te construeren vijfhoek. We kunnen nu alleen maar cirkels construeren met straal AB. Op de bekende manier construeren we nu eerst een regelmatige zeshoek $ABDHZG$. Punt E is het middelpunt van de cirkel door de hoekpunten van de zeshoek. Nu trekken we met de liniaal de evenwijdige lijnen ZA en HB. We markeren punten T op ZA en K op HB zodat $ZT = HK = AB$ door met de passer kleine stukjes van de cirkels met middelpunt Z en H te trekken.

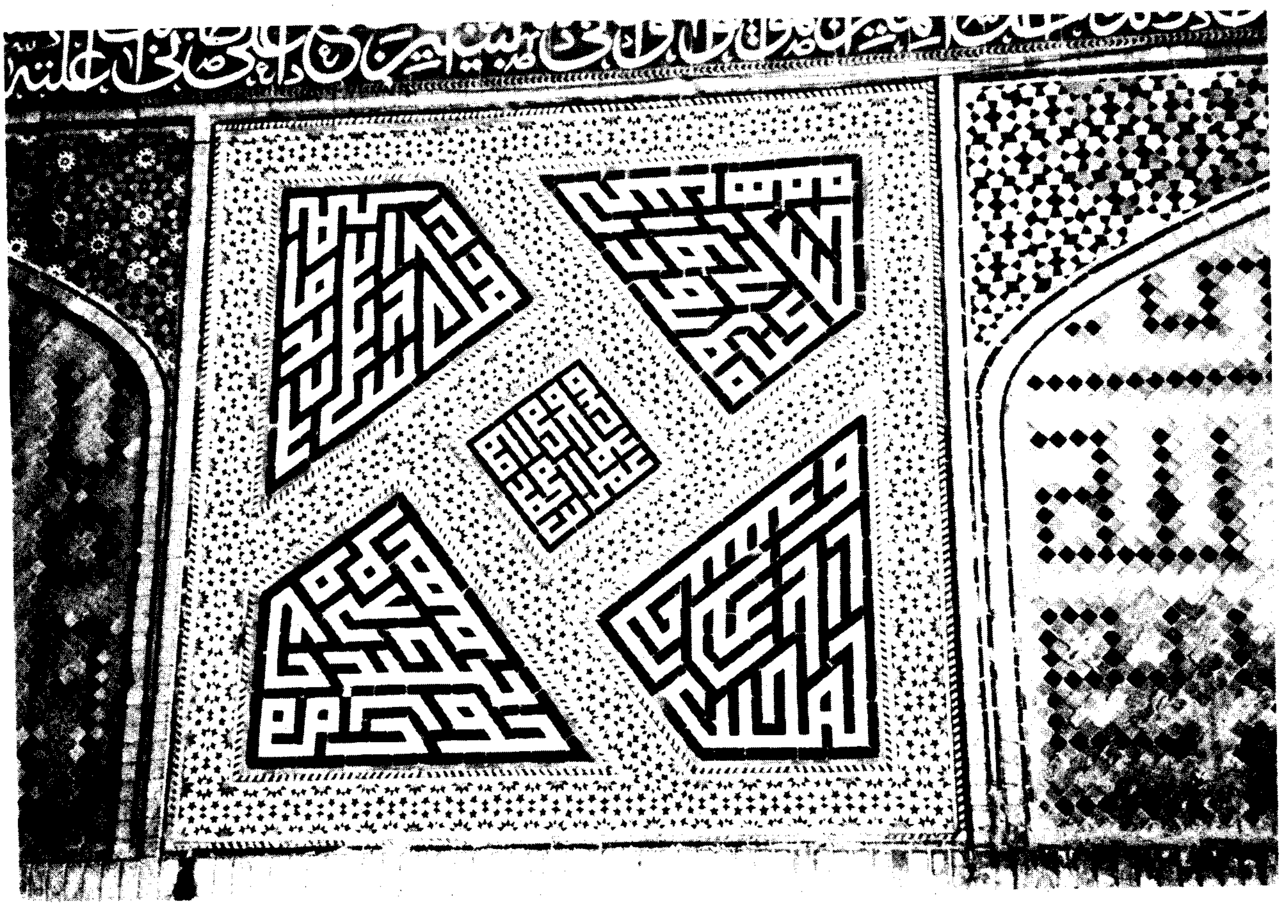
Dan trekken we met de liniaal AK en BT en we verlengen ze totdat ze de bogen AD en BG in M en L snijden. Ten slotte construeren we punt N als snijpunt van de cirkels met middelpunten M, L. Nu is $ABMNL$ de gevraagde vijfhoek.

