Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik. II

P. LUCKEY (†) – Gönningen (Württemberg)

Rechnen und Algebra

Von den zahlreichen Lehrbüchern des Rechnens, die im Mittelalter in arabischer und persischer Sprache geschrieben wurden, scheint zwar eine Anzahl, und darunter leider gerade manche von den ältesten, unwiederbringlich verloren gegangen zu sein. Aber vieles ist zum Glück erhalten, und davon hat das Or 17 (1948), 492 erwähnte Verzeichnis von Krause mancherlei ans Licht gebracht. Die bisher den Mathematikhistorikern zugänglich gemachten Rechenbücher geben nur ein unvollkommenes Bild der Rechenkunst im islamischen Mittelalter und ihrer Entwicklung. Ziemlich gut untersucht wurde bisher das in islamischen Rechenbüchern dargestellte Rechnen mit ganzen dekadischen Zahlen, die im Positionssystem mit den sogenannten indischen Ziffern ١ ٢ ٣ ۴ ۵ ٦ ٧ ٨ ٩ und der Null ٥ geschrieben wurden, und das zugehörige Rechnen mit gemeinen Brüchen. Für die sexagesimalen Rechnungen hatte man früher kein grosses Interesse. Man beobachtete zwar, dass die Sinus- und Tangenstafeln, mit denen die Astronomen rechneten, und die eigentlichen astronomischen Tabellen, wie die des Almagest, sexagesimal geschrieben waren, und zwar mit den abgekürzten Ǧummalbuchstaben ا ب ﺣ د ه و ز ح ط für die Einer und ی ک ل م ن für die Zehner, Buchstaben, die in ihrer Verwendung genau den griechischen Buchstaben α β γ δ ε ς ζ η ϑ und ι κ λ μ ν entsprachen, ebenso wie das für leere Stellen verwandte Nullzeichen ح dem griechischen Zeichen Ō entsprach, aus dem es hervorgegangen zu sein scheint. Aber wie diese Tabellen auf oft viel mehr Sexagesimalstellen als die griechischen praktisch berechnet wurden, das blieb von der Forschung zum Teil kaum beachtet, und Wichtiges hierüber gelangte nicht in die Darstellungen der Geschichte der Mathematik und der Astronomie. So konnte es denn geschehen, dass die beiden Zeitgenossen, denen wir in erster Linie die Erforschung der alten Mathematik des Zweistromlandes verdanken, als sie sich getrieben fühlten, das Schicksal und Weiterleben babylonischer Sexagesimalrechnung, deren Trümmer die griechischen Sexagesimalbrüche sind, im Mittelalter zu verfolgen, von der mathematikgeschichtlichen Literatur im Stiche gelassen wurden. O. Neugebauer äussert sich bei einer kurzen Erörterung des " allmählichen Rückschritts " der Sexagesimalrechnung seit den altbabylonischen Texten über das Mittelalter folgendermassen: " Das Mittelalter kehrt dann zum Fingerrechnen zurück, wie es nur an vorgeschichtlichen Spuren in Mesopotamien und Ägypten erkennbar ist " ([1]). F. Thureau-Dangin sagt: " Abgesehen von einigen seltenen und späten Ausnahmen ist dieses System, angefangen bei den Griechen, immer nur angewandt worden, um Brüche auszudrücken " ([2]). Was er mit den seltenen und späten Ausnahmen meint, zeigt sein Hinweis auf die *Algebra* von Wallis ([3]) und auf Tropfke (I[3], 1930, S. 61 ff.).

