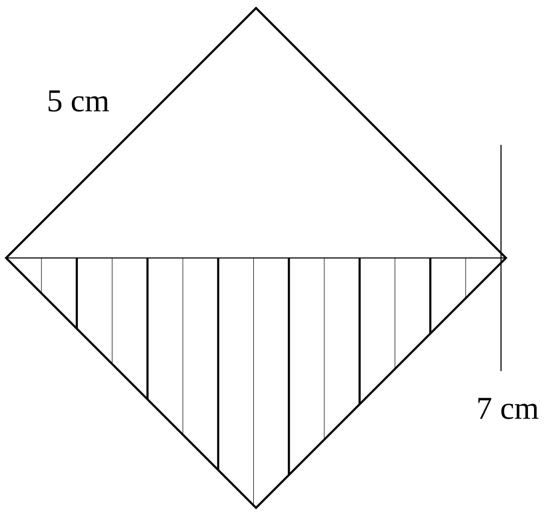
Vergeten Wortels

Oratie, gehouden door Jan Hogendijk in Utrecht op vrijdag 12 januari 2007, 16.15 - 17.00 uur.

Mijnheer de Rector Magnificus, geachte aanwezigen,

Wiskunde heeft een heel oude geschiedenis, waaraan veel culturen hebben bijgedragen. In deze oratie wil ik graag iets laten zien van de manieren waarop diverse culturen hebben bijgedragen aan de oplossing en toepassing van twee eeuwenoude problemen. Hieraan zal ik enkele opmerkingen over onderwijs en onderzoek in de geschiedenis van de wiskunde vastknopen, en ik hoop ook iets van mijn fascinatie met het vakgebied te laten zien.

Het eerste probleem is: het berekenen we de diagonaal van een vierkant, als de zijde bekend is.

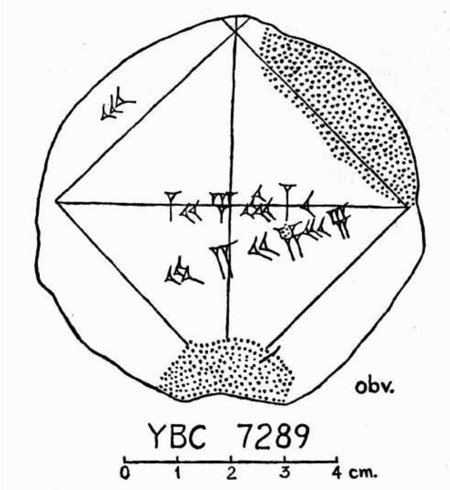


Figuur 1. Het eerste probleem: zijde en diagonaal

Laten we eerst eens een experiment uitvoeren. In Figuur 1 is een vierkant met zijde precies 5 centimeter lang getekend. De strepen onder de diagonaal liggen precies een halve centimeter uit elkaar, te beginnen met het hoekpunt aan de linkerkant. Het vierkant steekt nog een klein puntje uit buiten de laatste lijn aan de rechterkant, en zo zien we dat de diagonaal een heel klein beetje meer dan 7 centimeter lang is. In het algemeen is de diagonaal iets meer dan 1,4 maal de zijde.

1. Een Babylonisch kleitablet

Het probleem van de diagonaal van een vierkant is al meer dan 3600 jaar oud. Figuur 2 is een tekening van een Babylonisch kleitablet waarop het probleem wordt opgelost. Volgens experts in het spijkerschrift is het tablet vermoedelijk geschreven omstreeks 1700 voor Christus door een leerling-schrijver.[1] Het tablet is in het begin van de twintigste eeuw ergens in Zuid-Irak opgegraven, de precieze plaats is niet bekend. Het wordt nu bewaard in de Yale Babylonian Collection in de Verenigde Staten.



Figuur 2. Babylonisch kleitablet

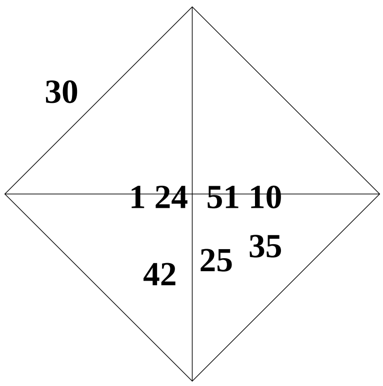
Ik vind het in mijn onderwijs belangrijk mijn studenten zoveel mogelijk in contact te brengen met originele bronnen, liefst in een vorm die zo dicht mogelijk bij het origineel ligt. Zo kan een uiteenzetting over een bepaalde periode verankerd worden in materiaal uit die periode. Als het kan, laat ik de studenten zoveel mogelijk hun eigen interpretatie van de bronnen uitwerken, om hen zelf in de positie van historicus te plaatsen. Dit ideaal kan bij dit tablet helemaal worden gerealiseerd omdat er alleen een figuur en getallen op staan. Meestal geef ik de studenten nog een paar extra tekeningen van an-

[1]Het tablet is gepubliceerd in: O. Neugebauer, A. Sachs, *Mathematical Cuneiform Texts*, New Haven 1945, p. 42. Foto's staan op http://www.math.ubc.ca/ cass/Euclid/ybc/ybc.html. Zie voor een analyse D. Fowler and E. Robson, Square root approximations in old Babylonian mathematics: YBC 7289 in context. *Historia Mathematica* 25 (1998), p. 366-378.

dere kleitabletten, bijvoorbeeld Babylonische tafels van vermenigvuldiging.[2] Daaruit kunnen ze het hele Babylonische getalsysteem zelf afleiden. Zij kunnen zo zelf ontdekken wat ik u nu zal uitleggen, namelijk hoe je de getallen kunt lezen en wat het tablet betekent.

De figuur is een vierkant met twee diagonalen. Om de getallen te lezen moeten twee spijkerschrift-tekens bekend zijn: een verticale spijker (betekent 1) en een pijltje naar links (betekent 10). Het getal 5 bijvoorbeeld werd geschreven door vijf verticale spijkers in een groepje bij elkaar te zetten. De Babyloniers rekenden in het zestigtallig positiestelsel, dat wij nog steeds gebruiken in onze uren, minuten en seconden.

Op de zijde links boven staan drie pijltjes. Die kunnen we lezen als het getal 30, en de vraag is: wat is de diagonaal van een vierkant met zijde 30? Onder de horizontale diagonaal staat het antwoord 42 25 35, dat wil zeggen 42 + 25/60 + 35/3600 (de 5 van 25 is een beetje beschadigd). Op de diagonaal zelf staan de vier getallen 1 24 51 10, die we moeten lezen als 1 + 24/60 + 51/3600 + 10/216000. Dit is de factor waarmee de zijde moet worden vermenigvuldigd om de diagonaal te krijgen. Zie de transcriptie in Figuur 3.

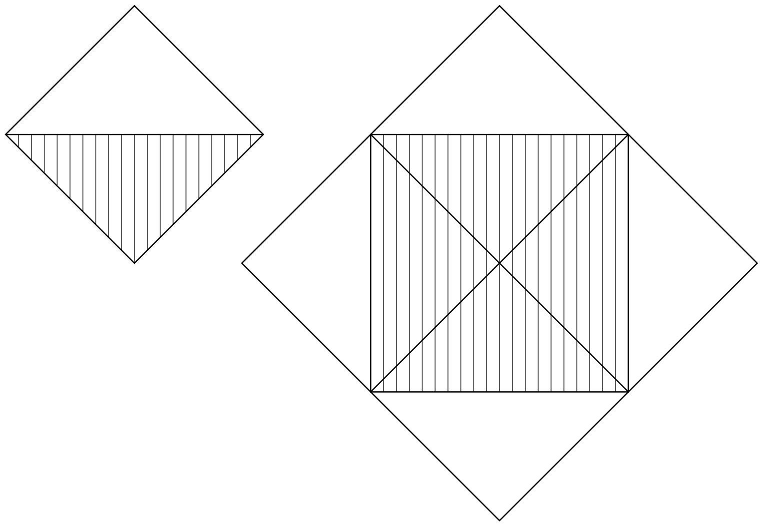


Figuur 3: Transcriptie van het Babylonisch kleitablet

Het eerste stuk van de factor is 1 + 24/60, dat is in decimale notatie 1,4. De factor lijkt dus niet zo slecht gekozen te zijn. De vraag is hoe de Babyloniers aan de resterende 51/3600 + 10/216000 gekomen zijn.