Opgave
Voer deze constructie uit en controleer op de volgende (in het handschrift aangegeven) manier of hij correct is uitgevoerd: trek de cirkel met middelpunt N (en uiteraard straal AB) en verifieer dat deze cirkel gaat door het snijpunt m van BT en boog AE en het snijpunt l van AK en boog BE.

In deze constructie geldt dat tan $\angle KAB = \sqrt{3} - 1$, dus $\angle KAB = 36°12' \ldots$.
In een regelmatige vijfhoek zou deze hoek precies 36° moeten zijn. De constructie is dus niet exact, maar de fout zal in de praktijk niet opvallen. In het Perzische handschrift staan ook constructies waarbij de vaste passeropening gelijk is aan de diagonaal of de hoogte van de te construeren vijfhoek. De fout in deze constructies is van dezelfde orde van grootte.
De tiende-eeuwse Iraanse wiskundige Aboe'l-Wafā al-Boezdzjānī vond een exacte constructie van de vijfhoek met een vaste passeropening, die gelijk is aan de zijde van de te construeren vijfhoek.[5] Die constructie is heel ingewikkeld. Euclides had ook een exacte constructie van de regelmatige vijfhoek gegeven, maar daarbij moest de passer (minstens) tweemaal worden ingesteld.

Een vierkant in vijf stukken

De derde categorie problemen in het handschrift bestaat uit constructies van de meest uiteenlopende patronen en figuren, te gebruiken als decoratie. We geven hier als voorbeeld de verdeling van een vierkant in vier vliegers en een kleiner vierkant.



In deze mozaïek zit een gedicht verstopt. De labyrinth-achtige patronen in de vier vliegers blijken gestileerde letters te zijn.

Het basisidee is in moderne notatie als volgt. In een vierkant met zijde a worden op de vier zijden in cyclische volgorde vier punten gekozen op gelijke afstand $b < \frac{a}{2}$ van een hoekpunt, als in figuur 4. Door die te verbinden, ontstaan vier rechthoekige driehoeken en een nieuw vierkant, met een gebroken lijn aangegeven. Door elke driehoek in zijn gebroken schuine zijde te spiegelen, ontstaan de vier vliegers met zijden b en $a - b$ en weer een vierkant met zijde $x = a - 2b$.

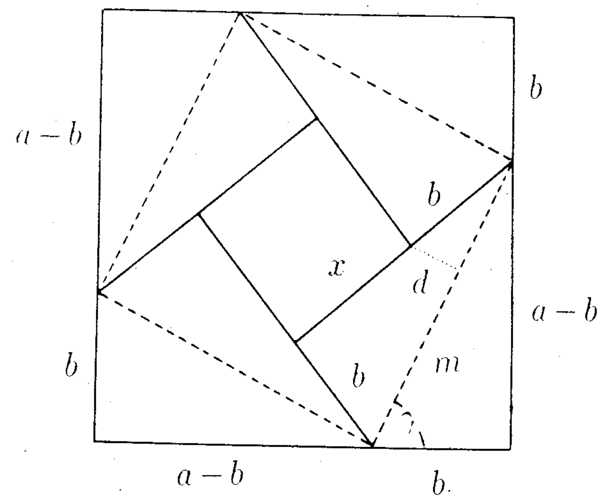


fig. 4

Door b te variëren, ontstaan op deze manier allerlei vormen.
De foto hiernaast is ook genomen in de Vrijdagmoskee te Isfahan. Men is hier begonnen het patroon van figuur 4 te tekenen voor het geval $x = b$, dus met $a = 3b$ en daarna heeft men een band gemaakt om de lijnen van het grondpatroon met dikte $c = \frac{b}{5} = \frac{a}{15}$. Dit kan gemakkelijk worden nageteld: de afstand tussen twee zonnetjes aan de zijkant van de figuur is ook c en de totale figuur heeft zijde $a + c = 16c$. Het overblijvende kleine vierkant en de vliegers zijn gevuld met een gedicht (zie het eind van dit artikel) en de band met een subtiel mozaïek.

