

INTORNO ALLA SOMMA DELLE QUARTE POTENZE
DEI NUMERI NATURALI

Gemscid ben Masud ben Mahmud, soprannominato Ghijath ed-Din Alkasciani, matematico ed astronomo, morto prima del 1450 (*), è autore d'un opera in-

(*) F. Woepcke avverte giustamente che il detto Gemscid fu uno degli astronomi ch'ebbero parte alla compilazione delle tavole d'Ulug Beg, ma che morì prima del compimento di questo lavoro (ANNALI || DI MATEMATICA || PURA ED APPLICATA || PUBBLICATI DA || BARNABA TORTOLINI, ecc. TOMO VI. || ROMA, ecc. 1864, pag. 245, lin. 15—18, N.º 5. — PASSAGES RELATIFS || A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES || EXTRAITS || DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS || DU BRITISH MUSEUM || DE LONDRES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 22, lin. 15—18. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE—TOME X. ANNÉE 1865. || PARIS, ecc. 1865, pag. 112, lig. 17—20, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES || EXTRAITS DE DEUX MANUSCRITS ARABES INÉDITS DU BRITISH MUSEUM DE LONDRES. || PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 32, lin. 17—20). — Nella traduzione data da Tommaso Hyde d'un passo della « Storia degli uomini illustri » di Daulet-Scial di Samarkand si legge in fatti (TABVLÆ || LONG. AC LAT. STELLARUM FIXARVM, || EX OBSERVATIONE || ULUGH BEIGHI, ecc. Ex tribus invicem collatis MSS Persicis jam primum || Luce ac Latio donavit. & Commentariis illustravit, || THOMAS HYDE, ecc. OXONII, ecc. CICIDCLXV, pag. 21^a, non numerata, lin. 25—28, pag. 22^a, non numerata, lin. 1—9, Praefatio ad Lectorem. — SYNTAGMA DISERTATIONUM || QUAS OLIM AUCTOR DOCTISSIMUS || THOMAS HYDE S. T. P. || SEPARATIM EDIDIT, ecc. OMNIA DILIGENTER RECOGNITA || A GREGORIO SHARPE, ecc. VOLUMEN PRIMUM. || OXONII, || E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO. || MDCCLXVII, pag. 65^a, numerata xiii, lin. 14—26, PRÆFATIO. — PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || PUBLIÉS AVEC NOTES ET VARIANTES, ecc. PAR M. L. P. E. A. SEDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. cxxviiij, lin. 5—16):

« Rex Sapiens, Justus,

» Victorious ac Prudens fuit, qui in mundo celsum gradum obtinuit, rerumq; sensu
» pilum findere potuit. In ipsius seculo doctorū virorū gradus in summa suā abside
» positus fuit, & excellentibus viris in tempore eius dignitates maximæ contige-
» runt. In Scientiā Geometriæ subtilissima præstitit, & in Quæstionibus de Theo-
» ricis oclusa reseravit: Adeo ut viri præcellentes ac sapientes unanimi-
» ter consentiant quòd in diebus Islamismi, imò à tempore Dilkarnain ad hoc us-
» que momentum, nullum Regem scientiā ac scientiā Ulugh-Begh-Ghurghāno
» parem in sede principatūs fuisse collocatum. In scientiis Mathematicis plenam
» cognitionem adeptus est: & Observationes Stellarum concinnavit cum consensu
» sapientū sui temporis, qualis erat Gloria sapientū & doctorum Cādi Rumæ-
» us, & Mulanā Gijāth-eddin Gjimshid: hi autem viri magni & excellentes, opere
» nondum absoluto, fato cessere. »

Abu-Mohammed Mustafā in un passo d'una sua opera storica tradotto dall'Hyde, parlando d'Ulug Beg, dice (TABULÆ || LONG. AC LAT. STELLARVM FIXARVM, ecc., pag. 20^a, lin. 17—21. — SYNTAGMA DISERTATIONVM, ecc. VOLUMEN PRIMUM, ecc., pag. 64^a, numerata xii, lin. 7—11. — PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG, ecc., pag. cxxxvj, lin. 17—22):

« Ipse idem est qui Observationes Ulugh-Beghicas quae hodie inter homines te-
» runt, edidit; multasque in eisdem faciendis opes impendit. Operam cum eo
» navavit primò, excellentissimus ille Gijāth-eddin Gjimshid, qui tamen mortuus est
» prius quàm Observationes absolverentur, & haud procul à dicto Observatorio se-
» pultus est. »

il che mostra, che Gemscid morì prima che fossero terminate le osservazioni astronomiche ch'egli ed altri erano stati incaricati di fare da Ulug-Beg. — Nella traduzione francese data in luce da Luigi Amelio Sédillot della prefazione alle dette tavole di Ulug-Beg si legge: (PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || TRADUCTION ET COMMENTAIRE, || PAR M. L. P. E. A. SEDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1853, pag. 4, lin. 14—28, pag. 5, lin. 1—11):

« Et comme Dieu (béni soit son nom!) a tiré du trésor
» de sa miséricorde cette sentence « Il n'y a pas de choses
» que nous ne possédions pas, et nous ne les accordons
» que dans une proportion qui nous est connue, » il a
» gratifié son humble et misérable serviteur des honneurs
» et des insignes d'une grandeur et d'une distinction par-
» ticulières; il a voulu que le sens de ce vers, « Nos traces
» montrent ce que nous sommes; regardez donc attentive-
» ment les traces que nous avons laissées après nous, »

