Vertaling van Hoofdstuk 9 van de vierde verhandeling, "Over het meten" van al-Kāshī, *Sleutel tot de Rekenkunde* (Miftāḥ al-Ḥisāb).[1]

Het negende hoofdstuk over de afmetingen van bouwwerken en gebouwen. De specialisten in dit vakgebied hebben hiervan alleen de boog en het (langwerpige) gewelf genoemd, en niet op de manier zoals noodzakelijk is. Daarom heb ik ze besproken op een manier die (wel) noodzakelijk is, met de rest, omdat de afmeting van gebouwen vaker nodig is dan de rest. Ik heb het (hoofdstuk) in drie secties verdeeld.

De eerste sectie, over de afmeting van de boog en het gewelf.

De voorgangers heben deze twee (objecten) ingevoerd als helft van een holle cylinder. Maar zulke gewelven treffen we niet aan in oude en nieuwe gebouwen. De meeste die wij gezien hebben, hebben in het midden een knik. Enkele ervan zijn veel kleiner dan een halve holle cylinder.

Weet dan dat de boog zoals het hoort, en die zullen we de echte boog noemen, een overdekt (gebouw) is, gebouwd op twee grondvlakken, die in één (horizontaal) vlak liggen tussen twee evenwijdige lijnen. Het is alsof hij (de boog) samengesteld is uit vijf stukken.[2]

Twee ervan zijn stukken van één rond (oppervlak), of één ring, of één tambourijn, zodat de diameter van de holle kant niet kleiner is dan de spanwijdte van de boog, daarmee bedoel ik de afstand tussen de twee grondvlakken van de boog, een aan de rechterkant en de andere aan de linkerkant. Deze twee zijn gebouwd op de twee grondvlakken.

Twee andere stukken ervan zijn twee stukken van een rond (oppervlak) of een ring of een tambourijn, zodat de diameter van de holle kant (van deze nieuwe stukken) groter is dan de diameter van de holle kant van de eerste (onderste) stukken. Zij zijn met elkaar verbonden door middel van de rechte lijn die de knik van de boog is. De assen van de twee rechter stukken liggen in één vlak, en ook de linker (assen) liggen in één vlak, verschillend (van het vorige).

Eén stuk wordt begrensd door twee amandelen, die gelijkvormig en evenwijdig zijn en gelijke oppervlakte hebben, en door vier platte vlakken.

[1] De Arabische tekst is o.a. gepubliceerd in N. Nader, *Miftāḥ al-Ḥisāb d'al-Kāshī*, Damascus 1977, pp. 353-374. Russische vertaling in: *Dzhemshid Giyaseddin al-Kashi, Klyuch Arifmetiki, Traktat ob Okruzhnosti*, Per. B.A. Rosenfeld, comm. A.P. Yuschkevitch, B.A. Rosenfeld, Moskva: Gosudarstvennoe Izdatelstvo, 1956.

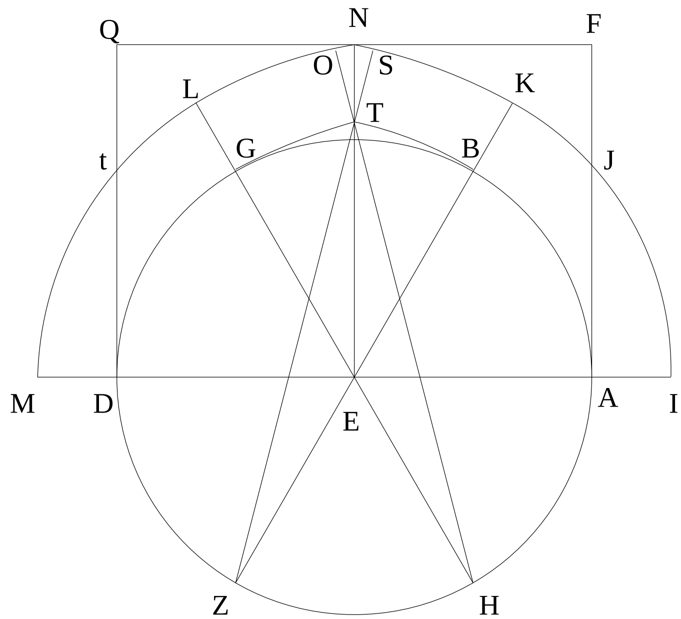
[2] Dit geldt alleen voor de eerste drie soorten bogen die hierna behandeld worden.

De combinatie hiervan is een lichaam dat begrensd wordt door twee platte, gelijke, en evenwijdige vlakken, namelijk de twee gevels, en twee ronde oppervlakken die niet één en dezelfde as hebben, één ervan is de holle kant en < de andere? > de bolle kant.

De afstand tussen de twee gevels wordt de diepte van de boog genoemd. Het verschil tussen de boog en het gewelf is dat de diepte van de boog niet groter is dan de spanwijdte, en bij het gewelf is deze wel groter. Wat ze bij de boog de diepte noemen, heet bij het gewelf de lengte.

Wij hebben vijf verschillende manieren gezien om ze te beschrijven.