Een raadselachtige figuur

Als afsluiting willen we de lezer laten kennismaken met één van de meer raadselachtige aspecten van de mozaïeken in het Iraanse handschrift. Lezers die niet van raadsels houden, kunnen beter niet doorlezen!
We gaan eerst even naar figuur 4 en stellen daarin d de lengte van de stippellijn, dat is de afstand van een hoekpunt van het kleinste vierkant tot de dichtstbijzijnde zijde van het middelste vierkant. We proberen d uit te drukken in a, b en x. Stel voor het gemak $b = 1$ en noem de zijde van het middelste vierkant m. Nu zijn de twee lange zijden van de vlieger gelijk, dus $a - b = b + x$ en $b = 1$, zodat met Pythagoras $m = \sqrt{1 + (1 + x)^2}$.
Uit gelijkvormigheid van driehoeken volgt $d/b = b/m$, dus $d = (1 + (1 + x)^2)^{-\frac{1}{2}}$. Ten slotte noemen we γ de grootste scherpe hoek van de rechthoekige driehoek tussen middelste en grootste vierkant.
Figuur 4 laat zien dat d in het algemeen niet gelijk is aan x. Als d wel gelijk is aan x krijgen we de situatie van figuur 5, die uit het handschrift is overgenomen. Plotseling zijn er een heleboel segmenten aan elkaar gelijk. In de figuur staan ook letters (die komen zo meteen aan de orde) en andere lijnen die de trapezia verdelen; de bedoeling van die lijnen is mij niet duidelijk!

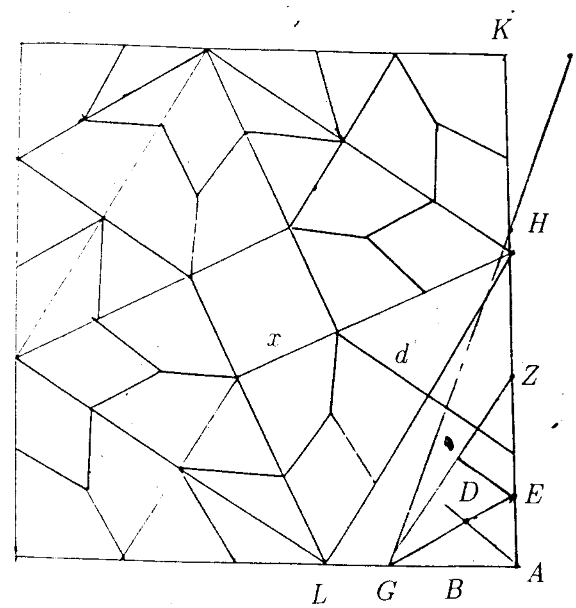


fig. 5

Het is niet zo gemakkelijk figuur 5 te tekenen, want uit $d = x$ volgt de vergelijking $x^4 + 2x^3 + 2x^2 - 1 = 0$. Deling door $(x + 1)$ levert $x^3 + x^2 + x - 1 = 0$. Deze vergelijking is irreducibel over de rationale getallen en daarom kan de figuur voor $d = x$ niet met passer en liniaal worden geconstrueerd[6].
We merken nog op dat de vergelijking één reële wortel $x_0 = 0.543689\ldots$ heeft en dat geldt $\tan\gamma = 1 + x_0$, dus $\gamma \approx 57°4'$.
In het handschrift staat niets van dit alles. Wel staat er bij figuur 5 een heel beknopte tekst met een benaderingsconstructie. Ik citeer:

> 'Lijn AD is de diagonaal van een vierkant. De lengten van AB, BG zijn gelijk en AD is gelijk aan AB. Vind E op het verlengde van GD. Beide segmenten EZ, ZH zijn gelijk aan AG. Verbind GH en trek uit K lijn KL evenwijdig aan GH. L is het gevraagde. God weet het het beste.'

Toelichting:
Blijkbaar begint men met een klein vierkantje van willekeurige grootte (dat verder niet getekend wordt) met diagonaal AD, in de hoek van het grote vierkant in figuur 5. We construeren nu punten B en G op de onderste zijde van het grote vierkant zodat $AB = BG = AD$ en we trekken GD en verlengen hem totdat hij de opstaande zijde door A van het grote vierkant in E snijdt. Dan construeren we Z en H op die opstaande zijde zodat $EZ = ZH = AG$.