» fût compris dans l'écriture admirable des temps, et il a
» déployé les étendards de la gloire et de la renommée sur
» le sommet de la coupole des orbes célestes; il a permis
» que les planètes fussent observées avec le secours d'un
» maître infallible, le savant des savants, qui suit le dra-
» peau de la vertu et de la sagesse, marche dans la voie de
» la certitude, et sait vaincre les difficultés les plus gran-
» des, notre maître Selah-el-Millal-We-el-Din (La prospérité
» de la religion et de la croyance) Musa, connu sous le

titolata « Chiave del calcolo » (*), della quale il compianto Francesco Woepcke

» nom de Cadhi-Zadeh-el-Roumi, que la miséricorde
 » et le pardon soient sur lui; et aussi de l'admirable
 » Molla, renommé parmi les plus célèbres en ce monde,
 » celui qui possède à fond et qui a complété les sciences
 » des anciens, qui peut résoudre les questions les plus ar-
 » dues, notre maître Gaiath-el-Millah-We-el-Din (l'aide de
 » la religion et de la croyance) Djemchid; que Dieu
 » répande une douce fraîcheur sur la terre qui le couvre ».

Questo passo della detta prefazione alle tavole d'Ulugh Beg mostra che quando essa fu composta Gemscid era già morto. Ora si sa che queste tavole furono terminate nell'anno 853 dell'Egira (TABVLÆ || LONG. AC LAT. STELLARVM FIXARVM, ecc., pag. 23^a, non numerata, lin. 16—17. — SYNTAGMA || DISSERTATIONUM || QUAS OLIM, ecc. EDIDIT, ecc. VOLUMEN PRIMUM, ecc., pag. xiv, lin. 30—31. PRÆFATIO. — PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'ULOUG-BEG, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. CXXXj, lin. 11—13), che, secondo l'uso civile arabo di incominciare l'Egira nel giorno 16 di luglio del 622, incominciò nel giorno 24 di febbraio del 1449 (Vergleichungs-Tabellen || der || Muhammedanischer und Christlichen Zeitrechnung, ecc. herausgegeben von || Dr. Ferdinand Wüstenfeld. || Leipzig, 1854, ecc., pag. 36, col. 3^a, lin. 3), e terminò nel giorno 13 di febbraio del 1450 (Vergleichungs-Tabellen, ecc., pag. 36, col. 3^a, lin. 4).

Tommaso Hyde nella « Praefatio ad Lectorem » premessa alla sua edizione delle tavole d'Ulugh Beg scrive (TABVLÆ || LONG. AC LAT. STELLARVM FIXARVM, ecc., pag. 22^a, non numerata, lin. 28, pag. 23^a, non numerata, lin. 1—9. — SYNTAGMA DISSERTATIONUM, ecc. VOLUMEN PRIMUM, ecc., pag. xiv, lin. 15—23):

» *Celebrium vi-*
 » *rorum quos Ulugh Beighus in auxilium vocavit, nomina in ipsius Praefatione*
 » *pleniùs scribuntur: eorum enim primus est* مولانا صلاح الدين موسى المشتهر
 » بقاضى زاده الرومى Mulana Salâh-eddîn MUSA qui celebratus est cogno-
 » mento Cádi-zâde Rumæus. (Hunc Author noster vocat حضرت استادى و
 » Præceptorem ac Fulcrum suum.) Persæ pronuntiant Câzi Zâde. Se-
 » cundus est مولانا غياث الدين جمشيد Mulanâ Gijâth-eddîn GJIMSHID.
 » Quorum Hic (cujus est Liber Astronomicus dictus سما Scala cœli) in ipso
 » ferè operis limine, Ille verò priusquàm ad umbilicum perductum esset, manu fati
 » occubuit ».

Secondo questo passo della prefazione medesima Gemscid sarebbe morto quando la compilazione delle dette tavole astronomiche d'Ulugh Beg era appena cominciata, cioè vari anni prima dell'853 dell'Egira. — La medesima opera di Gemscid intitolata « Scala coeli » menzionata dall'Hyde in questo passo della sua « Praefatio » suddetta è citata da Hagi Chalfa, morto nel settembre del 1658 (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. TOMUS PRIMUS, ecc. LEIPZIG, ecc. M. DCCC. XXXV, pag. XIII, lin. 14—15) in due passi del suo celebre « Lessico bibliografico » (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO, ecc. COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. TOMUS TERTIUS, ecc. LONDON, ecc. M. DCCC. XLII, pag. 610, lin. 15—23, n.° 7224. — LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. TOMUS SEXTUS, ecc. LONDON, ecc. M. DCCC. LII, pag. 580, lin. 13—16, n.° 14725), nel primo de' quali egli la dice divisa in sei dissertazioni, ed indica il contenuto di ciascuna di tali dissertazioni, e nel secondo cita una traduzione della medesima « Scala coeli ».

Giovanni Enrico Hottinger cita anch'egli la medesima « Scala coeli » di Gemscid così (JOH: HENRICI HOTTINGERI, S. TH. D. || PROMPTUARIUM; || Sive || BIBLIOTHECA ORIENTALIS, ecc. HEIDELBERGÆ; ecc. CIO IOC LIIX, pag. 251, lin. 25, pag. 252, lin. 1—2):

» Scala
 » coeli, seu de distantia & magnitudine corporum coelesti-
 » um, autore Gemscido, Gajathoddino. »

Ciò che si è detto di sopra nella presente nota, intorno al tempo in cui morì Gemscid, mostra 1° che per errore Hagi Chalfa (LEXICON, ecc. TOMUS TERTIUS, ecc., pag. 610, lin. 17, n.° 7224), ed A. Kuenen (CATALOGUS || CODICUM ORIENTALIUM || BIBLIOTHECAE ACADEMIAE LUGDUNO BATAVAE || AUCTORIBUS || P. DE JONG ET M. J. DE GOEGE. || VOLUMEN TERTIUM. || LUGDUNI BATAVORUM, ecc. MDCCCLXV, pag. 75, lin. 24) dissero morto il medesimo Gemscid nell'anno 919 dell'Egira; 2° che anche per errore nel catalogo intitolato « CATALOGUE || DES || MANUSCRITS ET XYLOGRAPHS || OBIENTAUX || DE » LA || BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE PUBLIQUE || DE || ST. PÉTERSBOURG. || ST. PÉTERSBOURG, || IMPRIMERIE || DE L'ACADÉMIE IMPÉRIALE DES SCIENCES. || 1852 » (pag. 118, lin. 1—5) egli dicesi morto nell'887 dell'Egira.