De eerste (manier) is dat we cirkel $ABGD$ beschrijven met diameter gelijk aan de spanwijdte van de boog. Punt E is het middelpunt ervan. Wij verdelen hem in zes gelijke delen in punten A, B, G, D, Z, H. We trekken de diameters AD, BZ, GH. We verlengen ze aan de uiteinden A, B, G, D in een rechte lijn tot de punten I, K, L, M, over een lengte gelijk aan de dikte van de boog zoals we die willen. Dan beschrijven we met middelpunt E de bogen IK, ML. We beschrijven met middelpunt H en straal HG boog GT, en met middelpunt Z en straal ZB boog BT. We verbinden HT en ZT en we verlengen ze over een lengte van de dikte van de boog tot S en O. We beschrijven met middelpunt H boog LO en met middelpunt Z boog KS. We trekken loodlijn SN op TS en loodlijn NO op TO. Dan hebben we de vijf stukken gekregen, namelijk AK, KT, TN, TL en LD, samen de gevel van de boog. We hebben SN en ON recht gemaakt en niet rond vanwege een voordeel dat we later zullen noemen. De figuur ervan is deze:



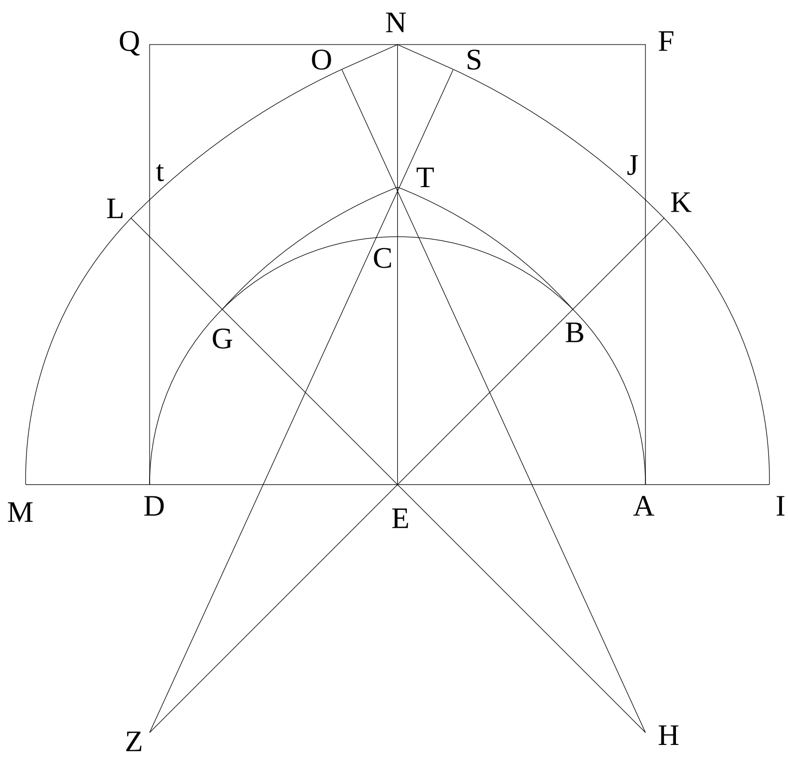
We kunnen de bogen BT, TG, KS, OL ook om twee andere middelpunten op de lijnen EZ, EH beschrijven, hetzij binnen de halve cirkel aan de onderkant, of erbuiten, en dat is het mooiste. We noemen vlak $ABGDT$ de opening van de boog. De bouwlieden noemen dit het "passeer" ervan.[3]

Als we uit punt N aan beide kanten loodlijnen NF, NQ op ETN trekken, (beide) gelijk aan AE, en AF, DQ verbinden, snijden zij de bolle kant van de boog in punten J, t. Dan zijn de vlakken JFN, NQt de schouders van de boog, en AJI, DtM de gedeelten van de boog die in de omringende muur vallen. Lijn TE is de hoogte van de laagste knik van de boog, en lijn EN de hoogte van de hoogste knik. Deze manier is geschikt als de spanwijdte van de boog tot vijf el groot is. In sommige gebouwen hebben we gezien dat BT, TG rechte lijnen zijn, en ook KN, NL.

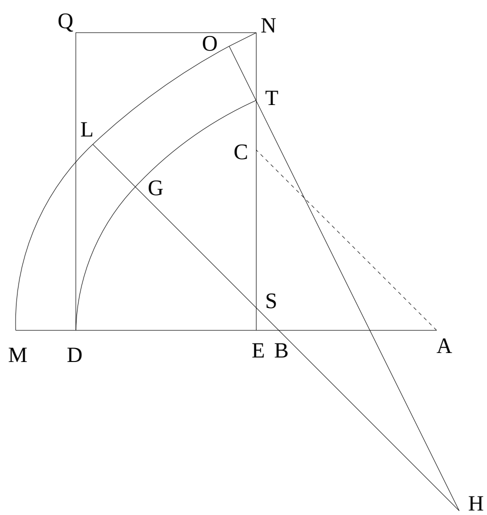
De tweede manier: we beschrijven de halve cirkel $ABGD$ met diameter AD de spanwijdte van de boog. We verlengen hem aan beide kanten naar de punten I, M, over een lengte gelijk aan de dikte van de boog zoals wij

[3] "Passeer" is mijn vertaling van het mij onbekende woord *bāsīr* of *pāsīr* . Dit zal vermoedelijk een Perzisch woord zijn. Rosenfeld vertaalt het als *proem*, een architectonische term voor "opening, aperture".

