Twee vertellingen over π

J. P. HOGENDIJK

Tekst van een voordracht, gehouden op de jaarlijkse studiedag van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, 27 oktober 1979 te Utrecht.

Dames en Heren,
De 'twee vertellingen over π', waarover deze voordracht gaat, zijn echt gebeurd; ze spelen zich af in de bloeitijd van de Islam. De hoofdpersonen van beide vertellingen zijn Islamitische meetkundigen: de eerste is Al-Kuhi, die in de tiende eeuw leefde, wat hij met π deed houd ik nog even geheim. De tweede vertelling gaat over Al-Kashi ($\pm$ 1430). Hij heeft 2π in 16 decimalen benaderd, zijn resultaat $2\pi = 6{,}2831853071795865$ is tot in de laatste decimaal correct.

> Er zijn een aantal redenen waarom ik deze twee vertellingen over π heb uitgekozen als onderwerp voor vandaag. Allereerst is π een getal dat je vaak tegenkomt in de dagelijkse praktijk van het onderwijs, en als zodanig dacht ik dat π wel paste in het thema van vandaag. Verder ligt het onderwerp in de sfeer van de geschiedenis van de wiskunde, op verzoek van de organisatoren. Tenslotte hoop ik dat ik met deze twee vertellingen de meesten van u iets zal vertellen dat hen nog niet bekend is; deze vertellingen zijn ook leuk omdat ze niet helemaal zonder verband zijn met wat vandaag in verschillende werkgroepen hier gebeurt, vooral in de werkgroepen over merkwaardige producten, kleine redeneringen en blikwisseling.
> De indeling van de lezing is verder als volgt. Eerst zal ik een korte inleiding geven over de wetenschap en de wiskunde in de Islam. Dan zal ik iets moeten vertellen over het werk van Archimedes.
> Hierop volgen de verhalen over Al-Kuhi en Al-Kashi.

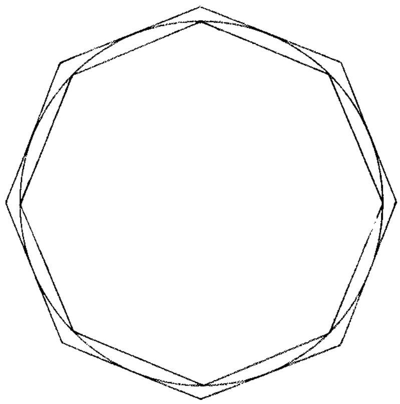
Zo'n 120 jaar na de dood van Mohammed, we leven dan in het jaar 750 na Chr., is Bagdad de hoofdstad van het Islamitische rijk. De kaliefen beginnen nu van Bagdad een centrum van wetenschap te maken, doordat zij zoveel mogelijk handschriften met wetenschappelijke werken in het Grieks, het Oud-Syrisch en het Sanskrit naar Bagdad laten komen, en daar laten vertalen. En vanaf dat moment ontstaat er een Islamitische wetenschap met een eigen karakter, een Islamitische wetenschappelijke traditie die bijvoorbeeld in Perzië tot ver in de 19e eeuw levend is gebleven. Met wetenschappen bedoel ik hier dan vooral geneeskunde, filosofie, wiskunde, natuurwetenschappen en aardwetenschappen. De taal van de wetenschappen blijft tot in de 15e eeuw het Arabisch, alhoewel lang niet alle geleerden die binnen deze traditie werkten Arabieren waren. Het meren-

deel was Moslim van andere nationaliteit (bijv. Perzen), en er waren ook Christelijke en Joodse geleerden, die binnen de Islamitische wetenschappelijke traditie gewerkt hebben.
Ik wil en kan hier geen overzicht geven van de ontwikkeling van die wetenschappen, of zelfs alleen van de wiskunde of de meetkunde; bovendien zou ik u dan moeten plagen met een hele lijst van Arabische namen, die u misschien wat vreemd in het gehoor zouden liggen. Ik zal mij beperken tot de namen Al-Kuhi en Al-Kashi.
De Islam heeft het bestuderen van de wetenschappen bijna altijd aangemoedigd: God wil namelijk, dat de mens studeert. Vandaar dat de wetenschappen vaak in een spiritueel kader geplaatst worden, dit zullen we straks ook zien in het werk van Al-Kuhi.
De wiskunde staat binnen de wetenschappen hoog in aanzien, niet alleen omdat ze toegepast kon worden, maar ook omwille van zichzelf. Want veel wiskundigen dachten, dat getallen en meetkundige figuren deel uitmaakten van een onvergankelijke, onstoffelijke wereld, die dichter bij God is dan onze stoffelijke aarde.
De wiskunde werd vooral van de 9e tot de 15e eeuw beoefend. Er zijn nog heel veel wiskundige teksten uit deze periode over, in bibliotheken over de hele wereld. Hiervan is maar een klein deel onderzocht, en vooral op het gebied van de meetkunde hebben we nog helemaal geen overzicht van wat er gepresteerd is. Daarom is het beeld van de Islamitische meetkunde, dat in samenvattende boeken over de geschiedenis van de wiskunde gegeven wordt, bijna altijd erg karikaturaal. De geleerden hebben veel meer gedaan dan in deze boeken vermeld staat. Soms vind je zelfs de opvatting dat de geleerden van de Islam 'ons' (wij westerlingen) weliswaar een dienst bewezen hebben, doordat ze de oude Griekse werken over meetkunde vertaald en bewaard hebben – zodat ze weer in het Latijn vertaald konden worden en wij er kennis van konden nemen – maar dat die geleerden verder niets anders konden dan het schrijven van droge en onvruchtbare commentaren. Dat is niet waar, en dat hoop ik u onder andere met deze voordracht te laten zien.
Want de Islamitische meetkundigen waren wel degelijk in staat tot creatieve prestaties. Hiervan wordt de laatste jaren steeds meer bekend, en zo is ook het werk van Al-Kuhi en Al-Kashi bekend geworden. Hierbij moet ik aantekenen dat het werk van Al-Kuhi over π nog niet vertaald en uitgegeven is. Over dit werk bestaan samenvattende artikelen, maar wie de finesses wil weten moet nog steeds het manuscript erbij halen.