(*) Del testo arabo di quest'opera si hanno i seguenti esemplari manoscritti:

Londra: *British Museum, Additional Manuscripts*, n.° 7470 (Rich.) (CATALOGUS || CODICUM MANUSCRIPTORUM ORIENTALIUM || QUI || IN MUSEO BRITANNICO || ASSERVANTUR. || PARS SECUNDA, || CODICES ARABICOS AMPLECTENS. || LONDINI: || IMPENSIS CURATORUM MUSEI BRITANNICI. || MDCCCLII, pag. 199, col. 2^a, lin. 1—43, Codex CCCCXIX). — Londra: « Library of the India Office », manoscritto n.°

tradusse dall'arabo in francese la prefazione, ed un passo relativo alla somma

1039 (già n.º 756), carte 15—22 (CATALOGUE || DES || MANUSCRITS ET XYLOGRAPHE || ORIENTAUX || DE LA || BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE PUBLIQUE || DE || ST. PÉTERSBOURG, ecc. pag. 118, lin. 13—14. — PRO-LÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || TRADUCTION ET COMMENTAIRE, || PAR M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc., pag. 226, lin. 6—9). — Leida: Biblioteca dell'Università, Codice 185 Gol. (CATALOGUS || LIBRORUM || TAM IMPRESSORUM QUAM MANUSCRIPTORUM || BIBLIOTHECÆ || PUBLICÆ || UNIVERSITATIS || LUGDUNO-RATAVÆ. || Curà & Operà || WOLFERDI SENGUERDII, ecc. JACOBI GRONOVII, ecc. & || JOHANNIS HEYMAN, ecc. LUGDUNI APUD BATAVOS, ecc. M D CCXVI, pag. 452, col. 2ª, lin. 35—37, MANUSCRIPTI || LIBRI ORIENTALES, ecc., n.º 1049. — CATALOGUS || CODICUM ORIENTALIUM || BIBLIOTHECÆ ACADEMIÆ LUGDUNO BATAVÆ || AUCTORIBUS || P. DE JONG ET M. J. DE GOEJE. || VOLUMEN TERTIUM, ecc., pag. 75, lin. 22—28, pag. 76, lin. 1—3, Codex MXXXVI (Cod. 185. Gol.). — Berlino: Biblioteca Reale, manoscritti già posseduti da A. Sprenger, n.º 1824 (carte numerate 1—78), e n.º 1824 a (carte numerate 1—176) (A CATALOGUE || OF THE || BIBLIOTHECA ORIENTALIS || SPRENGERIANA. || GIESSEN. || WILHELM KELLER, PRINTER. || JANUARY 1857, pag. 100, lin. 12—16, n.º 1824). — Pietroburgo: Biblioteca Imperiale, Codice n.º 131 (CATALOGUE || DES || MANUSCRITS ET XYLOGRAPHE || ORIENTAUX || DE LA || BIBLIOTHÈQUE IMPÉRIALE PUBLIQUE || DE || ST. PÉTERSBOURG, ecc., pag. 118, lin. 1—11, Codex CXXXI).

Il primo di questi manoscritti fece parte d'una collezione di manoscritti orientali, già posseduta da Claudio Giacomo Rich, ed acquistata dal *British Museum* per voto del Parlamento Inglese nel giorno 25 di aprile del 1825 per la somma di 7,500 lire sterline, dalla vedova del medesimo Claudio Giacomo Rich (A HANDBOOK FOR || READERS || AT || THE BRITISH MUSEUM. || BY || THOMAS NICHOLS || ASSISTANT IN THE BRITISH MUSEUM. || LONDON: || LONGMANS, GREEN, AND CO. || 1866, pag. 151, col. 2ª, lin. 50—54, pag. 152, col. 1, lin. 1—7). È quindi descritto in un catalogo manoscritto posseduto dal *British Museum* di questa collezione (Catalogus || Codicum Arabicorum || qui in || Bibliotheca Richiana || exstant; || raptim et nimis propter sed pro viribus opibusque suis || confecit || I. Forshall, || 1836. || Vol. 2, carta 59, *recto*). Questo manoscritto, del quale si servì il Woepcke per la sua traduzione menzionata di sopra, si compone di 110 carte, nell'ultima delle quali trovasi subito dopo l'esemplare contenuto nel codice medesimo della detta « Chiave del Calcolo » una nota, che nel catalogo stampato de'codici orientali del *British Museum* è tradotta così [(CATALOGUS || CODICUM MANUSCRIPTORUM ORIENTALIUM || QUI || IN MUSEO BRITANNICO || ASSERVANTUR. || PARS SECUNDA, ecc., pag. 199, col. 2ª, lin. 38—43):

« Finis transcriptionis hujus codicis excellentis
 » incidit in feriam secundam mensis Shawwāl, anno
 » 997: quem exaravit pauper erga Deum, " Abd al-