die willen. Punt E is het middelpunt van (de cirkel). We verdelen hem (de boog) in vier gelijke delen in de punten A, B, C, G, D. We verbinden de stralen EB, GE, we verlengen ze, en we snijden er EH, EZ van af even groot als AC, de diagonaal van het vierkant, en GL, BK even groot als de dikte van de boog, ik bedoel DM. We beschrijven met middelpunt E de twee bogen IK, ML en we beschrijven om punt H met straal HG boog GT, en om punt Z met straal ZB boog BT. We verbinden HT, ZT en we verlengen ze tot punten O, S over een lengte even groot als de dikte van de boog. We beschrijven om punt H boog LO en om punt Z boog KS. We trekken de loodlijnen SN, ON op de lijnen TS, TO. Dan vormen de stukken AK, KT, TN, TL, LD samen de gevel van de boog. We maken het parallelogram $AFQD$ compleet, en we maken (d.w.z. veronderstellen) SN, ON rechte lijnen, niet rond, vanwege een doel dat later begrepen zal worden. Deze manier is geschikt als de spanwijdte van de boog groter is dan vijf el, tot tien el of vijftien el, zo:



De derde manier: we trekken vanuit het midden van AD, de spanwijdte van de boog, loodlijn EN, en we snijden er EC van af gelijk aan AE, en we snijden van EA (het stuk) EB af ter grootte van een achtste van AE. We beschrijven op punt B met straal BD boog DG gelijk aan een achtste van de omtrek, en op dezelfde manier boog ML. We verbinden BGL, en we verlengen hem aan de kant van B naar punt H met de lengte van AC. We beschrijven om het middelpunt H met straal HG boog GT totdat hij eindigt bij loodlijn ET in punt T. We verbinden HT en verlengen hem tot O ter lengte van de dikte van de boog. We beschrijven ook om het middelpunt H met straal $< HL >$ boog LO. We trekken uit punt O loodlijn NO op TO en we maken het rechthoekige parallelogram $ENQD$ compleet, opdat de figuur van de halve boog compleet is: zo.

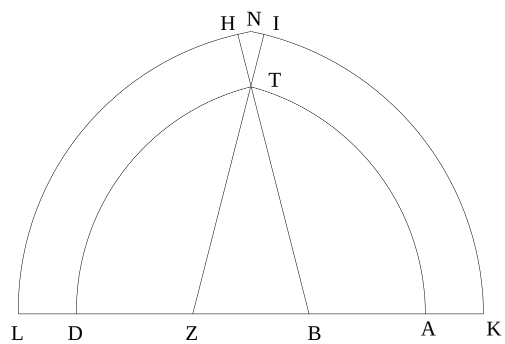


Zo is de constructie (ook) voor de andere helft. Deze methode is geschikt voor grote bogen, met spanwijdte groter dan tien ellen.[4]

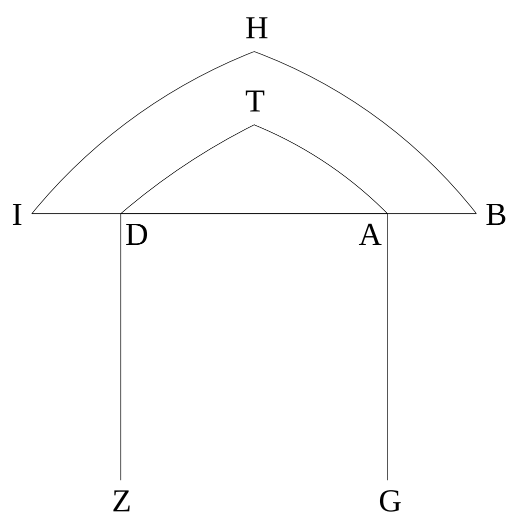
De vierde manier. We delen de spanwijdte van de boog in drie gelijke delen in de punten B, Z. We beschrijven om punt B met straal BD boog BT, en om punt Z met straal AZ boog AT. We verbinden BT, ZT en we verlengen ze tot de punten H, I ter lengte van de dikte van de boog, en op dezelfde manier AD in beide richtingen tot de punten K, L. We beschrijven

[4]Arabisch: bā^{c}āt. Ik heb dit woord niet kunnen vinden maar volg de vertaling van Rosenfeld.

op B en met straal BL boog LH, en om punt Z met straal ZK boog IK. We trekken vanuit de punten H, I loodlijnen HN, IN op lijnen TH, TI. Dan is de som van de drie segmenten TK, TN, TL de gevel van de boog, zo:



De vijfde manier. We trekken uit de punten A, D, de eindpunten van de spanwijdte van de boog, loodlijnen AG, DZ op AD. We maken ze beide met een lengte gelijk aan AD. We maken de punten G, Z middelpunten en beschrijven om elk ervan, met straal de koorde van de rechte hoek, dat is met straal AZ, de bogen AT, DT, en op dezelfde manier de bogen BH, IH, nadat we lijn AD aan beide kanten met dezelfde afstand verlengd hebben. Dan is figuur $ABHIDT$ de gevel van de boog, zo:



Omdat we klaar zijn met het invoeren van de boog en het gewelf, gaan we nu de manier uitleggen om de afmeting ervan te bepalen. We hebben de verhoudingen afgeleid van sommige afmetingen tot de spanwijdte van (de boog), en van andere afmetingen tot de dikte van (de boog). We hebben ze in een tabel weergegeven, met uitleg van het werken (ermee). We zullen ook uitleggen hoe die afmetingen afgeleid worden. We hebben ze ook in Indiase cijfers omgerekend, en die ook in een tabel opgenomen. De tabel is deze:

De tabel is in twee delen gesplitst. Het eerste deel is gespiegeld ten opzichte van het handschrift, omdat Arabisch van rechts naar links schrijft; het tweede deel is niet gespiegeld om herkenning van de getallen in het handschrift te vergemakkelijken.