Ik zal nu een samenvatting geven van een deel van het werk van Archimedes. Allereerst is in dit verband belangrijk de manier waarop Archimedes π benadert. Zijn idee is u waarschijnlijk wel bekend: benader de cirkelomtrek met omtrekken van regelmatige in- en omgeschreven veelhoeken die je kunt uitrekenen (zie fig. 1).

Ik voer enkele afkortingen in:

- r: straal van de cirkel
- i_n: omtrek van de ingeschreven regelmatige n-hoek
- o_n: omtrek van de omgeschreven regelmatige n-hoek
- z_n: zijde van de ingeschreven regelmatige n-hoek
- Z_n: zijde van de omgeschreven regelmatige n-hoek



Figuur 1

Archimedes doet in feite het volgende. Hij begint met de ingeschreven regelmatige zeshoek en de omgeschreven regelmatige twaalfhoek. Het is bekend dat

$$\frac{z_6}{r} = 1, \frac{Z_{12}}{r} = \frac{1}{\sqrt{3}} < \frac{153}{265}.$$

Archimedes spreekt niet over quotiënten maar over verhoudingen; ik heb dit gemakshalve in modernere terminologie vertaald.
Dan benadert hij $\frac{z_{2n}}{r}$ uit $\frac{z_n}{r}$ voor $n = 6, 12, 24, 48$; $\frac{Z_{2n}}{r}$ uit $\frac{Z_n}{r}$ voor $n = 12, 24, 48$.
Hij moet bij deze overgangen worteltrekken; hij geeft bij de overgang op $\frac{z_{2n}}{r}$ een afschatting van de wortel naar beneden, bij de overgang op $\frac{Z_{2n}}{r}$ een afschatting van de wortel naar boven.

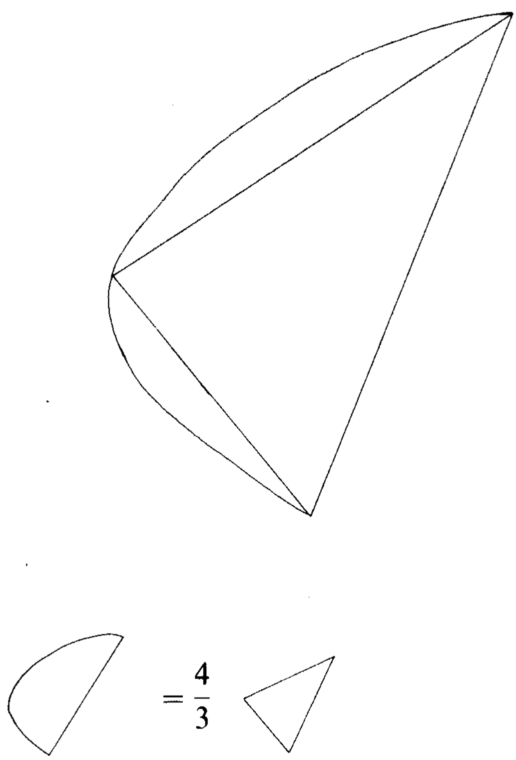
Zo geeft hij een exact bewijs van zijn eindresultaat:

$$3\frac{10}{71} < \frac{i_{96}}{2r} < \pi < \frac{o_{96}}{2r} < 3\frac{1}{7} \text{ ('Cirkelmeting', prop. 3)}$$

Het is eigenlijk anachronistisch hier het symbool π te gebruiken. Dit symbool werd pas in 1706 voor het eerst gebruikt, Archimedes spreekt over de verhouding van diameter en omtrek van de cirkel.

Ter introductie van het werk van Al-Kuhi moet ik u iets vertellen over de overlevering van het werk van Archimedes over oppervlakten, inhouden en zwaartepunten van figuren. Hiervan is slechts een gedeelte in het Arabisch vertaald, zodat de Islamitische geleerden niet alle resultaten van Archimedes kenden.
Wel vertaald in het Arabisch zijn de twee boeken over de bol en de cylinder van Archimedes, en zijn 'Cirkelmeting'; hierdoor waren zijn stellingen over omtrek en oppervlakte van de cirkel, oppervlakte en inhoud van de bol en het bolsegment, en manteloppervlakte van de kegel binnen de Islam bekend.
Men wist echter niet dat Archimedes ook de oppervlakte van de ellips, de inhoud

van de rotatielichamen van de ellips, een paraboolsegment en een hyperboolsegment, en de zwaartepunten van een paraboolsegment, zijn rotatielichaam en een bolsegment bepaald had. Verder heeft Archimedes de oppervlakte van het paraboolsegment bepaald, maar ook de boeken waarin hij dit resultaat bewijst zijn niet vertaald in het Arabisch. Archimedes noemt echter zijn stelling over de oppervlakte van het paraboolsegment in het voorwoord van zijn eerste boek over de bol en de cylinder. Omdat dit boek wel in het Arabisch vertaald was, wisten de Islamitische geleerden dat Archimedes de oppervlakte van het paraboolsegment bepaald had, al wisten ze niet hoe. Maar het duurde niet lang totdat zij zelf ook een bewijs vonden – op een andere manier. Spoedig daarna werden de stellingen over de inhoud van het rotatielichaam van het paraboolsegment en de oppervlakte van de ellips herontdekt en bewezen.

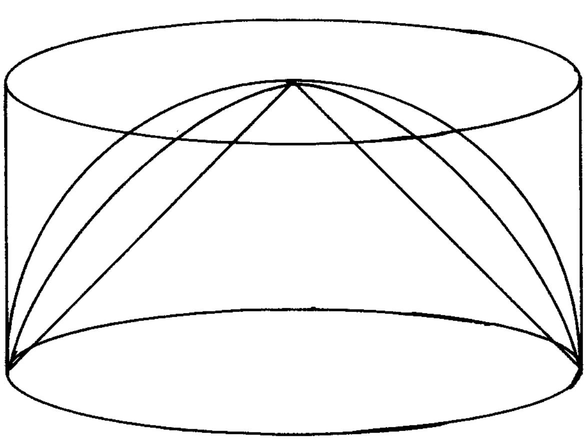


Figuur 2

Als ik zeg dat Archimedes of een Islamitische meetkundige de oppervlakte of inhoud van een figuur bepaalt, dan bedoel ik niet dat hij een formule geeft, maar dat hij bewijst dat de oppervlakte of inhoud van de figuur gelijk is aan bijvoorbeeld de oppervlakte van een bepaalde driehoek, of de inhoud van een bepaalde cylinder. Zo bewijzen Archimedes en zijn Islamitische collega's dat de oppervlakte van een paraboolsegment gelijk is aan vier derde maal de oppervlakte van de driehoek met dezelfde basis en top als het segment (fig. 2).
Nu komen we aan in de tiende eeuw, bij Al-Kuhi, die het werk heeft voortgezet waarmee zijn voorgangers in de negende eeuw begonnen waren. Maar laat ik u eerst iets over het leven van Al-Kuhi vertellen.
Al-Kuhi had in zijn jeugd niet zo'n serieuze instelling, hij hoorde bij een groepje