» Razzac Ibn " Abd Allah Ibn " Abd al-Razzac Ibn
 » Jamshid Ibn Mas " ud Ibn Jamshid, qui fuit auctor
 » hujus libri illustris. " »

Quindi è chiaro che l'esemplare della « Chiave del Calcolo » di Gemscid contenuto nel detto codice « *Additional manuscripts*. n.º 7470 » fu terminato di scrivere in un lunedì del mese Sciawal dell'anno 997 dell'Egira, il qual mese, secondo il precitato uso civile arabo d'incominciare l'Egira nel 16 luglio del 622, incominciò nel giorno 13 di agosto del 1589 (Vergleichungs-Tabellen, ecc. herausgegeben von || Dr. Ferdinand Wüstenfeld, ecc., pag. 40, col. 1ª, lin. 47, col. 2ª, lin. 47, pag. 41, col. 4, lin. 47). — Intorno alla detta « Chiave del calcolo » di Gemscid sono date notizie da Hagi Chalfa (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM, ecc. TOMUS SEXTUS, ecc., pag. 12, lin. 19—28, n.º 12563, pag. 28, lin. 14—18, n.º 12591), che oltre quest'opera e la « Scala coeli » menzionata di sopra (pag. 295, lin. 12—44), cita anche altri lavori dello stesso Gemscid (LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM, ecc. TOMUS SEXTUS, ecc., pag. 324, lin. 27—31, pag. 325, lin. 11—14, n.º 12684. — LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. TOMUS SECUNDUS, ecc. LEIPZIG, ecc. M. DCCC. XXXVII, pag. 16, lin. 16—17, n.º 1645. — LEXICON || BIBLIOGRAPHICUM ET ENCYCLOPÆDICUM || A || MUSTAFA, ecc. ET NOMINE HAJI KHALFA CELEBRATO || COMPOSITUM, ecc. VERTIT, ecc. GUSTAVUS FLUEGEL, ecc. TOMUS QUARTUS, ecc. LONDON, ecc. M. DCCC. XLV, pag. 155, lin. 12—16, n.º 7933).

In un codice manoscritto della Biblioteca Bodleiana d'Oxford trovasi un esemplare d'un opera astronomica di Gemscid, che da Giovanni Uri nel suo catalogo de'codici manoscritti della Biblioteca medesima è indicato nel modo seguente (BIBLIOTHECÆ || BODLEIANÆ || CODICUM || MANUSCRIPTORUM || ORIENTALIUM, ecc. CATALOGUS, ecc. A JOANNE URI || CONFECTUS. || PARS PRIMA. || OXONIE, || E TYPOGRAPHEO CLARENDONIANO. || M DCC LXXXVII. — CODICES MANUSCRIPTI || ARABICI. — MATHEMATICI || ET || GEOGRAPHI || IN FOLIO, pag. 191, col. 2ª, lin. 7—13, Cod. DCCCLXXXI, 4ª):

di alcune serie di cubi (*). Nella traduzione fatta dal Woepcke di questo passo si legge (**):

« Quatorzième règle. — Si nous désirons (connaître) la somme des carré-carrés
 » des nombres suivant l'ordre à partir de l'unité, nous retranchons de la somme
 » de ces nombres une unité et nous prenons constamment un cinquième du
 » reste. Nous l'ajoutons à la somme des dits nombres, et nous multiplions ce qui
 » en provient par la somme des carrés des mêmes nombres. Il résultera la quan-
 » tité cherchée.

» Exemple. Nous désirons additionner les carré-carrés des nombres suivant
 » l'ordre depuis l'unité jusqu'à six. Nous prenons la somme de ces nombres, ce
 » qui est vingt et un. Nous en retranchons une unité; il reste vingt. Nous en
 » prenons le cinquième, ce qui est quatre. Nous l'ajoutons à vingt et un; il pro-
 » vient vingt cinq. Nous multiplions cela par quatre-vingt onze, ce qui est la
 » somme des carrés des mêmes nombres. Il résulte deux mille deux cent soixante
 » quinze ».

In questo passo della suddetta « Chiave del calcolo » è data ed applicata al caso di $n = 10$ la formola

$$(1) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \left((1+2+3 \dots + n) + \frac{1}{5} (1+2+3+ \dots + (n-1) + n-1) \right) (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2)$$

« 4^o Liber, cum Tabulis, de Stella-
 » rum vagarum et fixarum magnitudine,
 » earumque a centro terræ distantia, fo-
 » lia 12 efficiens. Composuit GAIATHRED-

» DIN GIEMSHID, BEN MASUD BEN MAH-
 » MUD, inscripsitque: *Tractatus ad un-*
 » *guem factus.* »

Gemscid corresse anche le tavole Ilkhanie Regie di Nassir-Eddin (BIBLIOTHÈQUE || ORIENTALE, ecc. Par Monsieur D'HERBELOT, || A PARIS, ecc. M. DC. XCVII, ecc., pag. 934, col. 2^a, lin. 55—62. — PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || PUBLIÉS, ecc. PAR M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. xcix, lin. 10—11, pag. c, lin. 1—2, 31—33). — Vari lavori del suddetto Gemscid sono da lui stesso citati nella prefazione alla detta « Chiave del calcolo » (ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc. 1864, pag. 245, lin. 31—37, pag. 246, pag. 247, lin. 1—2, n^o 5. — PASSAGES RELATIFS || A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 22, lin. 31—37, pag. 23, pag. 24, lin. 1—2. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME X. ANNÉE 1865, ecc., pag. 112, lin. 31—34, pag. 113, pag. 114, lin. 1—18. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 32, lin. 31—34, pag. 33, pag. 34, lin. 1—18).