Afkortingen in de tabel gebruikt:
A = als we de spanwijdte hiermee vermenigvuldigen, krijgen we de holle kant van de boog
B = als we de dikte van de boog hiermee vermenigvuldigen, en het optellen bij de holle kant van de boog, en de som met de dikte van de boog vermenigvuldigen, krijgen we de oppervlakte van de gevel ervan
C = we vermenigvuldigen de spanwijdte hiermee, dan krijgen we de hoogte van de laagste knik
D = we vermenigvuldigen de dikte van de boog hiermee en we tellen het resultaat op bij de hoogte van de laagste knik, dan krijgen we de hoogte van de hoogste knik
E = we vermenigvuldigen het kwadraat van de spanwijdte van de boog hiermee, dan krijgen we de oppervlakte van het open deel, dat de bouwers "het passeer" noemen.

g = graden (delen), m = minuten, s = seconden, t = tertsen
e = eenheden, i = tienden, ii = tweede tienden, iii = derde tienden.

	A	B	C	D	E
	g m s t	g m s t	g m s t	g m s t	g m s t
eerste geval	1 37 26 6	1 35 37 28	0 34 7 38	1 1 58 4	0 24 28 42
tweede geval	1 39 2 19	1 35 55 42	0 35 55 16	1 5 55 12	0 25 9 13
derde geval	1 42 44 3	1 36 21 47	0 38 17 30	1 6 55 38	0 27 2 34
vierde geval	1 45 26 57	1 34 34 44	0 38 43 47	1 5 55 12 als bij de tweede	0 28 41 41

(E)	(D)	(C)	(B)	(A)	
e i ii iii	e i ii iii	e i ii iii	e i ii iii	e i ii iii	
4 0 8	1 0 3 3	5 6 9	1 5 9 4	1 6 2 4	eerste geval
4 1 9	1 0 9 9	5 9 8	1 5 9 9	1 6 5 1	tweede geval
4 5 1	1 1 1 5	6 3 8	1 6 0 6	1 7 1 2	derde geval
4 7 8	1 0 9 9	6 4 5	1 5 7 6	1 7 5 7	vierde geval

Als we de oppervlakte van de gevel van de boog uit de tweede tabel gehaald hebben, vermenigvuldigen we hem met de breedte van de boog, en dan krijgen we het volume ervan.

Omdat de meeste (bogen) op de tweede manier geconstrueerd zijn, (vermelden we) de volgende benadering (in dit geval): als de spanwijdte van de boog twintig is, is (de lengte van) de holle kant van de gevel drie en dertig, en de hoogte van de laagste knik twaalf. En als de dikte vijf is, is de dikte van de knik vijf en een half, en het halve verschil tussen (de lengten van) de bolle en de holle kant van de gevel acht. Als we het halve verschil bij de (lengte van de) holle kant optellen en de som vermenigvuldigen met de dikte, krijgen we de afmeting (oppervlakte) van de gevel. En als we het kwadraat van de spanwijdte altijd[5] met vijf vermenigvuldigen en het product door twaalf delen, krijgen we de oppervlakte van de opening ervan, die het "passeer" ervan heet.

Wat betreft de afmeting van het gedeelte van de boog dat in de muur valt waar hij tegenaan gebouwd is, en de afmeting van de schouder van de boog: we vermenigvuldigen[6] bij de eerste twee (constructie)manieren de straal van de eerste (d.w.z. onderste) holle kant, en dat is de halve spanwijdte, en bij de derde manier de helft plus een half maal een achtste (maal de spanwijdte), en bij de vierde manier twee derde (maal de spanwijdte), met de straal van de bolle kant gedeeld door 60, en deze (straal) is de som van de dikte en de straal van de holle kant. We beschouwen het product als een sinus en zoeken (in een sinustabel) de bijbehorende boog. We nemen het complement van de boog, en dat is de booglengte van het (gedeelte van de) bolle kant van de boog die aan één kant in de muur verdwijnt, als de cirkelomtrek driehonderd zestig is. Dan vermenigvuldigen we de verhouding van de omtrek tot de diameter (d.w.z. π), bij de eerste twee manieren met de som van de spanwijdte van de boog en tweemaal de dikte, en bij de derde manier met dit plus een-achtste van de spanwijdte, en bij de vierde manier met dit (in de eerste twee manieren) plus een derde ervan. Het product vermenigvuldigen we met de bovengenoemde booglengte, en we delen de uitkomst door driehonderd zestig. Wat eruitkomt is de genoemde booglengte, uitgedrukt in het aantal eenheden waarin de spanwijdte van de boog is gemeten.[7]

We vermenigvuldigen (deze boog)[8] met de straal van de bolle kant van de eerste (laagste) sector en we onthouden het resultaat. Dan nemen we de sinus van die boog, vermenigvuldigen hem met de genoemde straal gedeeld

[5]Dit wil zeggen, onafhankelijk van de spanwijdte.