Demgegenüber ist festzustellen: Die islamischen Astronomen besassen für ihre Rechnungen eine Methode reiner Sexagesimalrechnung, die sich schon jetzt bis vor das Jahr 1000 n. Chr. zurückverfolgen lässt und bis in die Neuzeit weiterlebte. Unter reiner Sexagesimalrechnung verstehe ich eine Rechnungsweise mit folgenden Kennzeichen: Sowohl die Ganzen wie die Brüche wie allgemein die aus Ganzen und Bruchteilen zusammengesetzten Zahlen werden nach fallenden Potenzen von 60 entwickelt und im Positionssystem geschrieben. Alle Koeffizienten der Entwicklung, d. h. alle " Ziffern " der Sexagesimalzahlen, sind Zahlen der Menge 0, 1, ..., 59. Der absolute Stellenwert wird, besonders in späterer Zeit, und wenn die Deutlichkeit es erfordert, gekennzeichnet, z. B. dadurch, dass die Einer von den Sechzigsteln durch einen Strich geschieden werden. Entsprechend der beim dekadischen Rechnen üblichen Verwendung des Kleinen Einmaleins, das im Mittelalter bekanntlich von Leuten schwachen Gedächtnisses aus einer geschriebenen Tabelle mit zwei Eingängen abgelesen wurde, wird eine geschriebene Tabelle mit zwei Eingängen für die sexagesimal ausgedrückten Produkte von 1 mal 1 bis 59 mal 59 benutzt. Aus dieser Einmaleinstafel oder Produktentafel der Sexagesimalrechnung, wie man sie in der abendländischen

([1]) *Quell. u. Stud. z. Gesch. d. Math.* B, 4, 1938, S. 356.

([2]) F. Thureau-Dangin, *Sketch of a History of the Sexagesimal System. Osiris* 7, 1939, S. 95-141. S. 95 und 138 Anm. 101.

([3]) *Joh. Wallisii op. math.* II, Oxford 1657, S. 25-28.

Literatur z. B. in der erwähnten *Algebra* von Wallis abgedruckt findet, entnimmt man z. B., dass 28 mal 39 gleich *18 12* ist, d. h. gleich $18 \cdot 60 + 12$.

Eine der wertvollen Stambuler mathematischen Handschriften ist Aya Sofya 4857,$_7$ (Krause S. 472-73): *Über die Elemente des Rechnens der Inder (fī uṣūl ḥisāb al-Hind)* von Kūšyār b. Labbān, der in der zweiten Hälfte des 10. Jahrhunderts lebte und, wie sein Herkunftsname al-Ǧīlī anzeigt, aus Ǧīlān in Persien stammte. Die Schrift (1) zerfällt in zwei Bücher. Das erste behandelt in der Hauptsache das dekadische Rechnen mit ganzen Zahlen, die in gewöhnlicher Weise mit "indischen" Ziffern geschrieben sind. Knapp, aber deutlich und lebendig wird die Ausführung der elementaren Rechenoperationen und der Wurzelausziehung an Beispielen vorgeführt. Die Rechnungen werden auf der Staubtafel vollzogen. Der Verfasser beschreibt, welche Ziffern bei den jeweiligen Rechenschritten auszulöschen und welche an ihre Stelle zu setzen sind. Auch hält er einzelne Phasen der Rechnung durch Wiedergabe der auf der Staubtafel entstandenen Schriftbilder fest. Inhaltlich gehört noch zum ersten Buch die dem zweiten angehängte, an einem Beispiel erläuterte dekadische Ausziehung der Kubikwurzel. Hervorgehoben sei, dass Kūšyār Wurzeln nach einem in der Neuzeit von Ruffini und Horner wiedergefundenen Verfahren auszieht, natürlich in einer dem Staubtafelrechnen angemessenen Ausführungsweise. Bekanntlich wurde dieses Verfahren auch in der chinesischen Mathematik festgestellt. Für die islamische ist die Feststellung neu (2).

Das erste Buch des Werkes von Kūšyār deckt sich im grossen und ganzen mit dem Inhalt der Oxforder hebräischen Handschrift *ʿIyūn hāʿiqqārīm* (Bodl. Oppenh. 272 A. Qu.), einer von Schalom b. Josef verfassten hebräischen Übersetzung. Schon der Inhalt dieses ersten Buches rechtfertigt, wie mir scheint, die Herstellung einer mit

(1) Ausführlicher ist über den Inhalt dieser Schrift und anderer bisher noch nicht oder wenig erschlossener Werke über das Rechnen berichtet in der Abhandlung: P. Luckey, *Die Rechenkunst bei Ǧamšīd b. Masʿūd al-Kāšī, mit Rückblicken auf die ältere Geschichte des Rechnens* (163 Schreibmaschinenseiten und 18 Seiten arabische Textstellen). Die Arbeit wurde 1943 von der Deuschen Morgenländischen Gesellschaft für die *Abhandlungen für die Kunde des Morgenlandes* angenommen.