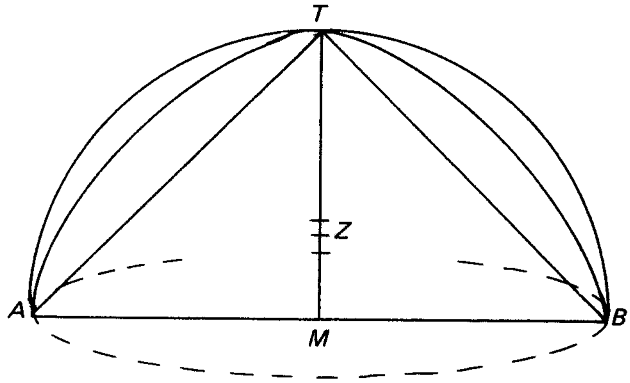
komedianten of acrobaten, die op de markten optraden. Maar daarna, zo gaat een biograaf verder, 'greep hem de zorg om de eeuwigheid', en hij wijdde zich aan de studie van de wetenschap. Hij werd een zeer vooraanstaand meetkundige, in de tweede plaats ook astronoom. Onder zijn leiding werd een observatorium gebouwd in de tuin van het koninklijk paleis te Bagdad; hier werden, alweer onder zijn leiding, astronomische waarnemingen gedaan. Al-Kuhi had veel leerlingen, een knap uiterlijk en is hoogbejaard geworden.
Er zijn een aantal van zijn uitspraken bewaard gebleven, onder andere: 'Door verheven, zuivere intentie wordt de mens datgene gegeven wat hij vraagt; niet door hard werken.' Toch heeft Al-Kuhi zelf hard gewerkt, er zijn ongeveer 40 meetkundige werken van hem bewaard gebleven, en hij moet er nog meer geschreven hebben.
Van de bewaarde werken zijn op dit moment zeven goed onderzocht, van de resterende 33 is vaak niet meer dan de titel bekend.

Al-Kuhi heeft o.a. de stelling die de inhoud van het rotatielichaam van een ellips geeft, herontdekt, en ook resultaten van Archimedes over zwaartepunten van het paraboolsegment, zijn rotatielichaam, en de halve bol. Dit heeft hij onafhankelijk van Archimedes gedaan, hij schrijft dat hem geen resultaten van anderen op dit gebied bekend waren.
We weten niet hoe Al-Kuhi zijn stellingen afgeleid heeft, want zijn grote leerboek in zes delen over de theorie van de zwaartepunten is verloren gegaan. Maar gelukkig noemt Al-Kuhi enkele van zijn resultaten in een bewaard gebleven correspondentie met een vriend (wiens naam ik niet zal noemen om uw geheugen niet met Arabische namen op de proef te stellen).
En nu komen we bij π terecht, want de vriend vraagt in zijn eerste brief (Ik geef overal vrije weergaven):
'Ik heb gehoord dat jij bewezen hebt, dat omtrek en diameter van de cirkel zich verhouden als twee gehele getallen.' De vriend vraagt hierover opheldering.
Al-Kuhi zegt in zijn antwoord het volgende:
Beschouw eens een halve bol, een omwentelingslichaam van een paraboolsegment, en een kegel, die alle drie in één en dezelfde cylinder ingeschreven zijn, als in fig. 3. Is het nu niet verbazingwekkend dat de inhouden van de halve bol, het rotatielichaam van het paraboolsegment en de kegel gelijk zijn aan respectievelijk



Figuur 3

twee derde, de helft en één derde van de inhoud van de cylinder? Dit wijst erop, dat God de dingen toch op wonderbaarlijke wijze geordend heeft!
Maar ik heb een nog mooiere volgorde gevonden in de zwaartepunten van sommige figuren!
Beschouw hiertoe een halve cirkel ABT met diameter AB, middelpunt M; $MT \perp AB$, en tegelijkertijd de gelijkbenige driehoek ABT en het paraboolsegment ABT van de parabool met top T, as TM, die door A en B gaat.
Als we deze drie figuren om TM draaien, ontstaan drie nieuwe: uit de halve cirkel een halve bol, uit het paraboolsegment een rotatielichaam en uit de driehoek een kegel, zie fig. 4.



Figuur 4

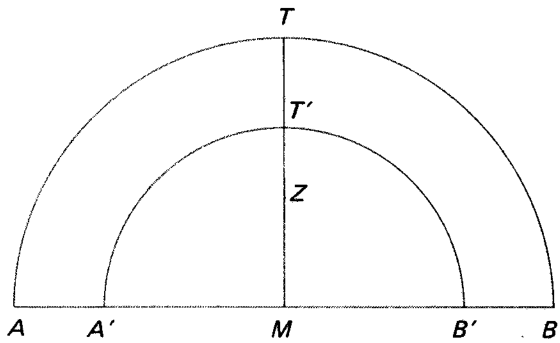
We duiden het zwaartepunt van elk van deze zes figuren aan met Z.
Nu vind je de volgende wonderbaarlijke ordening (die Al-Kuhi in een tabel geeft) in de verhoudingen $ZM:TM$

$ZM:TM$

vlakke figuren		omwentelingslichamen	
driehoek	1:3	kegel	1:4
paraboolsegment	2:5	omw. lichaam paraboolsegment	2:6
halve cirkel	3:7	halve bol	3:8

Dan gaat Al-Kuhi met zijn resultaat voor de halve cirkel aan het werk (fig. 5, notaties dezelfde als in fig. 4).
We weten: $ZM:TM = 3:7$.
Kies nu A' op MA zodat

$MA' = \frac{2}{3} MA$ en trek een nieuwe halve cirkel $A'B'T'$ met middelpunt M, als in de figuur.