[2]Een voorbeeld staat in A. Aaboe, *Episodes from the Early History of Mathematics*, New Haven 1964, p. ; meer voorbeelden zijn te vinden in: H.V. Hilprecht, ed., *The Babylonian Expedition of the University of Pennsylvania. Series A: Cuneiform Texts*, Volume 20, Part 1, Philadalphia 1906.

Omdat de Babylonische kleitabletten niet precies aangeven wat hier eventueel achter zit, springen we even 1200 jaar vooruit naar mijn volgende bron. Figuur 4 (rechts) is ontleend aan de dialoog ‘Meno’ van de Griekse filosoof Plato (427-347 v.Chr.). Ik heb de arcering toegevoegd.



Figuur 4: Vierkanten uit de dialoog van Plato

In deze dialoog laat Plato zijn leermeester Socrates optreden in een gesprek met een Griekse slaaf.[3] Het gesprek gaat over de vraag hoe we een vierkant twee maal zo groot kunnen maken, dat wil zeggen met een twee maal zo grote oppervlakte. Sokrates tekent de rechtse figuur (zonder de arcering), en doordat hij de juiste vragen stelt, ziet de slaaf zelf in dat het vierkant op de diagonaal twee keer zo groot is als het vierkant op de zijde. Anders gezegd: het gearceerde vierkant rechts is twee keer zo groot als het kleine vierkant links. Volgens Plato is dit plotselinge inzicht van de slaaf ’herinnering’. De slaaf ‘herinnerde’ zich, althans volgens Plato, wiskundige kennis die hij in een eerder (voorgeboortelijk) bestaan al bezat.

Een modern wiskundige kan in elk geval concluderen dat de diagonaal ‘wortel 2’ maal de zijde moet zijn, waarbij wortel 2 is de naam is van een

[3] Nederlandse vertaling in: Plato, *Verzameld Werk*, nieuwe, geheel herziene uitgave van de vertaling van Xaveer de Win, bewerkt door J. Ector et. al., Kapellen 1999, deel 1. Een Engelse vertaling hiervan (en nog veel andere bronnen in de geschiedenis van de wiskunde) in John Fauvel en Jeremy Gray, *The History of Mathematics: A Reader*, Houndsmill 1987, p. 61-67.

getal met kwadraat 2. De Babyloniërs en de Grieken kenden deze naamgeving nog niet.

Het getal $1 + 24/60 + \ldots$ op het Babylonische kleitablet blijkt een verbazingwekkend nauwkeurige benadering te zijn van wortel 2. De fout is minder dan 1/2 maal 1/216000. Anders gezegd: met de factor van het kleitablet kunnen we de diagonaal van een vierkant van één hectare tot op een kwart millimeter nauwkeurig uitrekenen. We kunnen dus de mogelijkheid uitsluiten dat de Babyloniers hun benadering gevonden hebben door metingen in het veld of door te raden. Ze moeten gezocht hebben naar een getal met kwadraat 2, en zij moeten een methode gehad hebben om wortel 2 te benaderen.[4] Wat voor methode dat was weten we niet. In elk geval was er 3700 jaar geleden al sprake van wiskundig redeneren met een bewonderenswaardig resultaat.

De leerling die het tablet schreef, heeft de wortel uit 2 vermoedelijk niet zelf uitgerekend, maar de benadering overgenomen uit een lijst met standaardgetallen. In de Babylonische tijd was wiskunde onder andere een schoolvak. De leerlingen moesten opgaven leren oplossen, die aanzienlijk moeilijker waren dan wat ze later nodig zouden hebben in hun werk als schrijver of ambtenaar. Deze schoolwiskunde heeft vele eeuwen in min of meer onveranderde vorm bestaan.[5]

2. De Griekse wiskunde

De Grieken legden een verband tussen wiskunde en filosofie, en daardoor hebben zij van de wiskunde iets heel anders gemaakt dan de Babyloniërs. De Grieken maakten een duidelijk onderscheid tussen vierkanten die je in de buitenwereld ziet, en die nooit helemaal precies getekend kunnen zijn, en ideale wiskundige vierkanten, waarvan de zijden helemaal recht zijn, precies gelijk aan elkaar, en de hoeken precies recht. Deze ideale wiskundige figuren komen in de wereld om ons heen niet voor. Volgens de Grieken kon kennis over wiskundige figuren alleen verkregen worden door logisch te redeneren. Op deze manier hadden zij voor de tijd van Plato al een interessante ontdekking gedaan. Zij hadden bewezen dat er geen breuk kan bestaan waarvan

[4]We kunnen de diagonaal ook bepalen met de Stelling van Pythagoras, en uit andere tabletten blijkt dat de 'stelling van Pythagoras' ook in de Babylonische wiskunde bekend was.

[5]Een recent overzicht van de Babylonische wiskunde is: Jens Hoyrup, *Lengths, widths, surfaces. A portrait of old Babylonian algebra and its kin*, New York 2002.

het kwadraat gelijk is aan 2.[6] Daaruit volgt dat een berekening van wortel 2 (bijvoorbeeld in het zestigtallig stelsel) nooit een resultaat kan opleveren dat helemaal exact is.

3. De Griekse sterrenkunde en het tweede fundamentele probleem.

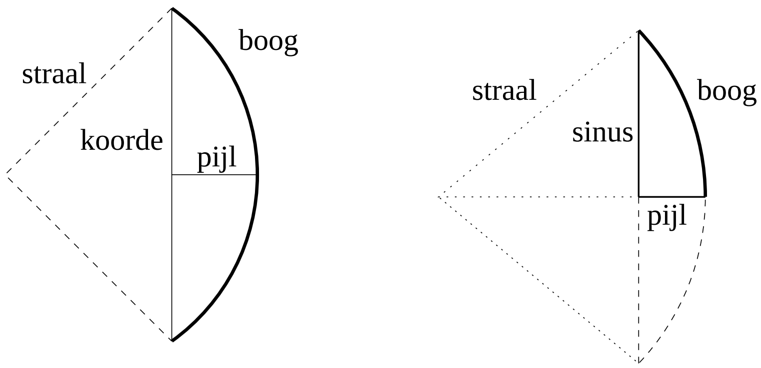
De Griekse wiskunde had in de tijd van Euclides en Archimedes nauwelijks toepassingen in de maatschappij. Dat vonden de Grieken ook niet nodig: wiskundige kennis is tijdloos en in zichzelf waardevol.

Vanaf 150 voor Christus werd meer wiskunde toegepast. In die tijd gingen enkele Griekse sterrenkundigen zich intensief bezighouden met het werk van hun Babylonische collega's, die rekenregels hadden ontwikkeld om hemelverschijnselen te voorspellen. De Grieken wilden nu hetzelfde gaan doen, maar dan door te rekenen aan cirkels en bollen. De Babyloniers hadden feitelijk maar één cirkel gebruikt, namelijk de baan van de zon tegen de achtergrond van de vaste sterren, en deze in 360 graden verdeeld (zodat de beweging van de zon per dag ongeveer 1 graad is). De Grieken verdeelden uiteindelijk alle cirkels in 360 graden.[7]

De Grieken moesten nu het volgende fundamentele wiskundige probleem oplossen.