Si è già detto di sopra (pag. 254, lin. 6—7) essere stato avvertito dal Woepcke che Gemscid ebbe parte nella compilazione delle tavole astronomiche di Ulug-Beg. L'illustre Luigi Amelio Sédillot descrisse accuratamente sei esemplari manoscritti di queste tavole (PROLÉGOMÈNES || DES || TABLES ASTRONOMIQUES || D'OLOUG-BEG || PUBLIÉS, ecc. PAR M. L. P. E. A. SÉDILLOT, ecc. PARIS, ecc. 1847, pag. cxxxviiij, lin. 19—31, pag. cxxxix—cxli, pag. cxli, lin. 1—4). Un altro esemplare manoscritto delle tavole medesime, trovasi in un codice manoscritto contrassegnato « Codex Arabicus, n^o CXXXI » ora posseduto dalla Biblioteca Vaticana, e del quale Monsignore Stefano Evodio Assemani ha dato una descrizione (SCRIPTORUM VETEBUM || NOVA COLLECTIO || E VATICANIS CODICIBUS EDITA || AB ANGELO MAIO || BIBLIOTHECAE VATICANAE PRAEFECTO. || TOMUS IV. || ROMAE || TYPIS VATICANIS || M. DCCC. XXXI CODICES ARABICI || VEL A CHRISTIANIS SCRIPTI VEL AD RELIGIONEM || CRHISTIANAM SPECTANTES, pag. 437, lin. 1—29, CODEX CCLXIX), che comincia così (SCRIPTORUM VETERUM || NOVA COLLECTIO, ecc. TOMUS IV, ecc., pag. 437, lin. 1—7):

« CCLXIX.

« Codex in fol. m. Lombyc. foliorum 88, arabicis litteris et sermone e.
 » legantissime exaratus, inter codices arabicos a I. S. Assemano in vaticanam
 » bibliothecam ex oriente inlatos, olim trigesimus tertius. Ibi continentur.
 » *Tabulae astronomicae*, iuxta observationes a Salaheddino Mose, cogno-
 » mento Cadizade romaeno, et a Gaiatheddino Gemscid, Sarmacandae iussu Oghli
 » Beiki, Tamerlani nepotis, factas; a quo etiam titulum sumpserunt. »

(*) ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc., pag. 245—248, N.° 5. — PASSAGES RELATIFS || A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 22—25. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME X. ANNÉE 1865, ecc., pag. 112—116, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, ecc., pag. 32—36.

(**) ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc., pag. 247, lin. 25—32, pag. 248, lin. 1—5. — PASSAGES RELATIFS || A DES SOMMATIONS || DE SÉRIES DE CUBES, ecc. ROME, ecc. 1864, pag. 24, lin. 29—32, pag. 25, lin. 1—9. — JOURNAL || DE || MATHÉMATIQUES, ecc. DEUXIÈME SÉRIE — TOME X. ANNÉE 1865, ecc. pag. 115, lin. 20—23, pag. 116, lin. 1—9, AVRIL 1865. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc. PAR M. F. WOEPCKE, ecc. PARIS, ecc. 1865, pag. 35, lin. 20—23, pag. 36, lin. 1—9.

Pietro di Fermat, morto in Castres in età di 57 anni nel giorno 12 di gennaio del 1665 (*), in una lettera stampata nel 1679 (**), e diretta ad Egidio di Roberval in data « Du 4. Novembre 1636 » (***), scrive (****):

« Si quadruplum maximi numeri binario auctum ducas in
» quadratum trianguli numerorum, & à producto demas summam quadratorum à singu-
» lis fiet summa quadrato-quadratorum quintupla ».

Cioè:

« Si ha

$$5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = (4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) ».$$

Questa formola si deduce facilmente dalla (1). Essendo in fatti:

$$(2) \quad 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$(3) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

ed avendosi per ciò

$$(1+2+3+\dots+n) + \frac{1}{5} \left(1+2+3+\dots+(n-1)+n-1 \right) (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) = \left(\frac{6}{5} \left(\frac{n(n+1)}{2} \right) - \frac{1}{5} \right) \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{1}{5} \left((4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right)$$

la (1) dà

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{1}{5} \left((4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2) \right);$$

quindi

$$5(1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4) = (4n+2) \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2).$$

Il Sig. Emilio Brassinne nel suo lavoro intitolato « PRÉCIS || DES || OEUVRES MA-

(*) BIOGRAPHIE || TOULOUSAINE, ecc. TOME PREMIER. || A PARIS || CHEZ L. G. MICHAUD, ecc. 1823, pag. 218, col. 1^a, lin. 22—26, 38—43. — REVUE || DES || DEUX MONDES. || TOME DIXIÈME || QUINZIÈME ANNÉE. — NOUVELLE SÉRIE || PARIS, ecc. 1845, pag. 694, lin. 37—40, nota (2), 15 MAI 1845 — FERMAT || PAR || M. LIBRI || PARIS || IMPRIMERIE DE H. FOURNIER ET C.^o || 7 RUE SAINT-BENOIT. || 1845 (In 8.^o, di 32 pagine, nella seconda delle quali si legge: « EXTRAIT DE LA REVUE DES DEUX MONDES, || LIVRAISON DU 15 MAI 1845 »), pag. 18, lin. 37—40, nota (2). — MÉMOIRES || DE || L'ACADÉMIE IMPÉRIALE || DES SCIENCES, || INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES || DE TOULOUSE. || Quatrième Série. || TOME III. || TOULOUSE, ecc. 1853, pag. 10, lin. 21—38. — PRÉCIS || DES || ŒUVRES MATHÉMATIQUES || DE P. FERMAT || ET DE L'ARITHMÉTIQUE DE DIOPHANTE; || PAR E. BRASSINNE, ecc. PARIS, || MALLET-BACHELIER, ecc. 1853, pag. 10, lin. 21—38.