Figuur 5

Nu past Al-Kuhi twee stellingen toe (die hij voor willekeurige cirkelsectoren en cirkelbogen formuleert).

1. Omdat Z het zwaartepunt is van de *halve cirkel* ATB, is Z ook zwaartepunt van de *boog* $A'T'B'$.
2. Omdat Z het zwaartepunt van de boog $A'T'B'$ is, geldt, dat de lengte van de boog $A'B'$ zich verhoudt tot de lengte van de rechte $A'B'$ als $A'M$ tot MZ.

Het bewijs van deze twee stellingen was te vinden in zijn grote zesdelige werk over zwaartepunten, we kunnen het dus helaas niet meer nalezen. De twee stellingen zijn echter wel waar, en ik geef u graag de opgave mee een bewijs ervoor te construeren.
Hierbij mag u dan geen moderne hulpmiddelen zoals symbolische notaties en integralen gebruiken, u moet een bewijs vinden zoals Al-Kuhi het ook gegeven zou kunnen hebben. Ik verwacht dat uw bewondering voor Al-Kuhi door deze oefening zeer zal toenemen.
De toepassing van de twee stellingen leidt tot het volgende resultaat:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\text{boog } A'B'}{A'B'} = \frac{A'M}{ZM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{TM}{ZM} = \frac{2}{3} \cdot \frac{7}{3} = \frac{14}{9},$$

dus $\pi = \frac{28}{9} = 3\frac{1}{9}$. (Al-Kuhi leidt dit op iets omslachtiger manier met gebruik van verhoudingen af)

Een droom is werkelijkheid geworden! Er is alleen een kleine moeilijkheid: Al-Kuhi kent de Cirkelmeting van Archimedes, en dus ook diens resultaat $3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}$. Nu is $3\frac{1}{9}$ wel kleiner dan $3\frac{1}{7}$, maar $3\frac{1}{9}$ is niet groter dan $3\frac{10}{71}$. Al-Kuhi heeft een slimme oplossing van dit probleem bedacht: de $3\frac{10}{71}$ is een verschrijving in het handschrift, er heeft oorspronkelijk $3\frac{10}{91}$ gestaan.

Wanneer de getallen $3\frac{10}{71}$ en $3\frac{10}{91}$ in het Arabisch in woorden worden uitgeschreven, lijken ze inderdaad veel op elkaar:

$3\frac{10}{71} =$ ثلاثة و عشرة اجزاء من احد و سبعين جزء

$3\frac{10}{91} =$ ثلاثة و عشرة اجزاء من احد و تسعين جزء

Alleen de twee woorden سبعين (70) en تسعين (90) zijn verschillend, en het verschil wordt nog kleiner wanneer men bedenkt dat de puntjes boven en onder de woorden vaak werden weggelaten in handschriften. Ik moet hierbij opmerken, dat Al-Kuhi misschien een versie van de Cirkelmeting van Archimedes kende, waarin het bewijs van de Archimedische benadering van π ontbrak.

Ik zal de verdere argumenten van Al-Kuhi laten rusten, en zelf enig commentaar op de redenering geven. Tot uw geruststelling kan ik zeggen dat Al-Kuhi's redenering inderdaad een fout bevat, de verhouding $ZM:TM = 3:7$ voor de halve cirkel is onjuist. Alle andere waarden voor $ZM:TM$ in de tabel kloppen wel, en in de tweede brief van Al-Kuhi aan zijn vriend komt de aap uit de mouw: Al-Kuhi heeft zijn resultaten voor de vijf andere gevallen meetkundig bewezen, maar zijn resultaat voor de halve cirkel nog niet.

Al-Kuhi wijt dit echter uitsluitend aan zijn eigen onkunde. De verhouding $ZM:TM$ moet immers wel 3:7 zijn, wegens het bestaan van de wonderbaarlijke ordening – het zou toch heel vreemd zijn, wanneer die verhouding niet 3:7 was. Daar moet u niet om lachen, want Al-Kuhi bedoelde dit heel serieus.

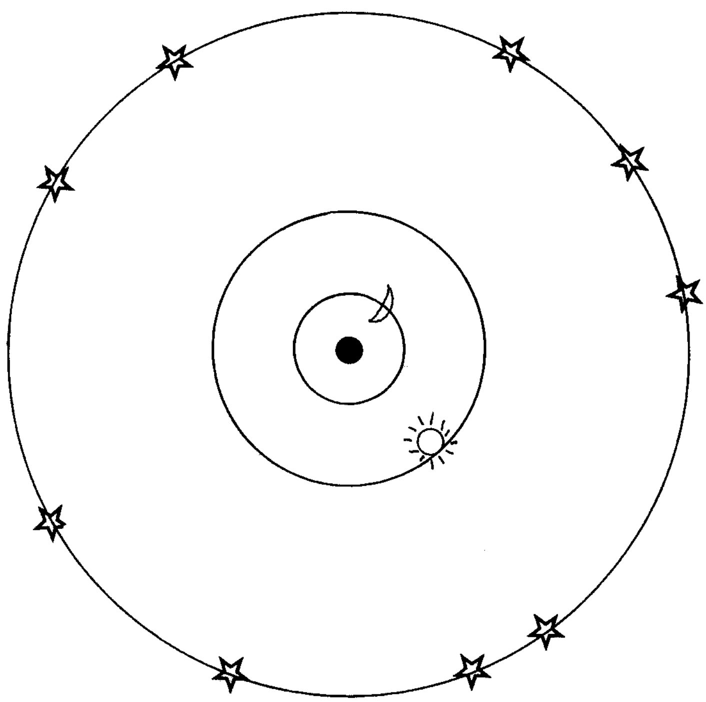
Het juiste resultaat voor de halve cirkel is $ZM:TM = 4:3\pi$, maar dit is feitelijk ook wat Al-Kuhi afleidt door zijn twee stellingen uit zijn leerboek over zwaartepunten toe te passen! We kunnen zijn redenering zelfs als volgt weergeven: Hij leidt af $ZM:TM = 4:3\pi$, wegens filosofische redenen moet gelden $ZM:TM = 3:7$, conclusie: $\pi = \frac{28}{9}$.