[6] Uit latere bronnen blijkt dat de redenering mogelijk als volgt geweest is: Stel er was wel zo'n breuk. Door factoren 2 uit te delen, kan deze breuk vereenvoudigd worden totdat ofwel de teller ofwel de noemer een oneven getal is. Omdat het kwadraat van de breuk 2 is, is het kwadraat van de teller twee maal het kwadraat van de noemer, dus de teller is even, en dan is de noemer dus oneven. Omdat de teller even is, is de helft van de teller een geheel getal. Dan is het kwadraat van de noemer twee maal het kwadraat van deze halve teller, dus de noemer is een even getal. We krijgen nu een tegenspraak. Het is niet helemaal zeker dat de redenering zo geweest is; zie bijv. de bespreking van de hele kwestie in W.R. Knorr, *The Evolution of the Euclidean Elements*, Dordrecht 1975, Chapter 2.

[7] O. Neugebauer, *A History of Ancient Mathematical Astronomy*, New York 1975, vol. 2, pp. 593-4, 277-280.



Figuur 5: Het tweede probleem: boog en koorde

In een cirkel met een bekende straal kiezen we een boog die een bekend aantal graden lang is. We trekken de lijn die de twee eindpunten verbindt. Deze lijn noemen we de koorde (Figuur 5, links). Verder noemen we de pijl het lijnstuk tussen het midden van de koorde en het midden van de boog. De vraag is om de lengtes van de koorde en de pijl uit te rekenen, op grond van de bekende boog en straal.

Dit probleem heeft met het vorige probleem te maken. Als de cirkel straal 1 heeft en de boog een kwart cirkel is (90 graden), dan is de koorde wortel 2. Ook andere koorden kunnen worden uitgerekend door wortels te trekken, en met behulp van deze resultaten konden de Grieken ook de resterende koorden benaderen. Hierdoor kon het probleem op een acceptabele manier worden opgelost. In de bewaarde sterrenkundige literatuur uit die tijd wordt niet expliciet gesproken over de mogelijkheid dat deze wortels (zoals de wortel van 2) eigenlijk geen 'echte' getallen zijn.[8]

De maatschappelijke relevantie van dit rekenwerk lag in de astrologie. Men dacht karaktereigenschappen van een persoon te kunnen afleiden uit de posities van de hemellichamen tijdens de geboorte. Ook meende men gebeurtenissen in het latere leven te kunnen voorspellen door de hemellichamen op een bepaalde manier verder te laten draaien ten opzichte van de stand tijdens de geboorte.[9] Op grond van mijn moderne wetenschappelijke training

[8]In Almagest Boek 1, hoofdstuk 10, spreekt Ptolemaeus bijv. over "de (waarde) die voor de zintuigelijke waarneming nauwkeurig is". Zie J.L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei Opera quae exstant omnia*, Leipzig 1898, vol. 1, p. 32, en Ivor Thomas, *Selections illustrating the History of Greek Mathematics*, Cambridge Mass., 1968, vol. 2, p. 414.

[9]Zie bijvoorbeeld, *Ptolemaus*, Tetrabiblos, ed. and transl. by F.E. Robbins, Cambridge Mass., 1956.

vind ik dit een onzinnig idee. Maar om de geschiedenis van de wiskunde te begrijpen, moeten we kijken naar alle toepassingen, ongeacht onze eigen opvattingen daarover. Het is trouwens een illusie te geloven dat de mensheid vandaag de dag de astrologie ontgroeid is. Nog steeds verdienen velen de kost met het doen van astrologie, ook in Nederland.

4. India en de Islamitische cultuur

Al in de tijd van Alexander de Grote waren er contacten tussen Griekenland en India en in de eeuwen daarna werd een deel van de Griekse sterrenkunde naar India overgebracht, inclusief het probleem van de boog, de koorde en de pijl. De Indiase sterrenkundigen brachten verbeteringen aan in het rekenwerk. Zij ontwikkelden het decimale positiestelsel, dat wij nog steeds gebruiken om getallen te schrijven met tien symbolen 1,2,3,4,5,6,7,8,9 en 0. Zij ontdekten dat het gemakkelijker is om niet met de koorde van een boog te werken (Figuur 5, links) maar met de halve koorde van de dubbele boog (Figuur 5, rechts). Als de straal van de cirkel 1 is, is dit de moderne sinus.[10]

Verder hebben zij het woord 'wortel' ingevoerd in de wiskundige betekenis van het woord.[11] De 'wortel' van 2 wordt dan gezien als een getal dat 2 voortbrengt, net zoals een wortel een boom voortbrengt.[12]

In de achtste eeuw na Christus ontstond in Bagdad, de hoofdstad van het Islamitische rijk, belangstelling voor wiskunde en sterrenkunde. Indiase geleerden werden naar het hof van de kalief uitgenodigd, en boeken uit het Sanskriet werden in het Arabisch vertaald. Zo maakte de Islamitische wereld kennis met het decimale positiestelsel, het begrip 'wortel' van een getal, en de sinus. De Islamitische geleerden assimileerden daarna ook een groot deel

[10]Het moderne woord 'sinus' is op de volgende manier ontstaan: In het Sanskriet werd de halve koorde van de dubbele boog eenvoudigweg aangeduid als *jiva*, 'koorde'. In het Arabisch werd dit woord getranscribeerd als *jībā*. Dit woord heeft in het Arabisch geen betekenis, maar is in geschreven vorm nauwelijks te onderscheiden van het woord *jayb*, dat 'plooi' en 'baai' betekent. Vandaar dat de Islamitische wiskundigen deze term zijn gaan gebruiken. De middeleeuwse vertalers van de Arabische geschriften in het Latijn hebben het woord letterlijk vertaald als 'sinus', dat ook plooi en baai betekent.

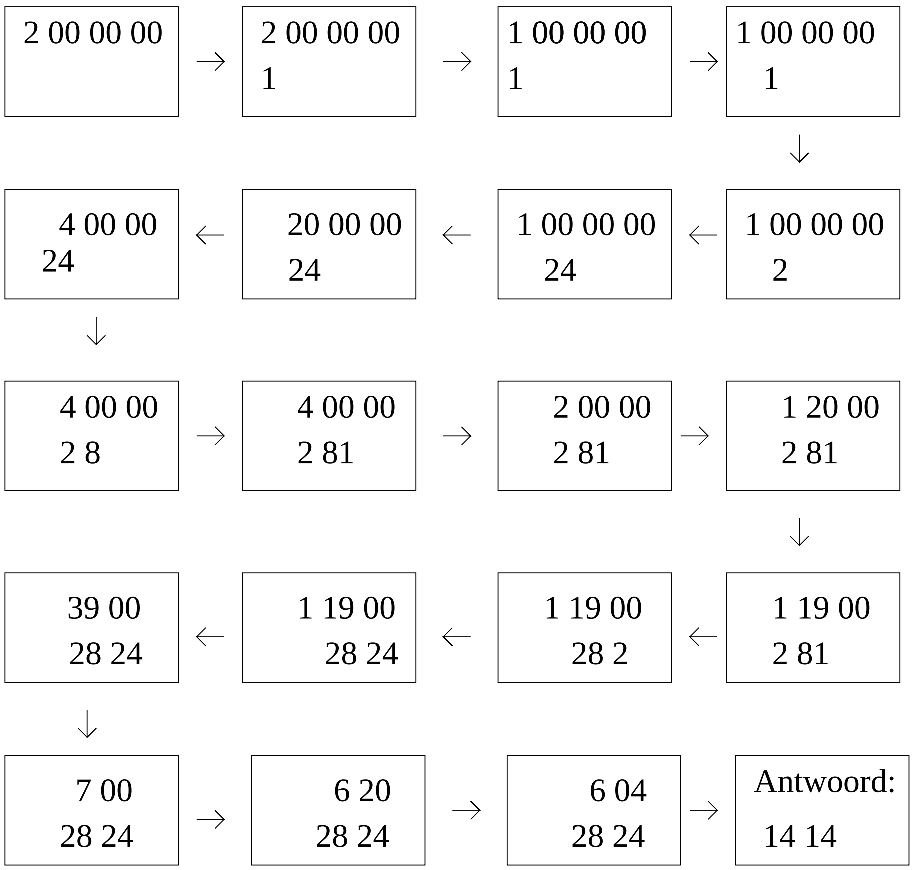
[11]Ons woord wortel is via het latijnse *radix* en het Arabische *jidhr* afgeleid van het Sanskriet mula.