[6]Het lijkt me dat hier moet staan: "we delen". In Figuur 1 geldt modern: $\cos\angle tEM = ED/Et = ED/EM$, dus $60\cos\angle tEM = ED : (EM/60)$. De dikte wordt zo klein verondersteld,l dat alleen een gedeelte van het onderste stuk in de muur valt, dus als in Figuur 1. In Figuur 2, getekend als in het handschrift, is de dikte zo groot dat ook een stuk van het bovenste gedeelte in de muur valt. De regel in de tekst is dan niet geldig.

[7]Als in Figuur 1 boog $tM = \alpha$ graden, dan is modern gezien boog $tM = \pi \times \alpha/180$ radialen, en dus is de lengte van tM in ellen $\alpha/2$ maal de diameter IM in ellen.

[8]In Figuur 1 is het product van de lengte van de boog tM in ellen met EM twee maal de oppervlakte van sector tEM.

door 60, en we vermenigvuldigen het resultaat met de straal van de bolle kant van het eerste stuk. We trekken het resultaat af van het getal dat we onthouden hebben, en de rest is de som van de oppervlaktes van de twee stukken die in de muur vallen. We trekken dit af van de oppervlakte van de (hele) gevel van de boog. Het resultaat tellen we op bij de oppervlakte van de opening, en we trekken de som af van het product van de spanwijdte en de hoogte van de hoogste knik. De rest is de oppervlakte van de schouder van (de boog).[9] Dan vermenigvuldigen we de oppervlakte van de beide delen die in de muur vallen en de oppervlakte van de schouder met de dikte van de boog, om het volume ervan te krijgen.

Bij het opmeten van het gebouwen is het het beste om eerst de twee muren op de meten tot twee-derde (?)[10] van de boog. Dan meten we de boog en de opening op, en dan vermenigvuldigen we de som van de spanwijdte plus twee maal de dikte met de hoogte van de hoogste knik. We trekken van het product de som van de oppervlakte van de gevel van de boog en de oppervlakte van het lege stuk af. De rest is de afmeting van de twee oppervlakken van de schouder plus wat onder de basis valt. (Dit doen we zo) opdat het niet nodig is het stuk van de boog dat in de muur valt te meten.

Zoals beloofd zullen we nu uitleggen hoe we de grootten kunnen afleiden van de verhoudingen die we in de voorgaande tabel hebben opgenomen. We herhalen de eerste drie figuren. We stellen de spanwijdte van de boog twee, en we vermenigvuldigen dit met de verhouding van de omtrek tot de diameter, dan is het resultaat 6 16 59 28. Dan nemen we[11]

In het eerste geval een-zesde van het resultaat	In het tweede geval een achtste ervan	In het derde geval een achtste en een achtste ervan
1 2 49 55	0 47 7 26	0 53 0 52

En dit is de holle kant van één van de beide eerste stukken, ik bedoel één van de bogen GD. Maar hoek

[9] Met de schouder wordt blijkbaar in Figuur 1 bedoeld de delen NFJ en NQt.

[10] Volgens de interpretatie van Damirdash. Ik begrijp dit stuk niet.

[11] *Conventies in het volgende deel: (Waarschijnlijke) schrijffouten in het manuscript zijn stilzwijgend verbeterd. (Waarschijnlijke) rekenfouten van al-Kāshī zijn met * aangegeven, alleen de eerste keer wanneer ze voorkomen. Het wiskundig juiste resultaat staat tussen rechte haken [ ]. Dus 34*[32] betekent: al-Kāshī berekende 34, maar het had 32 moeten zijn. Als volgende getallen op grond van een onjuist eerder resultaat met een goede methode berekend worden, worden ze niet opnieuw met * aangegeven.*

HET is	HET is	HST is
150	135	135
en de sinus ervan is		
30 0 0 0	42 25 35 4	42 25 35 4
Wij vermenigvuldigen deze met lijn		
HE	HE	HS
en die is		
1 0 0 0	1 24 51 10	1 35 27 33
en we delen het product door lijn HT, de straal van het tweede stuk, namelijk		
2 0 0 0	2 24 51 10	2 32 21 10
dan is het quotiënt de sinus van hoek HTE:		
15 0 0	24 51 10	26 34 59
De bijbehorende boog is de hoek van de amandel		
14 28 39	24 28 11	26 17 55
De rest is hoek THG:		
15 31 21	20 31 49	18 42 5
Dit is de holle kant van een van de beide tweede stukken, in (eenheden) zodat de omtrek driehouderd zestig is en de straal 57 17 44 49.		
Maar de straal is		
2 0 0 0	2 24 51 10	2 32 21 10
Dus de boog is		
34*[32] 36*[30] 11*[36]	51 54 53*[13]	49 43 11*[41]
We tellen hem op bij boog GD, de som is boog TGD*		
1 37 26 6	1 39 2 19	1 42 44 3

[12] En dit is op grond van de aanname dat de halve spanwijdte van de boog één is. We hebben dit in de eerste tabel opgenomen. Dus als we de helft van de spanwijdte van de boog ermee vermenigvuldigen, krijgen we de helft van de holle kant, en als we de hele spanwijdte ermee vermenigvuldigen krijgen we de hele holle kant.