De redenering van Al-Kuhi is dus minder fout dan op het eerste gezicht zou worden vermoed.

We kunnen verder het volgende zeggen; wat Al-Kuhi nog wilde doen – het bepalen van het zwaartepunt van de halve cirkel – had hij in feite al gedaan. Dat zag hij zelf niet, hiervoor had hij het probleem van een heel andere kant moeten bezien – iets dat wij tegenwoordig wel een blikwisseling noemen. Het lijkt mij dat een dergelijke blikwisseling erg moeilijk geweest zou zijn voor Al-Kuhi: daarvoor had hij zijn geloof in de wonderbaarlijke ordening van de zwaartepunten moeten opgeven.

Van het vervolg van het verhaal weten we weinig; we weten niet, hoe de collega's van Al-Kuhi op deze vondst gereageerd hebben, en of de blikwisseling later toch is opgetreden. Er zijn slechts een paar kritieken bewaard gebleven van mensen, die de wiskunde van Al-Kuhi niet helemaal begrepen. Zo horen we dat onder de sterrenkundigen de mening heerste, dat omtrek en diameter van de cirkel zich niet als twee gehele getallen konden verhouden, omdat een rechte lijn en een cirkel twee lijnstukken 'van verschillende soort' waren. (Hierop antwoordde Al-Kuhi dat Archimedes toch bewezen had dat de oppervlakken van een bol en een kegel toch ook een rationale verhouding konden hebben, twee oppervlakken die toch veel meer van elkaar verschilden dat twee eenvoudige delen van het platte vlak; een cirkel en het vierkant van de straal)

U heeft nu een onjuiste berekening gezien van een Islamitische geleerde. De geleerden in de Islam hebben ook juiste berekeningen van π uitgevoerd, en ik wil het laatste gedeelte van mijn voordracht besteden aan zo'n juiste berekening, namelijk de berekening van de 15e-eeuwse rekenmeester Al-Kashi.
Al-Kashi hoorde tot een groep van 60 à 70 wiskundigen en sterrenkundigen die in de jaren 1420–1430 in Samarkand werkten. Samarkand ligt tegenwoordig in de Sovjet-Unie, niet ver van de Afghaanse grens. De wis- en sterrenkunde kwamen in deze periode in Samarkand tot grote bloei, onder andere omdat de plaatselijke koning een goed wis- en sterrenkundige was.
Voordat ik Al-Kashi's berekening van π kan bespreken moet ik laten zien hoe het heelal er in die periode uitzag in de ogen van de astronomen.
In het begin van zijn brief over de cirkelomtrek zegt Al-Kashi (ik geef steeds vrije aarde op 13.500 km (in tegenwoordige lengtematen uitgedrukt). Om de aarde draaiden zon, maan en planeten, daarbuiten was de sfeer van de vaste sterren, die eenmaal in 24 uur om de aarde draaide. Men schatte de diameter van deze buitenste sfeer op 20.000 aarddiameters, dit is 270 miljoen km. Zie fig. 6.
In het begin van zijn brief over de cirkelomtrek zegt Al-Kashi (ik geef steeds vrije weergaves): Archimedes heeft bewezen dat de verhouding van omtrek en diameter groter is dan $3\frac{10}{71}$ en kleiner dan $3\frac{1}{7}$. Het verschil van deze twee waarden is $\frac{1}{497}$, als we de omtrek van een cirkel met diameter 270 miljoen km willen uitrekenen, geeft dit een onnauwkeurigheid van $\pm$ 550.000 km. Later heeft men π nauwkeuriger benaderd, maar toch zo, dat de onzekerheid in de omtrek van deze cirkel nog steeds $\pm$ 100.000 km is. Als we oppervlakten of inhouden willen berekenen, kan de onnauwkeurigheid nog veel groter worden.

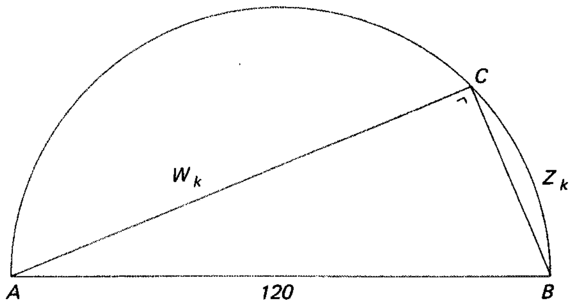


Figuur 6

Kennelijk is het de bedoeling van Al-Kashi geweest, π zo goed te benaderen, dat deze benadering voor altijd nauwkeurig genoeg zou zijn, want nu maakt hij bekend, wat hij van plan is: hij wil een benadering van π berekenen met een zo grote precisie, dat men de omtrek van een cirkel met diameter 600.000 aarddiameters met een onnauwkeurigheid van hoogstens een haarbreedte kan bepalen.
De haarbreedte is een goed gedefinieerde lengtemaat van ongeveer 0,5 mm, de cirkel die Al-Kashi hier beschouwt heeft een straal van ruim 4 miljard kilometer, ongeveer de afstand van de planeet Pluto tot de zon.
Ikzelf vind het opvallend dat deze cirkel in de wereld van Al-Kashi helemaal niet bestaan kan (de diameter van de sfeer van de vaste sterren was immers slechts 20000 aarddiameters), dit verhindert Al-Kashi blijkbaar niet, toch over een dergelijke cirkel na te denken.