(2) Näheres in P. Luckey, *Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik. Mathematische Annalen* 120 (1948), 217-274.

Übersetzung und Erläuterungen versehenen Textausgabe der zum Glück nur 31 Seiten mit je 17 Zeilen umfassenden Schrift von Kūšyār, die hinsichtlich der Darstellung einen frischen, originellen Eindruck macht und zu den ältesten uns in arabischer Sprache erhaltenen Rechenbüchern gehört. An-Nasawī, dessen Rechenbuch Suter untersucht hat ([1]), erweist sich als stark abhängig von seinem Lehrer Kūšyār. Auch er radiziert, was Suter nicht bemerkte, nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren.

Mehr soll uns aber hier das zweite Buch beschäftigen. Es enthält eine Anleitung zur reinen Sexagesimalrechnung. Dass auch dieses zweite Buch, obwohl sein wesentlicher Inhalt in der Oxforder hebräischen Handschrift fehlt, und auch an-Nasawī diesen Gegenstand nicht behandelt, zur Originalschrift des Kūšyār gehört, glaube ich schon aus einer Bemerkung an-Nasawī's schliessen zu können. Er kennzeichnet das Lehrbuch Kūšyār's dahin, dass es vorwiegend auf die astronomischen Rechnungen abziele.

Das zweite Buch sagt einleitend, in Anlehnung an das voraufgehende Einfache (die dekadischen Rechnungen des ersten Buches) solle jetzt die Ausführung der Rechenoperationen " nach der Weise der Zusammensetzung vermittelst einer Tafel, die unter dem Namen ' Sechzigertafel ' (*ğadwal as-sittīn* = Tafel der Sechzig) bekannt ist ", behandelt werden. Diese Sechzigertafel — auch spätere Mathematiker gebrauchen diese oder eine ähnliche Bezeichnung — ist die oben von uns erwähnte Tafel des sexagesimalen Einmaleins. In II, 1 beschreibt Kūšyār sie kurz, in II, 13 sollte sie nach Angabe der Überschrift dieses Kapitels enthalten sein, doch fehlt sie in unserer Handschrift. In Handschriften späterer Werke finden wir die Tafel, die gewöhnlich in Teiltafeln zerlegt wurde, wiedergegeben. Sie war für den rechnenden Astronomen ein ebenso wichtiges Rechenhilfsmittel, wie es heutzutage die Logarithmentafel oder die Rechenmaschine ist. Nach Kūšyār's Beschreibung besteht die Sechzigertafel aus 60 Spalten, deren jede er eine ' Tafel ' oder ' Tabelle ' (*ğadwal*) nennt. An der Spitze dieser 60 Tabellen (Spalten) stehen die Kopfzahlen *1* bis *60*, und unter jeder dieser Kopfzahlen stehen ihre sexagesimal geschriebenen Vielfache bis zum 60fachen. Die Kopfzahlen heissen " Breitenzahlen " ; entsprechend heissen die am vorderen Rande (d. i. wegen der arabischen Schreibrichtung am rechten Rande) von oben nach unten laufenden Zahlen *1* bis *60* " Län-

([1]) *Bibliotheca Mathematica* (3) 7, 1906, S. 113-119.

genzahlen". In der Tabelle (Spalte), an deren Spitze die Breitenzahl *18* steht, findet man auf der Höhe der Längenzahl *25* die Zahl *7 30*. Sie ist die sexagesimale Schreibung des Produkts *25* mal *18* $= 450 = 7 \cdot 60 + 30 \cdot 1$. Weil jedes der Produkte dieser Art (mit Ausnahme des grössten 60 mal 60 $=$ *1 0 0* eine oder zwei Sexagesimalstellen besitzt, sind sie "in zwei Reihen" (*fī saṭrain*) geschrieben. Von dem eben genannten Produkt *7 30* steht *7* in der ersten und *30* in der zweiten Reihe. Da der Text unmittelbar aus der Sechzigertafel entnommene Zahlen in Ǧummalbuchstaben schreibt, werden die Sexagesimalzahlen in der dem Rechner vorliegenden Tafel wohl in Ǧummalbuchstaben geschrieben gewesen sein, wie wir das bei allen in Sexagesimalzahlen geschriebenen Tabellen gewohnt sind und insbesondere auch bei den in späteren Werken wiedergegebenen Sechzigertafeln beobachten.