[12]Over Indiase wiskunde en sterrenkunde zie A.P. Juschkewitsch, *Mathematik im Mittelalter,* Leipzig 1964 (de wortel wordt op p. 114 genoemd). Binnenkort verschijnt: Kim Plofker, Mathematics in India, 500 BCE -1800 CE, Princeton: Princeton University Press, 2007.

van de Griekse wis- en sterrenkunde. Zo leerden ze de koorde kennen, en ook het feit dat de wortel van 2 geen breuk kan zijn.

5. De wortel uit 2

We zullen nu eindelijk zien hoe de wortel uit 2 kan worden getrokken. Ik volg de uitleg in het boekje over het rekenen met Indiase cijfers van de wiskundige al-Khwārizmī, die omstreeks 830 na Christus in Bagdad werkte.[13]



Figuur 6: Berekening van wortel 2 volgens al-Khwārizmī

[13]Zie *Die älteste lateinische Schrift über das indische Rechnen nach al-Hwārizmī. Ed., Übers. und Kommentar von Menso Folkerts unter Mitarbeit von Paul Kunitzsch*, München 1997. De Arabische tekst is verloren gegaan, er is alleen een middeleeuws Latijnse vertaling over.

Al-Khwārizmī zegt dat eerst aan de 2 een even aantal nullen moeten worden toegevoegd. Hij neemt zes nullen, en krijgt 2 00 00 00. Vervolgens trekt hij de wortel daaruit, dat is 1414. Voor wortel 2 krijgt hij dan 1414/1000; omdat decimaalbreuken nog niet bekend waren, drukt al-Khwārizmī dit antwoord uit in het zestigtallig stelsel als 1 + 24/60 + 50/3600 + 24/216000. Dit is minder nauwkeurig dan de waarde op het kleitablet, dat toen in dezelfde regio nog in het woestijnzand lag, maar al-Khwārizmī had meer nullen kunnen gebruiken als hij gewild had.

Hij legt ook uit hoe je de wortel uit een geheel getal zoals 2 00 00 00 berekent volgens de Indiase methode.[14] Papier en perkament waren destijds duur en daarom werden dit soort berekeningen uitgevoerd in een bakje met zand, waarin de cijfers werden neergeschreven en op het juiste moment weer uitgewist. Ik heb de berekening volgens zijn aanwijzingen uitgevoerd en de verschillende tussenstanden van de zandbak in Figuur 6 aangegeven. We weten niet precies wat de vorm was van de cijfers die al-Khwārizmī gebruikte, waarschijnlijk leken ze meer op de cijfers van het tegenwoordige Midden Oosten.

6. Een voorbeeld: Een tabel voor het bepalen van de tijd

Nu volgt een voorbeeld van een toepassing van al dit worteltrekken. Er zijn in de Islamitische traditie duizenden tabellen berekend voor alle mogelijke sterrenkundige en astrologische toepassingen. Veel van deze berekeningen berusten op koorden en sinus, en daardoor uiteindelijk op het trekken van vierkantswortels. Ik heb uit een dertiende eeuws Arabisch handschrift een ongepubliceerde tabel[15] gekozen, die ook nu nog onmiddellijk begrijpelijk is.

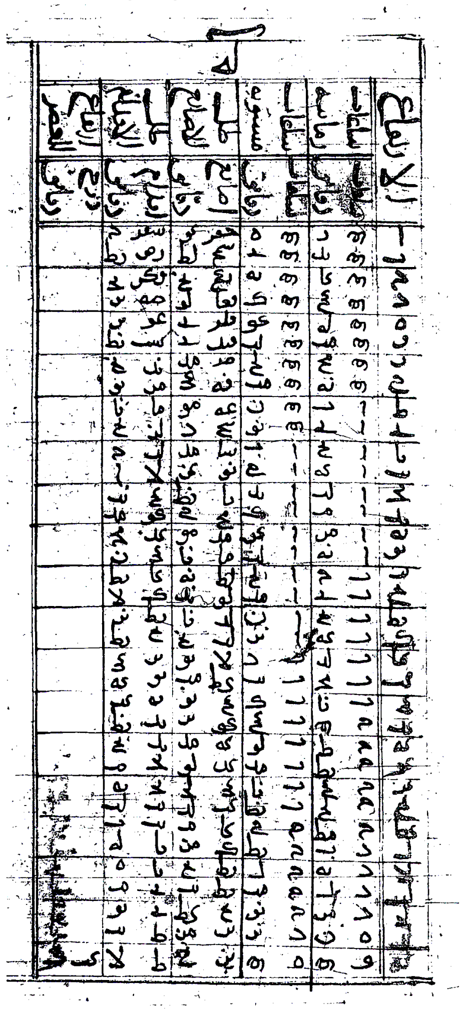
In Figuur 7 staat de tabel in het handschrift verkleind weergegeven, en in Figuur 8 een transcriptie die ik ter gelegenheid van deze oratie heb gemaakt. De getallen zijn geschreven in de Arabische alfabetische notatie, dus niet in het tientallige positiesysteem dat uit India was overgenomen. Ik heb een paar voor de hand liggende schrijffouten verbeterd en de verbeteringen met sterretjes aangegeven.[16]

[14] Zie voor de Indiase oorsprong A.P. Juschkewitsch, *Mathematik im Mittelalter*, Leipzig 1964, p. 115.

[15] Een foto van één bladzijde van deze tabel (voor maximale hoogtes 33 en 34 graden) staat in David King, *In Synchrony with the Heavens: Studies in Astronomical Timekeeping and Instrumentation in Medieval Islamic Civilization*, Vol. 1, Leiden 2004, p. 68, Fig. 2.5.2.

[16] De getallen 11 tot en met 19 lijken in het Arabische alfabetische systeem erg op de

De tabel heeft te maken met het bepalen van de tijd. Mechanische klokken en horloges waren nog niet uitgevonden; er waren wel waterklokken (een cylinder waar een straaltje water uitliep) maar deze waren onnauwkeurig. De enige nauwkeurige mogelijkheid om de tijd de meten was de zon en sterren als klok te gebruiken. De tabel is berekend voor Bagdad en andere plaatsen op dezelfde geografische breedte.[17]



Figuur 7: Ms. Parijs, Bibliothèque Nationale, Fonds Arabe 2514, f. 3v

getallen 51 tot en met 59, en het getal 7 lijkt op het getal 50. Omdat Arabisch van rechts naar links geschreven wordt, is de transcriptie gespiegeld ten opzichte van het origineel. In de meest linkse kolom van het handschrift staan inktvlekken die ontstaan zijn doordat een andere pagina tegen deze pagina is aangedrukt.

[17]Hiervoor wordt in de tabel 33 graden en 25 minuten aangenomen.