Al-Kashi kiest een nieuwe cirkel met straal 60, en toont aan dat het voldoende is, de omtrek van deze cirkel met een precisie van 60^{-8} te bepalen, om de vereiste nauwkeurigheid van π te bereiken.
De omtrek van deze cirkel wil hij benaderen door de omtrek van een geschikte regelmatige ingeschreven 3.2^n-hoek te berekenen: deze omtrek kan immers voor elke n met willekeurige precisie berekend worden uitgaande van de ingeschreven regelmatige zeshoek.
Ik herinner u aan mijn notaties i_k en o_k voor de omtrekken van respectievelijk de ingeschreven en omgeschreven regelmatige k-hoek.
Al-Kashi moet nu een n bepalen zodat $i_{3.2^n}$ minder dan 60^{-8} van de cirkelomtrek verschilt. Aan deze voorwaarde is zeker voldaan wanneer $i_{3.2^n}$ en $o_{3.2^n}$ minder dan 60^{-8} van elkaar verschillen. In een vernuftig bewijs toont Al-Kashi aan, dat dit laatste het geval is wanneer n minstens 28 is. Al-Kashi ziet zich dus de taak gesteld $i_{3.2^{28}}$ te berekenen: de omtrek van een regelmatige ingeschreven 800.335.168-hoek. Hij hoeft $o_{3.2^{28}}$ niet uit te rekenen, immers hij weet van te voren, dat $i_{3.2^{28}}$ minder dan 60^{-8} van de cirkelomtrek verschilt. In dit opzicht is zijn methode dus een duidelijke vooruitgang op de methode van Archimedes.
Al-Kashi stelt zich ook de vraag hoe nauwkeurig, dat wil zeggen in hoeveel sexagesimalen, hij zijn berekeningen moet uitvoeren. Al-Kashi geeft zijn berekeningen niet in het decimale, maar in het sexagesimale stelsel, het talstelsel met grondtal 60. Om zijn redenering te kunnen begrijpen, moeten we eerst de methode beschouwen waarmee hij $i_{3.2^{28}}$ berekent.
Essentieel hierin is de manier waarop Al-Kashi van de regelmatige ingeschreven k-hoek op de regelmatige ingeschreven $2k$-hoek overgaat. Ik noem de zijde van de regelmatige ingeschreven k-hoek weer z_k, z_k is de koorde van een boog van $\frac{360}{k}$ graden.

Al-Kashi berekent voor $k = 6, 12, 24, \ldots, 3.2^{27}$ niet z_k, maar een andere grootheid die ik w_k zal noemen, w_k is de koorde van een boog van $180 - \frac{360}{k}$ graden. In fig. 7 is AB de diameter van de cirkel, $BC = z_k$, $AC = w_k$. De stelling van Pythagoras levert ons het verband tussen z_k en w_k: $z_k{}^2 + w_k{}^2 = AB^2 = 120^2$ (de straal van de cirkel is 60). Al-Kashi bewijst, dat w_{2k} uit w_k berekend kan worden via
$w_{2k}^2 = 60\,(120 + w_k)$.



Figuur 7

Al-Kashi berekent eerst zijn 'startwaarde' $w_6 = 60\sqrt{3}$, dan voor $n = 1, 2, \ldots, 26$ $w_{3.2^{n+1}}$ door de vierkantswortel te trekken uit $60(120 + w_{3.2^n})$. Hierna kunnen $(w_{3.2^{28}})^2$ en $6z(z_{3.2^{28}})^2$ berekend worden uit

$$w_{2k}^2 = 60\,(120 + w_k) \text{ voor } k = 3.2^{27} \text{ en } z_k^2 + w_k^2 = 120^2 \cdot \text{voor } k = 3.2^{28}.$$

Tenslotte volgt $z_{3.2^{28}}$ door worteltrekking.
Voor de nauwkeurigheid waarmee gerekend moet worden heeft een en ander het volgende te betekenen: $i_{3.2^{28}}$ moet met een precisie van 60^{-8}, dus in 8 sexagesimalen nauwkeurig berekend worden. Omdat 3.2^{28} ongeveer 60^5 is, moet elke zijde van de regelmatige ingeschreven 3.2^{28}-hoek in 13 sexagesimalen worden berekend. $z_{3.2^{28}}$ wordt verkregen door worteltrekking; $z_{3.2^{28}}$ is ongeveer zo groot als het 3.2^{28}-e deel van de cirkelomtrek, en daarom kan Al-Kashi een schatting geven van de orde ervan: $z_{3.2^{28}} \approx 60^{-4}$. Daarom moet het kwadraat in 17 sexagesimalen bekend zijn, om door worteldeling $z_{3.2^{28}}$ zelf in 13 sexagesimalen te berekenen (zo moet mijns inziens de redenering van Al-Kashi geweest zijn, de tekst geeft hierover niet helemaal uitsluitsel, wellicht doordat de kopiïst hem verkeerd heeft overgeschreven).
Dus moet ook het kwadraat van $w_{3.2^{28}}$ in 17 sexagesimalen berekend worden. Het verband tussen dit kwadraat en $w_{3.2^{27}}$ wordt gegeven door de formule $w_{2k}^2 = 60(120 + w_k)$ voor $k = 3.2^{27}$, wegens het voorkomen van de 60 in deze formule moet $w_{3.2^{27}}$ tot in 18 sexagesimalen bepaald worden. Al-Kashi besluit alle $w_{3.2^n}$ in 18 sexagesimalen te berekenen.
Om $z_{3.2^{28}}$ te berekenen moet Al-Kashi 28 maal een vierkantswortel trekken. De overige rekenoperaties die hij moet uitvoeren (vermenigvuldigen met 60, optellen van 120) zijn zeer eenvoudig in het sexagesimale stelsel, zodat de worteltrekkingen de hoofdschotel vormen. In fig. 8 vindt u de eerste worteltrekking. Al-Kashi berekent hier w_6, de koorde van een boog van 120 graden, $w_6 = 60\sqrt{3} = \sqrt{3.60^2}$.
Al-Kashi controleert alle worteltrekkingen door van het antwoord weer het kwadraat uit te rekenen.
Tenslotte geeft Al-Kashi $i_{3.2^{28}}$, in sexagesimalen en in decimalen, volledigheidshalve ook $w_{3.2^{28}}$ en $o_{3.2^{28}}$ (berekend uitgaande van $i_{3.2^{28}}$), en 2π in sexagesimalen en decimalen. In decimale notatie ('met Indische cijfers') is zijn resultaat

$$2\pi = 6{,}2831853071795865, \text{ tot in de laatste decimaal correct.}$$

De eerste berekening. Uitkomst: De koorde van een derde deel van de omtrek, dat is de koorde van het supplement van het zesde deel 6

eerste macht	graad	minuten	tweeden	derden	vierden	vijfden	zesden	zevenden	achtsten	negenden
1	43	55	22	58	27	57	56	0	44	25