In II, 2 wird das "Erhöhen" (*rafᶜ*) behandelt, d. h. die Verwandlung einer ganzen dekadischen Zahl, die grösser als 60 ist, wie z. B. 15621, in eine Sexagesimalzahl. Man dividiert 15621 durch 60 und erhält 260, Rest *21*, dann 260 durch 60 und erhält *4*, Rest *20*. Also ist $15621 = 4 \cdot 60^2 + 20 \cdot 60 + 21$. Kūšyār schreibt dieses Ergebnis im Positionssystem mit untereinander gesetzten "indischen" Ziffern so:

٠٤		*04*
٢٠	, d. i.	*20*
٢١		*21* .

In unter islamischem Einfluss abgefassten Scholien zu Euklids Elementen sehen wir Sexagesimalbrüche ebenso in Kolonnen mit indischen Ziffern geschrieben. Treten zu Kūšyār's ganzer Sexagesimalzahl Brüche hinzu, so ist die Entwicklung entsprechend sexagesimal nach unten fortzusetzen. So ist z. B. der vierte Teil der oben niedergeschriebenen Zahl:

٠١		*01*
٠٥	, d. i.	*05*
٠٥		*05*
١٥		*15*

Die Stellenwerte dieser Zahl werden von oben nach unten folgendermassen benannt: "zweimal Erhöhtes" (*marfūᶜ marratain*), einmal Erhöhtes" (*marfūᶜ marrataⁿ*), "Grad" (*daraǧa*), "Minute" (*daqīqa*). Nach oben würden sich anschliessen: "dreimal Erhöhtes" (*marfūᶜ ṯalāṯa marrāt*) usw., nach unten: "Sekunde" (*ṯāniya*) usw.

Die sexagesimale Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division und Quadratwurzelausziehung ganzer Zahlen auf der Staubtafel lehrt Kūšyār in den folgenden Abschnitten in einer Ausführungsweise, die in allen einzelnen Schritten der im ersten Buche beschriebenen dekadischen Ausführung dieser Operationen entspricht. Als Beispiel gebe ich den Abschnitt II, 5 über die Multiplikation mehrstelliger Sexagesimalzahlen wieder ([1]). In der Übersetzung behalte ich bei den Rechenbildern die der arabischen Schreibrichtung entsprechende Reihenfolge der Spalten bei; im ersten Bilde ist also die Spalte $\begin{smallmatrix} 25 \\ 42 \end{smallmatrix}$ die zuerst hingeschriebene. Zur Unterscheidung von den indischen übersetze ich die Ǧummalziffern des Textes durch die entsprechenden griechischen Zeichen, deren Zahlenwert ich in Klammern beifüge. Zur Erläuterung der Rechnung, die man auf einer Schiefertafel vollziehen möge, gebe ich die Phasen des sich wandelnden Rechenbildes am Rande ausführlicher als der Verfasser durch die Bilder I, Ia, Ib, II, IIa, III wieder, von denen I, II und III mit denen des Verfassers übereinstimmen. Man beachte übrigens, wie die Null als eine Z a h l behandelt wird, die man zu einer anderen addiert.

Istanbul, Aya Sofya 4857$_7$, 272b3 – 273a8.

الفصل الخامس فى الضرب

نريد ان نضرب خمسة وعشرين درجة واثنى واربعين دقيقة فى ثمنية عشر درجة وستة وثلثين دقيقة فنضعها على ما فى الصورة الاولى

[a])	١٨		٢٥
	٣٦		٤٢

المنزلة الاولى من المضروب هو التى على يمين الحاسب بازاء المنزلة الاولى من المضروب فيه والثانية بازا الثانية وفرجة ما بينهما للمبلغ([b] ثم نقصد جدول ثمنية عشر من اعداد العرض وناخذ منه([c] ما بازآ خمسة وعشرين

([1]) Eigentümlichkeiten der Handschrift hinsichtlich Wortschreibung und Grammatik lasse ich unverändert.