35										
hoogte	**seizoens uren**		**gelijke uren**		**schaduw vingers**		**schaduw voeten**		**hoogte asr**	
	uren	**minuten**	**uren**	**minuten**	**vingers**	**minuten**	**voeten**	**minuden**	**graden**	**minuten**
1	0	7	0	5	687	26	382	3		
2	0	14	0	10	343	39	190	19		
3	0	21	0	15	278	58	127	13		
4	0	28	0	20	171	36	95	17		
5	0	35	*0*	*26*	137	10	76	17		
6	0	42	*0*	*32*	114	10	62	59		
7	0	48	*0*	*38*	97	44	54	18		
8	0	55	*0*	*42*	85	23	47	16		
9	1	2	*0*	*50*	75	46	41	51		
10	1	10	*0*	*56*	68	4	37	18		
11	1	18	*1*	*2*	61	44	34	3		
12	1	25	*1*	*8*	56	27	31	1		
13	1	32	*1*	*14*	51	59	28	52		
14	1	40	*1*	*20*	48	8	26	44		
15	1	47	*1*	*27*	44	46	24	43		
16	1	55	*1*	*32*	41	51	23	50		
17	2	3	*1*	*38*	39	15*	21	19		
18	2	10	*1*	*44*	36	54	20	31		
19	2	18	1	50	34	51	19	57		
20	2	25	1	57	32	58	18	19		
21	2	34	2	4	31	16	17	23		
22	2	43	2	12	29	42	16	25		
23	2	51	2	20	28	16	15	22		
24	3	0	2	28	26	57*	14	59		
25	3	9	2	36	25	44	14	18		
26	3	19	2	44	24	36	13	42		
27	3	28	2	51	23	23	13	15		
28	3	38	2	59	22	34	12	32		
29	3	49	3	8	21	40	12	2		
30	4	2	3	19	20	47	11	35		
31	4	15	3	30	19	58*	11	5		
32	4	30	3	42	19	12	10	40		
33	4	47	3	56	18	29	10	16		
34	5	7*	4	17*	17	47	9	52*		
35	6	0	5	0	17	8	9	31	22	20

Figuur 8: Transcriptie van de tabel

Met deze tabel kunnen we de tijd bepalen uit de stand van de zon. Van te voren moet de maximale hoogte van de zon boven de horizon worden uitgerekend. Vandaag (12 januari) is die maximale hoogte in Bagdad 35 graden; als deze oratie in Bagdad geweest was of op een andere lokatie met dezelfde geografische breedte, hadden we deze tabel kunnen gebruiken. De maximale hoogte wordt bereikt wanneer de zon precies in het zuiden staat. Van zonsopgang tot dit moment stijgt de hoogte van de zon van 0 tot 35 graden, en dan daalt hij weer van 35 graden tot 0. Als we de hoogte van de zon weten, kunnen we in de derde kolom het tijdsinterval vanaf zonsopgang tot nu of vanaf nu tot zonsondergang aflezen in “gelijke uren”, dat zijn de uren die wij tegenwoordig gebruiken.

Om de hoogte van de zon te meten kon men een verticale stok gebruiken van 12 vingers lang, of men kon zichzelf gebruiken als verticale stok (aannemend dat je lengte 6 2/3 voeten was). In de vierde en vijfde kolom van links staat de bijbehorende schaduw in vingers of voeten en “minuten”; met een minuut wordt 1/60 bedoeld. Uit de derde kolom kon direct het hiermee overeenkomende tijdstip worden gevonden. Als de hoogte maximaal is, is het 5 uren na zonsopgang en 5 uren voor zonsondergang is. De lengte van de dag in Bagdad is vandaag 10 uren.

De “gelijke uren” in de derde kolom werden in de middeleeuwen alleen door de sterrenkundigen gebruikt. In de eerste kolom staat de tijd in uren die door gewone burgers gebruikt werden, in de middeleeuws Islamitische wereld en ook in middeleeuws Europa. Elke dag (dat wil zeggen de periode van zonsopgang tot zonsondergang) werd in 12 seizoensuren verdeeld, met als gevolg dat een seizoensuur in de zomer langer duurt dan in de winter. Tenslotte staat onderaan in de zesde kolom de hoogte van de zon aan het begin van de periode in de namiddag waarin het asr-gebed mag worden gedaan. Dit is één van de vijf dagelijkse gebeden van de Islam.

Het is niet bekend wie deze tabel berekend heeft. De kolom voor de schaduw in vingers is zeer correct berekend, de fout is meestal niet meer dan een minuut. Hetzelfde geldt voor de gelijke uren, behalve het cursieve deel, dat door de kopiïst per ongeluk uit een verkeerde tabel is overgeschreven. In bibliotheken op de hele wereld zijn nog duizenden ongepubliceerde Arabische wiskundige en sterrenkundige manuscripten uit de middeleeuwen bewaard gebleven, genoeg werk voor de rest van mijn leven, en voor vele andere onderzoekers. Onze kennis over de middeleeuws Islamitische wiskunde en sterrenkunde is zeer onvolledig, en dit zal ook wel zo blijven, totdat de Islamitische wereld zelf het voortouw neemt op dit gebied en de noodzakelijke man- en vrouwkracht levert om deze teksten te analyseren. De weinige experts die er nu op dit gebied zijn, werken vooral in het Westen. Om werk aan ongepubliceerde Arabische manuscripten te doen, is training in het klassiek Arabisch en in Arabische paleografie noodzakelijk. Dit is een van vele goede redenen om instituten voor de studie van Oosterse talen in Nederland in stand te houden.

7. Een Nederlands voorbeeld

In de twaalfde eeuw werden veel wiskundige en sterrenkundige teksten uit het Arabisch in het Latijn vertaald, en hierdoor maakten de geleerden in Westeuropa kennis met de Arabische en de Griekse wiskunde en sterrenkunde. Vanaf het midden van de vijftiende eeuw werd in Europa weer belangrijk wis- en sterrenkundig onderzoek gedaan. Dit werd bevorderd door de ontwikkeling van de boekdrukkunst.

In het eind van de 16e eeuw werd Nederland een wereldmacht, niet alleen in economisch maar ook in wetenschappelijk opzicht. Onder invloed van Simon Stevin (1548-1620) werd het Nederlands belangrijk als taal van de wetenschap. In deze Nederlandstalige wetenschap was ook plaats voor mensen die geen Latijn kenden.[18] Een succesvoorbeeld hiervan was Ludolf van Ceulen (1540-1610) uit Hildesheim. Deze vestigde zich omstreeks 1575 in Nederland. Hij verdiende de kost met het geven van lessen in rekenen en in vechtsporten. In 1600 werd hij lector aan de nieuw opgerichte Nederlandstalige wiskundeopleiding in Leiden.

Figuur 9: Portret van Ludolf van Ceulen.[19]

Ludolf van Ceulen was een rekenwonder. Hij is vooral bekend doordat hij het getal π uiteindelijk in 35 decimalen bepaald heeft. Deze benadering

[18] Zie E.J. Dijksterhuis, *Simon Stevin*, 's-Gravenhage 1943, vooral p. 302.

[19] Bron: Titelblad van Ludolf van Ceulen, *de Arithmetische en Geometrische Fondamenten*, Leiden 1615.

werd pas posthuum gepubliceerd op zijn grafsteen in de Pieterskerk in Leiden.[20] In 1596 publiceerde Van Ceulen zijn boek *Vanden Circkel*, waarin hij diverse π-benaderingen berekent tot in totaal 20 decimalen. In een van deze benaderingen heeft hij de wortel uit 2 nodig, en die rekent hij uit volgens de Indiase methode, die we al eerder gezien hebben bij al-Khwārizmī. Van Ceulen gebruikt geen zandbakje maar papier, en voegde geen 6 maar 66 nullen toe. Zo krijgt hij wortel 2 in 33 decimalen, die alle correct zijn:
1414213562373095048801688724209698 gedeeld door een 1 met 33 nullen.[21]
Ik heb het begin van zijn berekening gereconstrueerd aan de hand van andere voorbeelden die hij in detail uitwerkt. Zie Figuur 10. Hij gebruikt het papier zo efficiënt mogelijk en daardoor lijkt zijn berekeningsmethode gecompliceerd; voor wiskundestudenten is het een leuke puzzel uit te zoeken hoe de methode werkt.