31	tienden
42	elfden
1	twaalfde
56	dertienden
22	veertienden
42	vijftienden
48	zestienden
58	zeventienden
57	achttienden

weegschaal	tweede macht	eerste macht	graad	minuut	tweede	derde	vierde	vijfde	zesde	zevende	achtste	negende	tiende	elfde	twaalfde	dertiende	veertiende	vijftiende	zestiende	zeventiende	achttiende	
	3	0	0																			
	1																					
	2										1	49	48	49	59	43	34	47	7	9	35	
	1	56	49								1	47	23	13	44	24	53	51	52	45	54	
		3	11									2	25	36	15	18	40	55	14	23	41	
		3	9	40	25							2	25	29	32	9	51	9	6	25	2	
			1	19	35									6	43	8	49	46	7	58	39	
			1	16	12	28	4							3	27	50	45	56	55	55	52	
				3	22	31	56							3	15	18	3	49	12	2	47	
54				3	20	55	3	28	4					3	13	59	22	53	8	12	8	
					1	36	52	31	56						1	18	40	56	3	50	39	
11					1	33	31	50	40	24	9				1	16	12	36	50	52	30	
						3	20	41	15	35	51					2	28	19	12	58	9	
6						3	17	27	13	39	4	12	9			2	25	29	32	9	51	
							3	14	1	56	46	47	51				2	49	40	48	17	
24							3	13	59	22	53	8	11	16	16		2	46	16	36	46	
								0	2	33	53	39	39	43	44			3	24	11	31	
																		3	20	55	4	
36									2	32	25	13	41	45	0	58	8	32	16 3	16	27	
										1	28	25	57	58	43	1	51	27	44			
13										1	26	36	9	8	43	18	16	40	36	50	25	
											1	49	48	49	59	43	34	47	7	9	35	
43											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	25	
33										3	27	50	45	56	55	55	52	0	44			
									3	27	50	45	56	55	55	52	0					
51								3	27	50	45	56	55	54	56				3	27	50	45
56							3	27	50	45	56	54	57					3	27	50	45	56
31						3	27	50	45	56	27						3	27	50	45	56	55
5					3	27	50	44	58							3	27	50	45	56	55	55
43				3	27	50	22								3	27	50	45	56	55	55	52
25			3	26	55									3	27	50	45	56	55	55	52	1
		2	43										3	27	50	45	56	55	55	52	1	28
	1											3	27	50	45	56	55	55	52	1	28	50

Figuur 8

Toelichting bij fig. 8.

Al-Kashi noteert gehele en niet-gehele getallen in het sexagesimale stelsel, echter zonder gebruik te maken van een komma of een hieraan equivalent symbool. Zijn systeem is het volgende:

> 1×60^n heet een n-de macht ($n \geqq 1$), een eenheid heet een graad,
> 1×60^{-1} heet een minuut, 1×60^{-2} heet een tweede (of: seconde),
> 1×60^{-3} heet een derde, algemeen heet 1×60^{-m} een m-de($m \geqq 2$).

Al-Kashi noteert nu het getal $2.60 + 53 + 1.60^{-1} + 24.60^{-2}$ als 2 eerste machten, 53 graden, 1 minuut en 24 tweeden, of als 2 53 1 24 tweeden.
Al-Kashi gebruikt om de getallen 1 tot en met 59 aan te duiden geen 59 verschillende symbolen, maar een letterschrift, dat feitelijk een Arabische vertaling is van een letterschrift uit de Griekse oudheid. Hierin worden de getallen 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 30, 40, 50 met verschillende letters aangeduid; het getal 23 bijv. wordt genoteerd met de letter voor het getal 20 en daarachter de letter voor het getal 3.
In de bovenstaande berekening trekt Al-Kashi de vierkantswortel uit 3 tweede machten. Het antwoord: 1 43 55 22 58 27 56 0 44 25 31 42 1 56 22 42 48 58 57 achttienden is boven in de tabel te vinden.
Hij vindt dit antwoord (dat ik met a zal aanduiden) op de volgende manier: Omdat $a^2 = 3.60^2$ zal het hoogste getal in de sexagesimale schrijfwijze van a een eerste macht zijn. Schrijf a in het sexagesimale stelsel,

$$a = a_{-1}.60 + a_0 + a_1.60^{-1} + .. + a_{18}.60^{-18} + .. \quad 0 \leqq a_i \leqq 59$$

Al-Kashi gebruikt hulpgetallen b_i, die hij onderaan in de tabel noteert:
$b_{-1} = a_{-1} \cdot 60^2$, $b_i = 2a_{-1} \cdot 60^{-i+1} + \ldots + 2a_{i-1} \cdot 60^{-2i+1} + a_i \cdot 60^{-2i}$ voor $i \geqq 0$.
a_{-1} is het grootste gehele getal met $a_{-1}{}^2 \leqq 3$,
$b_{-1} = a_{-1}.60^2 = 1$ tweede macht (onderste regel tabel),
$a_{-1}.60^2 = a_{-1} \cdot b_{-1} = 1$ tweede macht (regel 2 van boven)
$a^2 - (a_{-1} \cdot 60)^2 = a^2 - a_{-1} \cdot b_{-1} = 3$ tweede machten (r.1 v.b) $-$ 1 tweede macht (r.2 v.b)
$= 2$ tweede machten (r.3 v.b) $= 2.60^2$.
a_0 is het grootste gehele getal met $a_0 \cdot (2a_{-1} \cdot 60 + a_0) \leqq 2.60^2$, $a_0 = 43$.
$b_0 = 2a_{-1} \cdot 60 + a_0 = 2\ 43$ graden (r.2 v.o),
$a_0 \cdot b_0 = 1\ 56\ 49$ graden (r.4 v.b)
$a^2 - (a_{-1} \cdot 60 + a_0)^2 = (a^2 - a_{-1} \cdot b_{-1}) - a_0 \cdot b_0 = 2\ 0\ 0$ graden $-$ 1 56 49 graden $=$ 3 1 1 graden (r.5 v.b).
a_1 is het grootste gehele getal met $a_1 \cdot 60^{-1}(2a_{-1} \cdot 60 + 2a_0 + a_1 \cdot 60^{-1}) = a_1(2a_{-1} + 2a_0 \cdot 60^{-1} + a_1 \cdot 60^{-2}) \leqq 3\ 1\ 1$ graden, $a_1 = 55$.
$b_1 = 2a_{-1} + 2a_0 \cdot 60^{-1} + a_1 \cdot 60^{-2} = 3\ 26\ 55$ tweeden (r.3 v.o)
$a_1 \cdot b_1 = 3\ 9\ 40\ 25$ tweeden (r. 6 v.b)
$a^2 - (a_{-1} \cdot 60 + a_0 + a_1 \cdot 60^{-1})^2 = (a^2 - a_{-1} \cdot b_{-1} - a_0 \cdot b_0) - a_1 \cdot b_1 = 3\ 1\ 1$ graden $-$ 3 9 40 25 tweeden $=$ 1 19 35 tweeden (r.7 v.b).