Daarna nemen we aan dat de dikte van de boog één is. We voegen aan de omtrek 6 16 59 28 toe, en we nemen

een zesde ervan	een achtste ervan	een achtste ervan
1 2 49 55	0 47 7 26	0 47 7 26

[12] In de eerste tabel staan de sexagesimale getallen 1 37 26 . . . , 1 39 2 . . . en 1 42 44 . . . ook omgerekend als 1624, 1651, 1712.

En dit is het verschil tussen ML en GD, aannemend dat DM, de dikte van de boog, één is.

En omdat het verschil tussen twee omtrekken, aannemend dat het verschil tussen hun stralen één is, 6 16 59 28 is, en de verhouding hiervan tot driehonderd zestig gelijk is aan de verhouding tussen het verschil tussen OL en TG, als de afstand ertussen één is, tot hoek THG, en die is

in het eerste geval	in het tweede geval	in het derde geval
15 31 21	20 31 49	18 42 5

Dus is het verschil[13] van OL en GT

0 17*[16] 18*[15] 5*[18]	0 21 29 57	0 19 35 3
En omdat de hoek van de amandel was:		
14 28 39	24 28 11	26 17 54*[55]
daarom is zijde ON:		
0 15 29 30	0 27 18 19	0 29 39 19*[6]
We tellen dit op bij bogen ML, LO, dan wordt het verschil van MLN en DGT		
1 35 37 28*[30]	1 35 55 42	1 36 21 47

En als we de dikte van de boog hiermee vermenigvuldigen, krijgen we het verschil van de halve bolle kant en de halve holle kant, ofwel de helft van het verschil tussen de hele bolle kant en de hele holle kant. We hebben dit in de tweede tabel gezet.[14]

Nu vermenigvuldigen we lijn HT met de sinus van hoek THG, en die (HT) is

2 0 0 0	2 24 51 10	2 32 21 10
We delen het product door de sinus van hoek HEN of HSN, namelijk		
30 0 0 0	42 25 35 4	42 25 35 4
Dan is het quotiënt de lijn		
ET	ET	ST
1 8*[4] 15*[13] 16*[41]	1 11 50 32	1 9 5 1*[2]

[13] Het foute getal 0 17* 18* 5* is de helft van het eveneens foute getal 0 34* 36* 11* hierboven.

[14] In deze "tweede tabel" worden de sexagesimale getallen 1 35 37 ..., 1 35 55 ..., 1 36 21 ... ook decimaal weergegeven als 1594, 1599, 1606.

Dit is de hoogte van de knik van de boog in de eerste twee gevallen. In het derde geval krijg je door optelling van lijn ES 1 16 35 1. We halveren ze, dan komt er

0 34 7 38	0 35 55 16	0 38 17 30

We zetten deze in de derde tabel.[15] Daarna delen we één door de cosinus van de hoek van de amandel, en die is

58 5 41	54 36 39	53 47 23

De uitkomst van de deling is de dikte van de knik van de boog

1 1 58 4	1 5 55 12*[15]	1 6 55 38

Dit hebben we opgeschreven in de vierde tabel.[16]

Daarna vermenigvuldigen we de straal van de holle kant van het eerste stuk met boog GD, dan krijgen we twee maal de oppervlakte van sector

GED	GED	GBD
1 2 49 55	0 47 7 26	0 59 38 29

Daarna vermenigvuldigen we de straal van het tweede stuk met boog TG, die is

34 36 16	51 54 53	49 43 11

Het product is twee maal de oppervlakte van sector THG

1 9 12 32	2 5 19 59	2 6 14 56

Dan vermenigvuldigen we de loodlijn uit punt H in driehoek HTE[17] op lijn TN buiten de driehoek, en die is

30 0 0	1 0 0	1 7 30

met de basis van de driehoek, en die is

1 8 15 16	1 11 50 32	1 9 5 1

Dan krijgen we twee maal de oppervlakte van de driehoek

[15] In deze "derde tabel" worden de sexagesimale getallen 0 34 7 . . . , 0 35 55 . . . , en 0 38 17 . . . decimaal weergegeven als 569, 598, 638.

[16] In deze "vierde tabel" worden de sexagesimale getallen 1 1 58 . . . , 1 5 55 . . . , en 1 6 55 . . . decimaal weergegeven als 1033, 1099, 1115.

[17] Het handschrift staat HTG. Bedoeld is in figuren 1 en 2 driehoek HTE en in figuur 3 driehoek HTS.

34 7 38	1 11 50 32	1 17 43 9*[8]

We trekken dit af van twee maal de oppervlakte van sector THG,
dan is de rest twee maal de oppervlakte van

TEG	TEG	TSG
35 4 54	53 29 27	48 31 47

Dit voegen we toe aan twee maal de sector

GED	GED	GBD

We krijgen de oppervlakte van de opening van de boog

1 37 54 49	1 40 36 53	1 48 10 16

En als we het kwadraat van de spanwijdte één maken, wordt die oppervlakte:

24 28 42	25 9 13	27 2 34

en dit is het getal wat is opgescheven in de vijfde tabel.[18]

Omdat je nu de afleiding van die verhoudingen in de eerste drie (constructie)methoden weet, zal de vierde methode niet verborgen zijn omdat hij gemakkelijk is. De straal van de twee bogen van de holle kant heeft namelijk een grootte van twee derde van de spanwijdte, en de helft van de holle kant heeft de grootte van een boog waarvan de cosinus een achtste van de diameter is.