						1	1	7						
						0	5	9	6	4				
		1		6	1	8	0	7	0	6	1	7		
1		4	1	9	3	4	3	6	5	9	3	1	7	5
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1		4		1		4		2		1		3		5
	2	2	8	8	2	2	8	8	4	4	2	2	6	
			2	2	8	8	2	2	8	8	4			
					2	2	8	8	2					
							2							

Figuur 10: Berekening van de wortel van 2, volgens o.a. Ludolf van Ceulen

Van Ceulen wordt in de historische literatuur beschouwd als een doorzetter zonder veel originele ideeën. Doorzettingsvermogen had hij inderdaad,

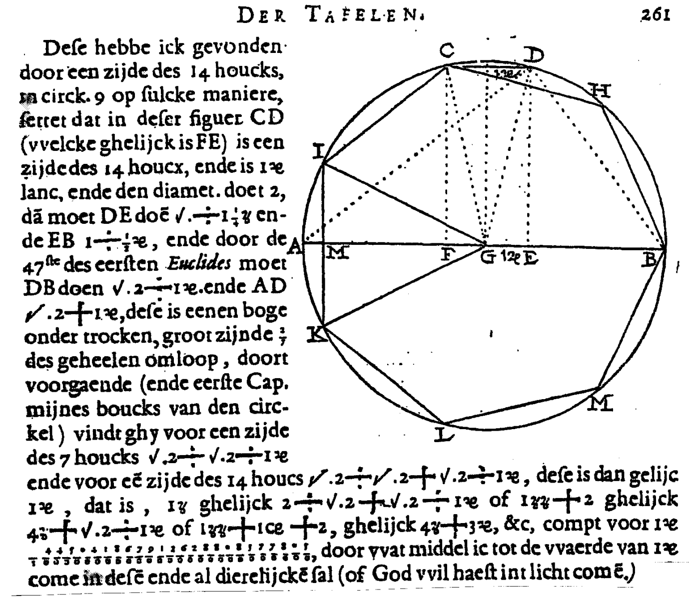
[20] Het graf is in de negentiende eeuw weggeraakt. In 2000 is in de Pieterskerk in Leiden een nieuw grafmonument voor Van Ceulen opgericht. Zie Cor Kraaikamp, Irene Driessen, Pi in de Pieterskerk, en H.J.M. Bos, De cirkel gedeeld, de omtrek becijferd en pi gebeiteld: Ludolph van Ceulen en de uitdaging van de wiskunde, *Nieuw Archief voor Wiskunde*, vijfde serie, 1 (2000), pp. 250-253 en 259-262.

[21] Zie Ludolph van Ceulen, *Vanden Circkel*, Delf 1596, f. 12v.

maar hij had meer ideeën dan men meestal denkt, want hij heeft veel moeilijker werk gedaan dan het bepalen van π. Hiervoor ga ik nog even terug naar het fundamentele probleem: als je een cirkelboog kent, hoe lang is de koorde? Van Ceulen heeft ook gevallen van het koordenprobleem bestudeerd die niet opgelost kunnen worden door het trekken van wortels.

Sommige van deze gevallen kunnen worden gereduceerd tot hogeregraads vergelijkingen, en Ludolf heeft zeer nauwkeurige oplossingen van een behoorlijk aantal van zulke vergelijkingen uitgerekend.[22]

Figuur 11 is een afbeelding van een deel van pagina 261 van het verzamelwerk *De Arithmetische en Geometrische Fondamenten.* dat na Ludolfs dood door zijn weduwe Adriana Simons is uitgegeven. Ludolf behandelt hier o.a. het voorbeeld van een cirkel waarvan een-veertiende deel wordt afgesneden. in Figuur 11 zien we het nu bekende wortelteken, dat in de zestiende eeuw in Duitsland was ontstaan.[23]



DER TAFELEN. 261

Dese hebbe ick gevonden door een zijde des 14 houcks, in circk. 9 op sulcke maniere, settet dat in deser figuer CD (vvelcke ghelijck is FE) is een zijde des 14 houcx, ende is 1ꝝ lanc, ende den diamet. doet 2, dã moet DE doẽ √. ÷ 1¼ ꝫ ende EB 1 ÷ ½ꝝ, ende door de 47ste des eersten *Euclides* moet DB doen √. 2 ÷ 1ꝝ. ende AD √. 2 + 1ꝝ, dese is eenen boge onder trocken, groot zijnde ³⁄₇ des geheelen omloop, doort voorgaende (ende eerste Cap. mijnes boucks van den circkel) vindt ghy voor een zijde des 7 houcks √. 2 ÷ √. 2 ÷ 1ꝝ ende voor eẽ zijde des 14 houcs √. 2 ÷ √. 2 + √. 2 ÷ 1ꝝ, dese is dan gelijc 1ꝝ, dat is, 1ꝫ ghelijck 2 ÷ √. 2 + √. 2 ÷ 1ꝝ of 1ꝫꝫ + 2 ghelijck 4ꝫ + √. 2 ÷ 1ꝝ of 1ꝫꝫ + 1ce + 2, ghelijck 4ꝫ + 3ꝝ, &c, compt voor 1ꝝ ..., door vvat middel ic tot de vvaerde van 1ꝝ come in desẽ ende al dierelijckẽ sal (of God vvil haest int licht comẽ.)

Figuur 11: Een deel van blz. 261 van Ludolf van Ceulen, Arithmetische en Geometrische Fondamenten, *Leiden 1615.*

[22]Het enige diepergaande artikel over dit aspect van Van Ceulen's wiskunde is: Henri Bosmans S.J., Un émulé de Viète: Ludolphe van Ceulen, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles, 3e série*, 34 (1910), p. 88-139, toegankelijk via http://logica.ugent.be/albrecht/Bosmans.htm

[23]De punt na het wortelteken betekent dat de wortel uit de hele volgende uitdrukking moet worden getrokken.

In Figuur 11 laat Ludolf zien dat de zijde van een ingeschreven regelmatige veertienhoek in een cirkel met diameter 2 voldoet aan een vierdegraads[24] vergelijking. De vergelijking staat drie regels van onderen in de notatie die toen gebruikt werd. De onbekende wordt weergegeven met een kleine letter r die op speciale manier geschreven wordt, zoals in algebra-teksten uit die tijd gebruikelijk was. In moderne notatie luidt de vergelijking $r^4 + r^3 + 2 = 4r^2 + 3r$.

Ludolf heeft hieruit de onbekende r berekend als

$$\frac{445041867912628808577805}{1000000000000000000000000}$$

Deze berekening is veel gecompliceerder dan het trekken van de wortel uit 2.

De Franse wiskundige François Viète (1540-1601) had eveneens methoden ontwikkeld voor het numeriek oplossen van hogeregraads vergelijkingen. Het is niet duidelijk of Ludolf op de hoogte was van dit werk van Viète. Verbanden tussen koorden in de cirkel en algebraïsche vergelijkingen waren behalve door Viète, ook ontdekt door de Belgische wiskundige Adriaan van Roomen (1561-1615). Van Roomen en Van Ceulen waren zeer bevriend en correspondeerden over deze vergelijkingen. Hierbij was Van Ceulen degene die de oplossingen uitrekende.

Ludolf was van plan zijn rekenmethoden te publiceren, maar dit is nooit gebeurd. Een groep Utrechtse wiskundestudenten heeft aan deze oplossingen gerekend, om te achterhalen wat voor methode hij gebruikt heeft. We hoopten deze methode te kunnen afleiden door een analyse van de fouten die hij gemaakt had. Helaas, dit is mislukt; de meeste oplossingen waren helemaal correct, en de aanwezige fouten waren te klein en te gering in aantal. Een van mijn studenten was zo onder de indruk van het werk van Ludolf dat hij heeft voorgesteld het Nederlandse woord voor zakrekenmachine te veranderen in 'Zakludolf'.