Zo vormen zich in de tabel rijen getallen naar beneden en naar boven. Na het vinden van a_9 en b_9 begint Al-Kashi weer bovenaan, respectievelijk onderaan en vervolgt de berekeningen.
Al-Kashi gebruikt de 59-proef ('weegschaal') om zijn berekeningen te controleren. Deze proef berust o.a. op het feit dat in het zestigtallig stelsel ieder getal modulo 59 congruent is met de som van zijn sexagesimalen. Voorbeeld: het product van $a_3 = 58$ en $b_3 = 3\ 27\ 50\ 44\ 58$ zesden (r. 5 v.o) is gelijk aan 3 20 55 3 28 4 zesden (r. 10 v.b). $3 + 27 + 50 + 44 + 58 = 182 \equiv 5 \pmod{59}$, $3 + 20 + 55 + 3 + 28 + 4 = 113 \equiv 54 \pmod{59}$, en inderdaad is nu $3\ 27\ 50\ 44\ 58 \times 58 \equiv 5 \times 58 = 290 \equiv 54 \pmod{59}$. Al-Kashi noteert de getallen 5 en 54 onder 'weegschaal'.
De tabel waarin Al-Kashi ter controle het kwadraat van $a = 1\ 43\ 55\ 22\ 58\ 27\ 56\ 0\ 44\ 25\ 31\ 42\ 1\ 56\ 22\ 42\ 48\ 58\ 57$ achttienden berekent is hier niet weergegeven.

Al-Kashi is met dit resultaat recordhouder geweest tot 1596, in dat jaar benaderde Ludolf van Ceulen π in 20 decimalen nauwkeurig. Maar Ludolf van Ceulen heeft niet geweten, dat hij hiermee het record van Al-Kashi brak, want het werk van Al-Kashi is in het westen onbekend gebleven tot 1950.

Dames en Heren,
Ik heb grote bewondering voor deze prestatie van Al-Kashi, en ik hoop, dat dat bij u hetzelfde is. We moeten steeds bedenken, dat Al-Kashi niet de beschikking had over onze symbolische notaties (waarvan ik in het voorgaande dankbaar gebruik gemaakt heb). Hij moest alle gelijkheden, waarvoor wij deze notaties gebruiken, uitdrukken als gelijkheden van oppervlakten van rechthoeken, vierkanten, driehoeken enzovoort – op een manier waarvan wel eens gezegd wordt dat zij tot de 'knip- en plakwiskunde' behoort.
U moet beide vertellingen over π dan ook ten dele als pleidooi zien, om 'primitievere' vormen van wiskunde niet als minderwaardig te beschouwen. Deze vormen hebben hun nut gehad in de ontwikkeling van de mensheid als geheel, er zijn prachtige resultaten mee bereikt, en naar mijn idee hebben dergelijke 'primitievere' vormen nog steeds hun nut in de ontwikkelingsgang van ieder menselijk individu.
In het bijzonder zou ik mijn tweede vertelling als ondertitel willen meegeven: 'Hoe we met knip- en plakwiskunde 2π in 16 decimalen kunnen benaderen.'
Ik dank u voor uw aandacht.

Literatuur

Geschiedenis van de wiskunde, algemeen:
D. J. Struik, Geschiedenis van de Wiskunde, Amsterdam, 1977.
Archimedes:
E. J. Dijksterhuis, Archimedes, Groningen, 1938 (vervolgd in de jaargangen 1938–1944 van Euclides). Van dit werk van Dijksterhuis bestaat een Engelse vertaling, uitgegeven onder de titel 'Archimedes', Kopenhagen 1956.
Islamitische traditie:
A. P. Juschkewitsch, Geschichte der Mathematik im Mittelalter, Leipzig, 1964.
F. Sezgin, Geschichte des Arabischen Schrifttums, Band V, Mathematik, Leiden 1974 (gaat tot het jaar 1050).
Al-Kuhi: zie p. 314–321 van het boek van F. Sezgin, voor het werk van Al-Kuhi over π zie
J. L. Berggren, The barycentric theorems of Abū Sahl al-Kūhi. Abstracts of Session Papers of the Second International Symposium on the History of Arabic Science, Aleppo, 5–12 april 1979, p. 48.
J. Sesiano, Note sur trois théorèmes de Mécanique d'al-Qūhī et leur conséquence. Centaurus 22/1979/281–297.
Al-Kashi's werk over π:
P. Luckey, Der Lehrbrief über den Kreisumfang von Ǧamsid b. Mas'ud al-Kaši. Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik und allgemeine Naturwissenschaften, 1950/6.
Een handschrift met de brief van Al-Kashi over π is in facsimile gepubliceerd in: B. A. Rosenfeld, V. S. Segal, A. P. Juschkewitsch, Dzemsid Giyaseddin al-Kasi, Klyuč arifmetiki, Traktat ob obkruznosti, Moskou 1956, p. 338–424. De tabel van fig. 8 bevindt zich in dit boek op p. 420, in het artikel van P. Luckey op p. 12 (Duits) en p. 84 (Arabisch).

Tenslotte dank ik Dr. J. L. Berggren, omdat hij mijn aandacht gevestigd heeft op het werk van Al-Kuhi over π.