(**) VARIA OPERA || MATHEMATICA || D. PETRI DE FERMAT, || SENATORIS TOLOSANI. || Accesserunt selectæ quædam ejusdem Epistolæ, vel || ad ipsum à plerisque doctissimis viris Gallicè, Latinè, || vel Italicè, de rebus ad Mathematicas disciplinas, || aut Physicam pertinentibus scriptæ. || TOLOSÆ, || Apud JOANNEM PECH, Comitiorum Fuxensium Typographum, juxta || Collegium PP. Societatis JESU. || M. DC. LXXIX, pag. 146, pag. 147, lin. 1—28. — Il Sig. Brassinne ne ha dato un estratto nel 1852 (MÉMOIRES || DE || L'ACADÉMIE IMPÉRIALE || DES SCIENCES, || INSCRIPTIONS ET BELLES-LETTRES || DE TOULOUSE. || Quatrième Série. || TOME III, ecc., pag. 138, lin. 1—26. — PRÉCIS || DES || ŒUVRES MATHÉMATIQUES || DE P. FERMAT || ET DE L'ARITHMÉTIQUE || DE DIOPHANTE; || PAR E. BRASSINNE, ecc., pag. 138, lin. 1—26.

(***) VARIA OPERA || MATHEMATICA || D. PETRI DE FERMAT, ecc., pag. 146, lin. 3. — Vedi sopra, pag. 262, lin. 21—23.

(****) VARIA OPERA || MATEMATICA || D. PETRI DE FERMAT, ecc., pag. 146, lin. 22—24. — Vedi sopra, pag. 262, liu. 1—31, 4ü—50.

» THÉMATIQUES || DE P. FERMAT », ecc traduce ed espone il passo riportato d
pra della detta lettera del Fermat così (*):

« Problème. — Trouver la somme des quatrièmes puissances
» des termes de la progression naturelle, 1, 2, 3. . . x. Si vous
» multipliez le quadruple du plus grand nombre augmenté de 2,
» par le carré du triangle des nombres, et si du produit vous re-
» tranchez la somme de leurs carrés, vous obtiendrez la somme
» quintuple de leurs quatrièmes puissances. (Si les nombres sont
» 1, 2, 3. . . x, la formule de Fermat sera :

$$» \Sigma x^4 = (4x - 2) \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \Sigma x^2. »$$

Per errore in questo passo del detto lavoro del Sig. Brassinne trovasi

$$« \Sigma x^4 = (4x - 2) \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \Sigma x^2 »$$

in vece di

$$« 5 \Sigma x^4 = (4x + 2) \left(\frac{x(x+1)}{2} \right)^2 - \Sigma x^2 ».$$

Dalle (2), (3) avendosi

$$\left(1+2+3+\dots+n + \frac{1}{5}(1+2+3+\dots+(n-1)+n-1) \right) (1^2+2^2+3^2+\dots+n^2) = \frac{(3n(n+1)-1)n(n+1)}{30}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}$$

la (1) dà

$$(4) \quad 1^4 + 2^4 + 3^4 + \dots + n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} (**).$$

(*) MÉMOIRES || DE || L'ACADÉMIE IMPÉRIALE || DES SCIENCES, || INSCRIPTIONS ET BELLES
TEES || DE TOULOUSE. || Quatrième Série. || TOME III, ecc., page 133, lin. 2—9. — PRÉCIS || DES
VRES MATHÉMATIQUES || DE P. FERMAT || ET DE L'ARITHMÉTIQUE DE DIOPHANTE; || PAR E. BRAS
ecc., pag. 138, lin. 1—9.

(**) RÉSUMÉS ANALYTIQUES || PAR || M. AUGUSTIN LOUIS CAUCHY || MEMBRE DE L'ACADÉMIE
SCIENCES DE PARIS, || DE LA SOCIÉTÉ ROYALE DE LONDRES, ETC..... || À TURIN || DE L'IMPRIMERIE
ROYALE || 1833, pag. 70, lin. 5. — MANUEL || DES CANDIDATS || A L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE || P. G. G.
GÈNE CATALAN, etc. TOME PREMIER, ecc. PARIS, || MALLET-BACHELIER, ecc. 1857, pag. 83,
— ANNALI || DI MATEMATICA || PURA ED APPLICATA || PUBBLICATI DA || BARNABA TORTOLINI, ecc.
IV. || ANNO 1861. || ROMA, ecc. 1861, pag. 47, lin. 13, N° 1. — INTORNO || AD UNA FORMOLA SOMMA
DELLE POTENZE INTERE || DE' NUMERI NATURALI || NOTA || DI F. SIACCI (In 4°, di 4 pagine, nella
delle quali, numerata 4 (lin. 19—20) si legge: « Estratta dagli Annali di Matematica pura ed
» cata, || Tomo IV. Num. 1. Gennaro e Febbraro. Roma 1861. »), pag. 2, lin. 13. — CENTRO
PRA ALCUNI RISULTATI OTTENUTI || NELL'ANALISI ALGEBRICA E DIFFERENZIALE || DA G. B. MAR
PROFESSORE DI MATEMATICHE IN GENOVA || GENOVA || CO'TIPI DEL R. I. DE'SORDO-MUTI || 1861,
5, lin. 21. — TRATTATO || DI || ALGEBRA SUPERIORE || DI || GIOVANNI NOVI, ecc. PARTE PRIMA. || DI ||
ALGEBRICA. || FIRENZE. || FELICE LE MONNIER. || 1863, pag. 177, lin. 6. — ARCHIV || der || MATHE
UND PHYSIK, ecc. Herausgeber: || Dr. Johann August Grunert, ecc. Vierundfunzigster Theil. ||
swald, ecc. 1872, pag. 71, lin. 16, Erstes Heft. — Essendo