[a]) Hs in der Zeile ١٨ ٣٢ | ٢٥ ٤٢. Am Rande so verbessert, dass zwar der Zwischenraum vorhanden ist, aber die Zahlen ١٨ und ٢٥ in die erste und die Zahlen ٣٢ und ٤٢ in die vierte Zeile geraten sind. – [b]) Am Rande als Einfügung ولو كان مكان الزاى صفرا وضعناه كذلك. Dies gehört nicht hierher, sondern ist eine etwas andere Formulierung der bald folgenden Stelle وان لم نجد.....صفرا ابدا. – [c]) وناخذ منه in der Zeile verbessert aus نخذ.

من اعداد الطول وهو زل(d فنضع ز فوق بازا الخمسة والعشرين ونضع ل بازا خمسة وعشرين وان لم نجد فى السطر الاول شيئا(e نضع مكان الزاء صفرا ابدا ثم ناخذ من هذا(f الجدول ايضا ما بازاء اثنين واربعين وهو يب لو فنزيد يب على ما فوق بازا الاثنين والاربعين ونضع لو بازا اثنين واربعين وننقل المضروب الى اسفل بمرتبة على ما فى الصورة الثانية

	٠٧	
١٨	٤٢	
٣٦	٣٦	٢٥
		٤٢

ثم نقصد(g جدول ستة وثلثين من اعداد العرض وناخذ منه بازآء خمسة وعشرين من اعداد الطّول وهو يه ح فنزيد يه على ما فوق بازآ الخمسة والعشرين والصّفر لما بازآء خمسة عشرين ثم ناخذ من هذا الجدول ايضا بازآء اثنين واربعين وهو كه يب فنزيد كه على ما فوق بازآ الاثنين والاربعين ونضع يب بازآ اثنين واربعين فيحصل من الضرب على ما فى الصورة الثالثة

	٠٧	
١٨	٥٨	
٣٦	٠١	٢٥
	١٢	٤٢

وذلك ما اردنا ان نعمل

Übersetzung:

"Fünfter Abschnitt. Die Multiplikation.

Wir wollen fünfundzwanzig Grad zweiundvierzig Minuten mit achtzehn Grad sechsunddreissig Minuten multiplizieren. Zu diesem Zwecke schreiben wir sie (die vier Zahlen) so hin, wie es im ersten Bilde

18		25
36		42

I.

18		25
36		42

[d]) زل in der Zeile verbessert aus زلب. [e]) Hs شيئا دكما. – [f]) من هذا am Rande. – [g]) Hs نقص.

[dargestellt] ist. Die erste Stelle des Multiplikanden ist diejenige, welche zur Rechten des Rechners gegenüber der ersten Stelle des Multiplikators [steht]; die zweite [steht] gegenüber der zweiten, und zwischen beiden ist ein Zwischenraum für das Ergebnis. Dann gehen wir in die Tabelle (Spalte) der Breitenzahl achtzehn ein und entnehmen aus ihr, was gegenüber der Längenzahl fünfundzwanzig [steht], nämlich ζ λ (7 30), schreiben ζ (7) über [die Stelle] gegenüber fünfundzwanzig und schreiben λ (30) gegenüber fünfundzwanzig. Falls wir in der ersten Reihe nichts finden, setzen wir anstelle des ζ (7) stets eine Null. Dann entnehmen wir aus dieser Tabelle (Spalte) auch das, was gegenüber zweiundvierzig [steht], nämlich ιβ λϛ (12 36) addieren ιβ (12) zu dem, was über [der Stelle] gegenüber der zweiundvierzig [steht], schreiben λϛ (36) gegenüber zweiundvierzig und verschieben den Multiplikanden um eine Stelle nach unten, wie es im zweiten Bilde

	07	
18	30	25
36		42

I a.

	07	
18	42	25
36	36	42

I b.

	07	
18	42	
36	36	25
		42

	07	
18	42	
36	36	25
		42

II.

[dargestellt] ist. Dann gehen wir in die Tabelle der Breitenzahl sechsunddreissig ein und entnehmen aus ihr [, was] gegenüber der Längenzahl fünfundzwanzig [steht], nämlich ιε ο (15 0), addieren ιε (15) zu dem, was über [der Stelle] gegenüber fünfundzwanzig [steht], und die Null zu dem, was gegenüber fünfundzwanzig [steht]. Dann entnehmen wir aus dieser Tabelle auch [das, was] gegenüber zweiundvierzig [steht], nämlich κε ιβ (25 12), addieren κε (25) zu dem, was über [der Stelle] gegenüber der zweiundvierzig [steht], und schreiben ιβ (12) gegenüber zweiundvierzig. Dann kommt [es] aus der Multiplikation so heraus, wie es im dritten Bilde

	07	
18	57	
36	36	25
		42

II a.