Ludolf's werk aan deze problemen van cirkel en koorde was niet door de sterrenkunde geïnspireerd maar door de landmeetkunde. Vanaf het eind van de 16e eeuw begon men namelijk de tabellen van sinus en koorde die men voor de sterrenkunde had ontwikkeld, ook in de landmeetkunde toe te passen. Dit leidde uiteraard weer tot nieuwe interesse in sinus- en aanverwante tabellen.

[24] De vergelijking heeft een wortel $r = -2$. De onbekende r is ook wortel van een derdegraads vergelijking $r^3 + 1 = r^2 + 2r$. Hiermee had Ludolf r gemakkelijker kunnen bepalen.

Zo publiceerden Jan Pieterszoon Dou (1573-1635) en Johan Sems (1572-1635) in 1600 een *Practijk des lantmetens*, een landmeetkundig handboek in het Nederlands met daarin een sinustabel van 45 bladzijden lang.[25]

Door de invoering van de sinus en sinustabellen had de landmeetkundige veel meer kennis van wiskunde nodig. Het beroep van landmeetkundige moet daardoor veranderd zijn. Er is veel gepubliceerd over de geschiedenis van de landmeetkunde (in Nederland en elders),[26] maar over de verspreiding van wiskundige methoden in de landmeetkunde in 16e eeuws Europa is nog veel onbekend. De historicus van de wiskunde kan in zulke gevallen een interessante bijdrage leveren aan de cultuurgeschiedenis.

Voor het Nederlandstalige wiskundige cultuurgoed bestaat veel interesse bij buitenlandse historici, maar er is weinig over bekend in de internationale literatuur. In de komende jaren zal ik proberen, met hulp van mijn collega Steven Wepster en Nederlandse wiskundestudenten, een deel van dit erfgoed toegankelijk te maken. Voor het werken met oude boeken is onder studenten veel belangstelling, en we worden door de de afdeling Oude Drukken van de Universiteitsbibliotheek Utrecht altijd met open armen ontvangen. Dit werk aan de Nederlandstalige wiskundige traditie past in het kader van het samenwerkingsproject van Nederlandse en Vlaamse wetenschapshistorici over circulatie van kennis in de Lage Landen.

8. Over geschiedenis van de wiskunde

Deze voorbeelden die we hierboven behandeld hebben inspireren mij tot het maken van een paar algemene opmerkingen. Wat mij fascineert in de geschiedenis van de wiskunde is de combinatie van tijdloze en tijdgebonden aspecten. Het tijdloze cultuuroverstijgende aspect van de wiskunde wordt gesymboliseerd door het kleitablet in het begin van deze oratie. Als je wortel 2 in het zestigtallig stelsel benadert, krijg je tegenwoordig precies hetzelfde antwoord als 3700 jaar geleden. Het tijdgebonden aspect komt niet alleen naar voren in de veranderende perspectieven, rekenmethoden, notaties, maar nog meer in de steeds veranderende contexten en toepassingen. Dit maakt de geschiedenis van de wiskunde levend. Ik heb bewondering voor de genialiteit

[25]De voorplaat in kleur is te zien op het beginscherm van www.wiskonst.nl De tekst is grotendeels toegankelijk via
http://www.library.tudelft.nl/digitresor/?bookname=Landmeten&page=1

[26]Zie bijvoorbeeld: H.C. Pouls,*De landmeter van de Romeinse tot de Franse tijd.* Alphen aan de Rijn 1997.

en de volharding van de wiskundigen in de culturen die ik bestudeer, omdat deze mensen met zo weinig hulpmiddelen zo veel hebben kunnen ontdekken en berekenen. Dat geeft mij hetzelfde gevoel als het kijken naar een prachtige sportieve prestatie. Ik vind het mooi om een ongepubliceerde bron (zoals de tabel in Figuur 7) te ontcijferen, en daardoor dit oude wiskundige werk weer aan het licht te brengen.

Bij de titel van deze oratie, vergeten wortels, denk ik aan twee dingen. Ten eerste: het worteltrekken zelf. De methode van Ludolf van Ceulen is in wezen dezelfde als de methode die enkele decennia geleden nog op de middelbare scholen werd onderwezen maar sindsdien in een proces van onderwijsvernieuwing is gesneuveld, samen met veel andere onderwerpen. De 'wortel' is voor leerlingen tegenwoordig niet meer dan een toets op de rekenmachine. Een paar van mijn wiskundestudenten hebben leren worteltrekken door studie van het werk van Ludolf van Ceulen, en zij vonden dit een bijdrage aan hun wiskundige ontwikkeling. De geschiedenis van de wiskunde is een schatkamer van vergeten maar interessante wiskundekennis en vaardigheden.

Met vergeten wortels doel ik ook op het feit dat onze wiskunde (en onze cultuur) wortels heeft in cultuurgebieden en perioden waar wij misschien geen weet meer van hebben. Aan de Nederlandstalige traditie in de zestiende en zeventiende eeuw danken wij uiteindelijk het echt Nederlandse woord 'wiskunde'. De Griekse wortels van de moderne wiskunde zijn wel bekend, maar de wiskunde heeft ook veel te danken heeft aan Babylon en India. En er is nog iets. Tussen de zesde en tiende eeuw na Christus was in West-Europa praktisch geen wiskundige en sterrenkundige kennis meer aanwezig, en het wiskundig redeneren en sterrenkundig waarnemen was in West-Europa helemaal uitgestorven. De ontwikkeling is pas weer op gang gekomen in de 12e en 13e eeuw, doordat grote hoeveelheden kennis uit de Islamitische wereld zijn geïmporteerd. In deze lang vervlogen eeuwen waren de Islamitische wiskundigen en sterrenkundigen de leermeesters van het Westen. Ik vind dit inzicht in de huidige tijd heel belangrijk. In de moderne Nederlandse samenleving moet er respect voor dit aspect van de Islamitische beschaving zijn. Als politici over cijfers spreken, moeten zij beseffen dat ze een Arabisch woord gebruiken.[27]

Van de wortels ga ik nu naar de vruchten. Vanwege de beperkte tijd zal

[27] Het woord cijfer is afgeleid van het Arabische ṣifr, met oorspronkelijke betekenis: 'lege plaats'; het werd oorspronkelijk alleen voor de nul gebruikt.

ik nu niet ingaan op de vele goede redenen waarom onderzoek en onderwijs in wetenschaps- en cultuurgeschiedenis in het algemeen nuttig zijn. Ik zal hier alleen twee aspecten noemen, die specifiek betrekking hebben op de geschiedenis van de wiskunde, en te maken hebben met mijn eigen ervaring.

De wiskunde is na 1600 enorm gegroeid en heeft zich ontwikkeld van een wetenschap van getal en ruimte tot een wetenschap van structuren in het algemeen. Onze maatschappij wordt steeds complexer en de belangrijkheid van de wiskunde steeds groter. Allerlei zaken die wij vanzelfsprekend vinden, zoals CD's, electriciteit, pinnen, mobiel telefoneren, zijn ondenkbaar zonder geavanceerde wiskunde. We hebben wiskunde en wiskundigen nodig om onze maatschappij te laten draaien. Het probleem is, dat deze boodschap moeilijk uitgelegd kan worden aan mensen die zelf weinig wiskundekennis bezitten. Daartoe behoren ook leerlingen aan middelbare scholen, beleidsmakers en politici. Veel mensen denken nog steeds dat wiskunde een stoffige onpersoonlijke wetenschap is, waar je weinig mee kunt, en waarin niets nieuws meer valt te ontdekken. De geschiedenis van de wiskunde kan een beetje meehelpen, dit soort vooroordelen uit de weg te ruimen, en ik zeg dit met opzet bescheiden. Het menselijk aspect van de wiskunde kan zichtbaar worden gemaakt, en er kan uitgelegd worden wat de invloed van de wiskunde is geweest op de ontwikkeling van het wereldbeeld. De oudere perioden en culturen zijn een goudmijn voor gemakkelijk te doorgronden toepassingen, die kunnen worden gebruikt om wiskunde naar de mensen toe te brengen. Hier is veel meer over te zeggen dan de voorbeelden die ik vandaag gegeven heb. Ik heb ervaring met een workshop die ik heb ontwikkeld over het astrolabium, dat is een middeleeuws instrument gebaseerd is op stereografische projectie. Ik heb deze workshop in diverse landen aan honderden mensen gegeven, waarvan de meesten geen affiniteit met wiskunde hadden. De meesten vonden deze workshop leuk. Geschiedenis van de wiskunde kan ook helpen, het wiskundeonderwijs op de middelbare school te verlevendigen. Ik ben blij dat collega-historicus van de wiskunde Jan van Maanen is benoemd tot hoogleraar-directeur van het Freudenthal Instituut, afdeling wiskunde. Het is belangrijk het imago van de wiskunde te verbeteren, en het draagvlak voor de wiskunde te vergroten, om twee dingen te realiseren die heel erg nodig zijn, namelijk: meer wiskundestudenten, en meer steun voor wiskundig onderzoek, toegepast en fundamenteel.