$$n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1) = 6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n$$

la (4) può anche scriversi così (ÉLÉMENTS || D'ALGÈBRE; || PAR M. BOURDON, ecc. PARIS, ecc. 1833,
697, lin. 8. — ÉLÉMENTS || D'ALGÈBRE, || PAR M. BOURDON, ecc. PARIS, ecc. 1860, pag. 521,
— ANNALI || DI MATEMATICA, ecc. TOMO VI, ecc., pag. 247, lin. 40—41. — PASSAGES RELATIFS
A DES SOMMATIONS DE SÉRIES DE CUBES, ecc., ROME, ecc. 1864, pag. 25, lin. 22—23. — JOU
DE || MATHÉMATIQUES, ecc. OU || RECUEIL, ecc. Publié || PAR JOSEPH LIOUVILLE, ecc. DEUXIÈME
RIE - TOME X. ANNÉE 1865, etc., pag. 116, lin. 22—24. — PASSAGES RELATIFS || A DES || SOMMATIONS

Se

$$S_m = a^m + (a+r)^m + (a+2r)^m + \dots + (a+(n-1)r)^m$$

si ha la seguente formola :

$$S_m = \frac{(a+nr)^{m+1} - a^{m+1}}{(m+1)r} - \frac{m}{2} r S_{m-1} - \frac{m(m-1)}{2 \cdot 3} r^2 S_{m-2} - \frac{m(m-1)(m-2)}{2 \cdot 3 \cdot 4} r^3 S_{m-3} - \dots - \frac{nr^m}{m+1} (*)$$

Se in questa formola pongasi

$$a = r = 1$$

DE SÉRIES DE CUBES, ECC. PAR M. F. WOEPCKE, ECC. PARIS, ECC. 1865, pag. 36, lin. 22—24),

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + \dots + n^4 = \frac{6n^5 + 15n^4 + 10n^3 - n}{30}$$

(*) NOUVELLES ANNALES || DE || MATHÉMATIQUES. || JOURNAL, ecc. Rédigé par MM. || TERQUEM, ecc. ET || GERONO, ecc. TOME PREMIER. || PARIS, ecc. 1842, pag. 176, lin. 5—21. — ALGÈBRE || ÉLÉMENTAIRE || A L'USAGE || DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES || ET || AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT, || DEUXIÈME ÉDITION, || COMPRENANT TOUTES LES MATIÈRES EXIGÉES POUR L'ADMISSION || A L'ÉCOLE CENTRALE DES ARTS ET MANUFACTURES. || PAR M. LIONNET, ecc. || PARIS || MALLET-BACHELIER, ecc. 1858, pag. 253, lin. 7—22. — ALGÈBRE || ÉLÉMENTAIRE || A L'USAGE || DES CANDIDATS AU BACCALAURÉAT ÈS SCIENCES, || ET || AUX ÉCOLES DU GOUVERNEMENT, || PAR M. LIONNET, ecc. TROISIÈME ÉDITION || PARIS, || GAUTHIER-VILLARS, ecc. SUCCESSEUR DE MALLET-BACHELIER, ecc. 1868, pag. 254, lin. 7—22. — TRAITÉ || D'ALGÈBRE, || PAR CHOQUET, ecc. PARIS. || MALLET-BACHELIER, ecc. 1856, pag. 293, lin. 3—21. — Se in questa formola si scrive b in vece di r si ha la seguente

$$S_m = \frac{(a+nb)^{m+1} - a^{m+1} - nb^{m+1} - \frac{(m+1)m}{1 \cdot 2} b^2 S_{m-1} - \frac{(m+1)m(m-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} b^3 S_{m-2} - \dots - (m+1) b^m S_1}{(m+1)b}$$

che il P. Giovanni Prestet, morto nel giorno 8 di giugno del 1690 (DICTIONNAIRE || DE LA || LANGUE FRANÇOISE, || ANCIENNE ET MODERNE, || DE PIERRE RICHELET || AUGMENTÉ, ecc. TOME PREMIER. || A-D. || Imprimé à Lyon, \wp se vend || A PARIS, || Chez JACQUES ESTIENNE, ruë Saint Jacques, à la Ver-tu. || MDCCXXVIII. || AVEC PRIVILEGE DU ROY, pag. xcviij, col. 2^a, lin. 26—38) dà nella edizione intitolata « ELEMENS || DES || MATHÉMATIQUES || OU || PRINCIPES GÉNÉRAUX || DE || TOUTES LES SCIENCES, || » QUI ONT LES GRANDEURS POUR OBJET. || CONTENANT VNE METHODE COVRTE ET FACILE || pour » *comparer ces grandeurs* \wp pour découvrir leurs rapports par le moyen || des caracteres des nom-» bres, \wp des lettres de l'alphabet. Dans laquelle || les choses sont démontrées selon l'ordre Geo-» metrique, \wp l'Analyse renduë || beaucoup plus facile, \wp traitée plus à fond que l'on n'a fait » jusqu'ici. || A PARIS, || Chez ANDRÉ PRALARD, Marchand Libraire, ruë Saint Jacques, || à l'Occasion || M. DC. LXXV. || AVEC PRIVILEGE DV ROY » (pag. 178, lin. 21—42) scrivendo :

« DIXIÈME PROBLEME.