We verbinden GH en trekken uit het hoekpunt K van het grote vierkant een lijn evenwijdig aan HG, die de onderste zijde in L snijdt. We hebben dan één hoekpunt L van het middelste vierkant gevonden. De rest is gemakkelijk. Hoe goed is deze benaderingsconstructie? Enig rekenwerk levert

$$\tan \angle ZGA = AZ : AG = \tfrac{8}{7}(2+\sqrt{2}) : 2\sqrt{2} = 1.546918,$$
$$\text{dus } \angle ZGA \approx 57°7'.$$

Omdat $HZ = AG$ is het blijkbaar de bedoeling dat ZG evenwijdig is aan de zijde van het middelste vierkant in figuur 5 (in figuur 4 met de gebroken lijn aangegeven). De benaderingsconstructie geeft dus een fout in de hoek γ van maar drie boogminuten!

Hoe zouden de Iraanse mozaiëkmakers aan deze benaderingsconstructie gekomen zijn? Ik weet het niet. Ik wil dit graag als open probleem aan de lezer opgeven, zonder te verwachten dat hij of zij het kan oplossen. Zoals gezegd, staan er veel lijnen in figuur 5 die onverklaard zijn en er staat ook een onverklaard getal '5' (het omgekeerde hartje boven de letter D). Misschien kan iemand met deze aanwijzingen het idee achter de constructie vinden!

Tot slot geven we het Perzische gedicht in de vier trapezia en het middelste vierkant op de derde foto. Hierin komt Ali voor, de eerste Imam van de shiïtische tak van de Islam en de naam van de maker van het mozaïek.

چون نامه جرم ما بهم پیچیدند
بردند و بمیزان عمل سنجیدند
پیش از همه کس گناه ما بود ولی
ما را بمحبت علی بخشیدند
عمل محمد حسین ابن محمد قوامی

Vertaling:

(linksonder)	Toen de lijst met onze misdaden werd opgerold
(linksboven)	Meegenomen en gewogen op de weegschaal van de (goede en slechte) daden
(rechtsboven)	Was onze schuld het zwaarst van allemaal, maar
(rechtsonder)	Wij kregen vergeving dankzij de liefde van Ali.
(midden)	Gemaakt door Mohammad Hossein ibn Mohammad Ghawāmī

Met dank aan de lezersredactie van de Nieuwe Wiskrant en speciaal aan Hushang A'lam en Mohammad Bagheri van het History of Science Department, Encyclopaedia Islamica Foundation, Teheran, Iran.

Noten

[1] Gülru Necipoğlu, *The Topkapi Scroll, geometry and ornament in Islamic architecture: Topkapi Palace Museum Library MS. H. 1956. With an essay on the geometry of the muqarnas by Moḥammad al-Asad.* Santa Monica, Ca. 90401-1455: Getty Center for the History of Art and the Humanities, 1995. ISBN 0-89236-335-5.

[2] Bulatov, M.S. (1988). *Geometricheskaya Garmonizatsiya v arkhitekture Srednei Azii IX - XV vv.* (Geometrische harmonisering in de architectuur van Centraal-Azië), Moskou: Nauka. [Russisch. De vertaling van het handschrift staat op blz. 315-340.]

[3] (Abū al-Wafā' al-Būzjānī) (1991). *Applied geometry, Abolvefa Mohammad ibn Mohammad Albuzjani, rewritten into modern Persian with appendices by Seyyed Alireza Jazbi*, Tehran: Soroush Press. [Perzisch.]

[4] De oorspronkelijke workshop in Engelse versie is te verkrijgen bij de schrijver, met een Perzische vertaling door Mehran Akhbarifar.

[5] Het gemakkelijkst toegankelijk in J.L. Berggren (1986). *Episodes in the Mathematics of Medieval Islam.* New York: Springer, pp. 94-96.

[6] Zie bijvoorbeeld M. Riemersma (1994). *Algebra, de brug tussen getallen en meetkundige constructies*, Utrecht: Epsilon Uitgaven no. 31.

Jan Hogendijk
Vakgroep wiskunde, Universiteit Utrecht
Postbus 80.010, 3508 TA Utrecht
email: hogend@math.ruu.nl.