Geschiedenis van de wiskunde (inclusief sterrenkunde) kan relaties met moderne Islamitische landen verbeteren, en vooroordelen aan beide kanten uit de weg helpen ruimen. De Islamitische landen hebben tot dusver weinig gedaan aan de studie van hun eigen wetenschappelijke traditie, maar er is wel veel belangstelling voor dit onderwerp. Het is een interessante ervaring, samen met moderne Islamitische geleerden het middeleeuwse bronnenmateriaal te bestuderen. Mijn activiteiten op dit gebied hebben mij veel waardering opgeleverd, zoals: een tweejarig gasthoogleraarschap in Dhahran in Saoedi-Arabië, een ontmoeting met voormalig president Khatami van Iran (toen hij nog president was), en het ereburgerschap van de provincie Sistan-Baluchistan in zuidoost-Iran. In totaal 11 wis- en natuurkundestudenten hebben onder mijn leiding projecten in Iran en Saoedi-Arabië gedaan. Deze ervaringen zijn goed geweest voor hun academische en persoonlijke vorming: door het echte contact met de bevolking en de wetenschappelijke cultuur van die landen, en ook doordat zij er een situatie aantroffen, die geheel anders was dan het beeld dat in de Nederlandse media wordt gevormd. Veel andere studenten hebben ook aangegeven dat zij interesse hebben voor dit soort projecten, en ik hoop dat in de toekomst hiervoor mogelijkheden zullen ontstaan. De openingen via de geschiedenis van de wiskunde kunnen weer tot andere contacten leiden. Zo heeft het Freudenthal Instituut van de Universiteit Utrecht nu een samenwerking met het Huis van de Wiskunde in Isfahan in Iran.

Op centraal niveau heeft de Universiteit Utrecht weinig of geen contacten met de Arabische wereld en Iran. Ik wil de Universiteit Utrecht daarom oproepen, op geschikte vakgebieden te gaan samenwerken met een paar universiteiten uit deze regio. Voor Utrecht liggen hier mogelijkheden, en er zijn ook goede argumenten voor zo'n samenwerking. Ik noem er twee. Er komen steeds meer Islamitische studenten aan de Universiteit Utrecht. Stagemogelijkheden in de Islamitische landen kunnen voor zulke studenten (en trouwens ook voor andere studenten) vormend zijn, en een argument voor hun keuze van Utrecht als studieplaats. Uit mijn ervaring weet ik dat er veel orthodoxe Islamitische geleerden zijn die graag op wetenschappelijk gebied met het Westen samenwerken. Zij willen hiermee de internationale relaties verbeteren en de voedingsbodem voor het terrorisme in hun eigen landen verzwakken. Ik vind dat de Westerse universiteiten hier een verantwoordelijkheid hebben. Wij moeten deze geleerden de hand reiken.

In samenwerking met Iraanse experts zou ook uitgezocht kunnen worden, of Utrecht op termijn een samenwerkingsverband met een universiteit in Afghanistan aan zou kunnen gaan. De mensen in dat land verdienen het, na jaren van onbeschrijfelijke ellende, een nieuw toekomstperspectief te krijgen.

9. Dankwoord

Aan het eind van deze oratie wil ik graag enkele woorden van dank uitspreken. Om te beginnen dank ik het College van Bestuur van de Universiteit Utrecht, het bestuur van de Bètafaculteit, en alle anderen die aan de totstandkoming van mijn benoeming hebben bijgedragen.

Ik ben bijzonder dankbaar dat het Departement Wiskunde van de Universiteit Utrecht mij in staat heeft gesteld mij als historicus van de wiskunde te ontplooien in een wiskundige omgeving. Hoewel dit Department kort geleden drastische bezuinigingen heeft moeten ondergaan, heeft men toch besloten de geschiedenis van de wiskunde te ondersteunen door mij tot hoogleraar te laten benoemen. Ik ben er trots op in een instituut te kunnen werken waar zo'n positieve sfeer heerst, en ben blij ook in het reguliere wiskundeonderwijs betrokken te blijven. Dit is volgens mij een van de oorzaken van het succes van de geschiedenis van de wiskunde in Utrecht.

Hooggeleerde Bos, beste Henk, ik ben je zeer dankbaar voor alles wat je mij geleerd hebt in de geschiedenis van de wiskunde. Jij hebt unieke kwaliteiten in het analyseren en schrijven van teksten, die ik onmogelijk kan evenaren, en ik zal je node missen. Het is een eer je te mogen opvolgen.

Hooggeleerde Theunissen, beste Bert, en hooggeleerde Dieks, beste Dennis, ik zie uit naar verdere samenwerking en ik hoop dat we onze gezamelijke onderwijsplannen voor de hele betafaculteit zullen kunnen realiseren.

Hooggeleerde mevrouw Kruk, beste Remke. Als eerstejaars student wiskunde leerde ik je kennen, je werkte toen nog in Utrecht, doordat ik bij je langskwam om te vragen of ik Arabisch als keuzevak zou kunnen doen. Ik kon toen niet voorzien op wat voor enorme manier dit keuzevak mijn leven zou gaan bepalen. Ik ben je nog elke dag dankbaar voor de degelijke filologische opleiding en hoop nog lang met je samen te kunnen werken.

Hooggeleerde Lenstra, beste Hendrik, het Leidse hoogleraarschap van 1 dag per week dat jij voor mij uit je Spinoza-prijs hebt gefinancierd, heeft mijn leven interessanter en uitdagender gemaakt: vandaag houd ik voor de tweede keer in betrekkelijk korte tijd een oratie, en je kan natuurlijk niet twee keer hetzelfde verhaal vertellen. Ik hoop de inspirerende samenwerking met de Leidse universiteit nog lange tijd in enigerlei vorm te kunnen voortzetten.

Verder wil ik een woord van dank uitspreken aan Eise Eisinga, die in 1744 geboren is in Dronrijp in Friesland. Ik ben in Franeker opgegroeid en vanuit onze woonkamer konden wij uitkijken op het planetarium dat hij in de jaren 1774 tot 1781 in Franeker gebouwd heeft. De gelukkige omstandigheid zoiets mooi in mijn directe omgeving te hebben heeft bij mij een liefde voor de sterrenkunde doen ontstaan, die uiteindelijk mijn studiekeuze heeft bepaald.

Ik wil de wis- en natuurkundestudenten in Utrecht bedanken voor de plezierige en leerzame contacten en hoop dat we hiermee nog lang kunnen doorgaan.

Onderwijs is werken met mensen, en in dit verband bedank ik mijn geestelijke inspiratiebronnen Ad en Hanna Stemerding, Marianne van de Wetering, en Ton Brouwer.

Tenslotte dank ik mijn moeder en Mieke voor hun warme belangstelling en hun onvoorwaardelijke steun.

Ik heb gezegd.