- » LXI. Si nous prenons la Table des puissances, & que la grandeur a soit con-
 » siderée comme le premier terme d'une progression arithmetique, & b com-
 » me la difference qui regne dans cette progression; la somme de telles
 » puissances qu'on voudra de tous les termes de la progression, peut se trouver
 » ainsi.
 » On prend dans la Table des puissances le rang de la puissance plus
 » haute d'un degré que les puissances cherchées, & l'on élève au même de-
 » gré le terme qui suit immédiatement & de plus près le dernier de la pro-
 » gression; & l'on en retranche.
 » 1.^o Le premier terme de la progression élevé à ce même degré.
 » 2.^o Le produit du nombre de tous les termes par la différence élevée à
 » ce même degré.
 » 3.^o Chaque terme de la progression élevé à chacune des puissances qui
 » sont moindre d'un degré que les puissances cherchées, & multiplié dans
 » chacun de ces degrés par ce qui multiplie un pareil degré du premier terme
 » a au rang que l'on a pris dans la Table des puissances. Ensuite on divise
 » le reste qu'on trouve par la puissance du premier terme a , qui a même
 » degré que les puissances cherchées, multiplié par le nombre de la cellule
 » où cette puissance se trouve au rang que l'on a pris. Et l'exposant qu'on
 » trouve est aussi la somme cherchée. Les exemples éclairciront ces
 » règles. »

Questa formola è applicata quindi nella edizione stessa (pag. 179, pag. 180, lin. 1—17) ai casi di $a=5$, $b=3$, $n=4$, $m=2$, $m=3$. Questa edizione della quale la Biblioteca Casanatense di Roma possiede un esemplare contrassegnato « X. V. 64 » si compone di 432 pagine, nelle 3^a—4^a delle quali trovansi una dedicatoria firmata (pag. 4^a, lin. 24—25): « Votre tres-humble, tres-obeissant, & tres-» obligé serviteur, J. P. ».

e quindi successivamente

$$m = 1, \quad m = 2, \quad m = 3, \quad m = 4$$

si hanno le formole

$$(2) \quad S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$(3) \quad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6},$$

$$(5) \quad S_3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2,$$

$$(6) \quad S_4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} \quad (*)$$

delle quali le prime tre sono identiche colle (2) (3), e la quarta è identica colla (4).

La (6) si può anche dimostrare direttamente, come ha avvertito il Sig. Dostor, sostituendo nella

$$n^4 = \frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30} - \frac{(n-1)n(2n-1)(3n^2-3n-1)}{30}$$

successivamente in vece di n tutti i numeri dall'1 ad n , e sommando quindi le eguaglianze che così si ottengono (**).

In simil modo possono dimostrarsi direttamente le (3) (5).

Sommando in fatti le

$$1^2 = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

$$2^2 = \frac{2 \cdot 3 \cdot 5 - 1 \cdot 2 \cdot 3}{6},$$

$$3^2 = \frac{3 \cdot 4 \cdot 7 - 2 \cdot 3 \cdot 5}{6},$$

$$4^2 = \frac{4 \cdot 5 \cdot 9 - 3 \cdot 4 \cdot 7}{6},$$

.....

$$(n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1) - (n-1)(n-2)(2n-3)}{6},$$

$$n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1) - (n-1)n(2n-1)}{6},$$

si ha

(*) Dalle (3) (5) (6) si hanno anche le seguenti

$$S_2 = \frac{2n+1}{3} S_1; \quad S_3 = S_1^2, \quad S_4 = \frac{3n^2+3n-1}{5} S_2.$$

Dalla prima di queste ultime tre formole si ha anche, a motivo della seconda (ARCHIV || der || MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Vierundfunzigster Theil, ecc., pag. 72, lin. 9-12):

$$S_1 S_2 = \frac{4}{3} (2n+1) S_3.$$

(**) ARCHIV || der || MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Vierundfunzigster Theil, ecc., pag. 70, lin. 17-23, pag. 71, lin. 1-16.

$$(2) \quad 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad (*)$$

Sommando similmente le

$$1^3 = \frac{1^2 \cdot 2^2}{4},$$

$$2^3 = \frac{2^2 \cdot 3^2 - 1^2 \cdot 2^2}{4},$$

$$3^3 = \frac{3^2 \cdot 4^2 - 2^2 \cdot 3^2}{4},$$

$$4^3 = \frac{4^2 \cdot 5^2 - 3^2 \cdot 4^2}{4},$$

.....

$$(n-1)^3 = \frac{(n-1)^2 n^2 - (n-2)^2 (n-1)^2}{4},$$

$$n^3 = \frac{n^2 (n+1)^2 - (n-1)^2 n^2}{4},$$

si ha

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2} \right)^2 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2.$$

È da notare che la (1) può scriversi così

$$S_4 = (S_1 + \frac{1}{5} (S_1 - 1)) S_2;$$

quindi

$$6 S_1 S_2 = S_2 + 5 S_4,$$

$$S_1 S_2 = \frac{1}{6} S_2 + \frac{5}{6} S_4 \quad (**).$$

B. BONCOMPAGNI.

(*) Lehrbuch || der || Mathematik und Physik || für || staats- und landwirthschaftliche Lehranstalten || und Kameralisten überhaupt || von || Johann August Grunert ecc. || Erster Theil. Erste Abtheilung. || Element der theoretischen und praktischen Arithmetik. || Leipzig, 1841, pag. 340, lin. 22—36, pag. 341, lin. 1—11.

(**) ARCHIV || der || MATHEMATIK UND PHYSIK, ecc. Vierundfunzigster Theil, ecc., pag. 72, lin. 5—14.