Voor (het vinden van) de oppervlakte van de boog in de vijfde (constructie)methode is het voldoende dat we het kwadraat van de spanwijdte met xxxx (sexagesimale) tertsen of met yyyy duizendsten vermenigvuldigen om de oppervlakte van de opening van deze boog te krijgen.[19] We vermenigvuldigen dit met de dikte van de boog en we trekken het product plus de opening eronder af van de afmeting van de muren (?) omdat het feit dat het in een afgesloten gedeelte is, het onnodig maakt het volume ervan te bepalen.

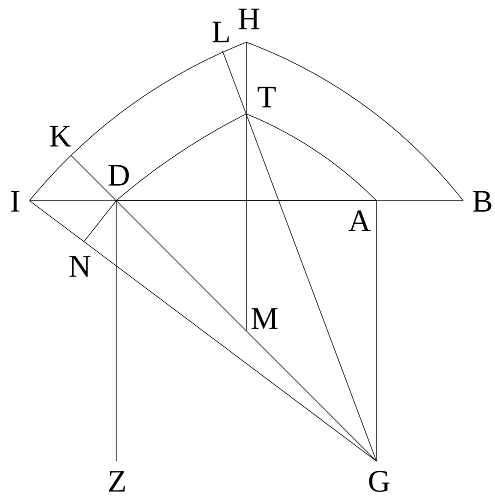
Als iemand dit toch wil, dan moet hij de figuur ervan herhalen (figuur 6). We trekken GD en verlengen hem tot K, en op dezelfde manier GT en we verlengen hem tot L. We trekken TM[20] en GI en we laten uit D loodlijn DN neer op GI.[21]

[18] In deze "vijfde tabel" worden de sexagesimale getallen 24 28 ..., 25 9 ..., 27 2 ..., decimaal weergegeven als 408, 419, 451.

[19] In de marge van het handschrift wordt gezegd: "De hoogte van deze boog, voor het geval dat de spanwijdte één is, is 0 19 22 21."

[20] Stilzwijgend wordt aangenomen dat M het midden is van vierkant $AGZD$.

[21] In het handschrift staat DI.



We nemen de wortel uit tweemaal het kwadraat van de spanwijdte van de boog, en dat is lijn GD. We nemen de helft van de sinus van een achtste van de omtrek, en dat is de sinus van hoek GTM.[22] We trekken de bijbehorende boog af van een achtste van de cirkel, de rest is hoek TGM.[23] Dan vermenigvuldigen we GD met de verhouding van de omtrek tot de diameter, en we vermenigvuldigen het resultaat met hoek TGD, en we nemen een derde van het product, en dat is de lengte van TD in de eenheden waarmee AD gemeten is.[24] Dan tellen we DG, de dikte van de boog, op bij GD, en we krijgen GK, de straal van de bolle kant van de boog. Dan vermenigvuldigen we DG met de verhouding van de omtrek tot de diameter, en we vermenigvuldigen het resultaat met de grootte van hoek TGD, en we nemen een derde van het resultaat, en dat is het overschot van boog KL over boog TD, in eenheden waarin AD gemeten is. We tellen de helft van dit (overschot) bij TD op, en krijgen de halve som van TD en KL. We vermenigvuldigen dit met DK en krijgen de oppervlakte van de ring $TDKL$. Dan delen we AD ?,[25] de spanwijdte van de boog, door GI, dat wil zeggen GK, gedeeld door 60, en we nemen het resultaat als de sinus van een boog,

[22]Modern: $\sin \angle GTM = (GZ/2)/GT = \frac{1}{2}GZ/GD = \frac{1}{2}\sin 45^o$.

[23]$\angle TGM + \angle GTM = \angle TMD = 45^o$.

[24]Modern: Als hoek TGD α graden is, dan is hij $\alpha \cdot \pi/180$ radialen, en dus is $TD = \alpha \cdot \pi/180 \cdot GD$. Merk op dat $1/180 = 1/3 \cdot 1/60$. Al-Kāshī rekent sexagesimaal, en hij moet dus ook de sexagesimaalkomma een plaats verschuiven.

[25]Er staan voor AD twee onleesbare segmenten in het manuscript.

en we vinden de bijbehorende boog. Dan halveren we het kwadraat van DK, de dikte van de boog, en we tellen de wortel daarvan op bij de spanwijdte van de boog, en we delen de som door GK gedeeld door 60, en de uitkomst vatten we op als sinus van een boog en we vinden de bijbehorende boog.[26] We nemen het verschil tussen de twee bogen,[27] en dat is boog IK in eenheden waarvan de hele cirkelomtrek 360 is, dat is hetzelfde als hoek IGK. Dus krijgen we de grootte daarvan in eenheden waarbij AD één is, met de redenering als hiervoor.

We vermenigvuldigen GK met de helft ervan (d.w.z. van IK) en krijgen de oppervlakte van sector KGI. Dan vermenigvuldigen we de sinus van hoek IKG met lijn GD gedeeld door 60, en we krijgen loodlijn DN, We vermenigvuldigen deze met lijn GI en krijgen de oppervlakte van driehoek DGI. We trekken deze af van sector KGI, de rest is oppervlak KDI. Met deze redenering krijgen we oppervlak HTL. We tellen deze twee op bij de het ringsegment $TLKD$ en krijgen vlak $THID$, de helft van de gevel van de boog.

Omdat de bolle kant van deze boog niet proportioneel is met de vermeerdering van de dikte, hebben wij hem niet in de tabel opgenomen. Om die reden hebben we van de twee hoogste zijden van de amandel in de voorafgaande constructiemethoden twee rechte lijnen gemaakt, opdat ze proportioneel zouden zijn.[28] En dit is wat we beloofd hadden.

Voor de bepaling van de oppervlakte van de oppervlakken aan de binnen en buitenkant van de boog: we vermenigvuldigen de breedte van de boog met de holle kant van de gevel, en dan krijgen we de oppervlakte van het oppervlak aan de binnenkant, en (we vermenigvuldigen de breedte) met de bolle kant van de gevel, en dan krijgen we de oppervlakte van het oppervlak aan de buitenkant. We hebben nu alle doelstellingen van dit hoofdstuk heel uitgebreid behandeld.

De tweede sectie, over de afmeting van de qubba. Deze heeft de vorm van een holle halve bol, of een hol bolsegment, of een kegel (d.w.z. pyramide) op een veelhoekige basis, of een vorm die we krijgen als we ons voorstellen dat de gevel van een van de types bogen om de lijn van zijn (grootste) hoogte ronddraait, ik bedoel een lijn die de verbinding is tussen de knik en een punt midden tussen de twee grondvlakken.

[26]De tekst is niet in orde. Al-Kāshī vindt achtereenvolgens de hoeken AIG en AGI.
[27]Hij had moeten nemen: het verschil tussen $\angle AGI$ en 45^o.
[28]Ik begrijp dit niet.

Wat betreft de afmeting (dwz oppervlakte en inhoud) van de twee eerste types, we hebben de manier besproken om de afmeting van de bol en de segmenten ervan te bepalen.

De afmeting van het derde type is genoemd bij de afmeting van de kegel.

Wat betreft de afmeting van het laatste type: Om de oppervlakte ervan te bepalen, maken we de pool (d.w.z. top) ervan het centrum, en we beschrijven op het oppervlak ervan veel cirkelomtrekken, zodat het verschil tussen de kromme lijnen tussen elke twee (opeenvolgende cirkels) ervan en tussen rechte lijnen, die koorden van die kromme lijnen zijn, er niet meer toe doet. Ik denk dat zeven of acht van deze cirkels daarvoor voldoende zijn. Dan meten we (de afstand) van de top van de qubba tot de dichtstbijzijnde cirkelomtrek, en we vermenigvuldigen die met de helft van die omtrek. Daarna meten we elk van deze omtrekken, en we meten[29] de halve som van elk paar naburige (cirkels) maal het interval ertussen, en we tellen de uitkomsten van deze vermenigvuldigingen bij elkaar op, en dan krijgen we de oppervlakte van de qubba.

Voor de inhoud ervan vatten we (het lichaam) tussen de top van de qubba en het vlak van de dichtstbijzijnde van de getrokken cirkels op als een hele kegel, en het gedeelte tussen elk paar van die cirkels op als een afgeknotte kegel, en we meten ze zoals we uitgelegd hebben, en we tellen (de resultaten) op, en daarna meten we de lege kegels van lucht, dat wil zeggen het inwendige van de qubba, en trekken dat ervan af, en de rest is het volume van het lichaam van de qubba.

We hebben (deze cirkels) geconstrueerd voor de qubba die gemaakt is met gebruikmaking van een ontwerp zoals het ontwerp van de holle kant van de boog volgens de vierde (constructie)methode, en we hebben de verhouding van de oppervlakte tot het kwadraat van de diameter van het grondvlak afgeleid, zodat er gemakkelijk mee gewerkt kan worden. De manier is, dat we het kwadraat van de diameter van de holle kant van de boog met 1 46 32 seconden vermenigvuldigen, of met 1775, waarbij de eerste (laagste)[30] decimaal voor een duizendste staat, en dan krijgen we de oppervlakte van de holle kant van de qubba. Als we het kwadraat van de straal van de bolle kant van de qubba met (die getallen) vermenigvuldigen, krijgen we de oppervlakte van de bolle kant van de qubba, omdat ze niet evenwijdig aan elkaar zijn. (?)

[29] Zo staat het in het manuscript, maar ik zou verwachten "we vermenigvuldigen."

[30] Het Arabisch schrijft van rechts naar links, maar getallen worden in Europese volgorde geschreven. In het Arabisch is 5 dus de eerste decimaal van 1775.

Als we de derde macht van de diameter van de holle kant ervan en de derde macht van de diameter van de bolle kant ervan beide vermenigvuldigen met 0 18 23 seconden of met 306, waarbij de eerste (laagste) decimaal voor een duizendste staat. em het verschil tussen de twee resultaten nemen, dan is dat het volume van de holle qubba.[31]

[31] Hierop volgt een tabel waarin deze getallen nog eens overzichtelijk worden gepresenteerd. Dit is het einde van de tweede sectie.