	07	
18	58	
36	01	25
	12	42

	07	
18	58	
36	01	25
	12	42

III.

[dargestellt] ist. Und dies ist das, was wir ausrechnen wollten".

In dem auf diesen Abschnitt folgenden sechsten Abschnitt wird gelehrt, wie der Stellenwert des Produktes zweier Sexagesimalstellen aus den Stellenwerten der beiden Faktoren unter Verwendung einer besonderen Tabelle gefunden wird. An ihrem rechten Rand stehen "in der Länge" die Stellenwerte des Multiplikanden, sowohl die der Ganzen (Grade, einmal Erhöhtes, zweimal Erhöhtes,...), wie auch nach der anderen Seite von den Ganzen die der Brüche (Minuten, Sekunden,...). Ebenso stehen am oberen Rande "in der Breite" die Stellenwerte des Multiplikators. Ist nun z. B. "einmal Erhöhtes" mit "Quarten" zu multiplizieren, so trifft sich die Zeile, an der "einmal Erhöhtes" steht, mit der Spalte, die mit "Quarten" beschriftet ist, in einem Kleinquadrat, in das der Stellenwert des Produktes hineingeschrieben ist, und zwar bemerkenswerterweise in Form einer mit roter Tinte geschriebenen 3. Sie bedeutet "Terzen". Eine schwarze 3 würde "dreimal Erhöhtes" bedeuten. Das, was wir als den positiven Stellenzeiger $+3$ bezeichnen, ist also hier durch eine schwarz geschriebene 3, und das, was wir als den negativen Stellenzeiger -3 bezeichnen, ist durch eine rot geschriebene 3 wiedergegeben. Die ganze Hilfstafel ist mathematisch weiter nichts als eine Tabelle für die Summen zweier kleiner positiver und negativer ganzer Zahlen unter Hinzunahme der Null. Als schwarz oder rot geschriebene Zahlen treten also hier in der islamischen Mathematik, der man eine ausdrückliche Einführung der negativen Zahlen absprechen muss, die Zahlen auf, die wir als positive oder negative ganze Exponenten in der Entwicklung nach Potenzen von 60 bezeichnen. Noch heute trägt der Kaufmann in Abrechnungen die Vermögensbeträge schwarz, die Schuldsummen aber rot ein. Umgekehrt malten im Mittelalter die Chinesen positive Zahlen rot, negative schwarz.

Für diese Tabelle zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes, die auch zur Bestimmung des Stellenwertes des Quotienten verwandt werden kann, hat Kūšyār den Abschnitt II, 14 ausersehen. Er ist in unserer Handschrift ebensowenig wie der für die Sechzigertafel bestimmte Abschnitt II, 13 ausgefüllt, und so wissen wir in Ermangelung von Angaben des Verfassers nicht, wie der Stellenwert der Grade in der Hilfstafel gekennzeichnet sein soll. Wir erwarten: durch eine Null.

Auf die Ausführungsweise der übrigen Rechenoperationen kann ich an dieser Stelle nicht eingehen. Sie ist, wie gesagt, derjenigen beim dekadischen Rechnen genau nachgebildet mit der Massgabe dass alle Stellen, die beim dekadischen Rechnen nebeneinander geschrieben werden, beim sexagesimalen untereinander zu schreiben sind. Da Kūšyār jede Sexagesimalstelle zweistellig mit indischen Ziffern schreibt, würde ja auch das Nebeneinanderschreiben der Stellen Verwirrung anrichten.

Kūšyār versucht auch, aber ungeschickt und mit schlechtem Erfolg, die Neunerprobe der Rechnungen mit dekadischen Zahlen auf die sexagesimalen Rechnungen zu übertragen. Wir sehen hier, dass er zwar ein geschickter Lehrer, aber kein erfinderischer Mathematiker ist, und das ist uns für die Beantwortung der Frage wichtig, in welchem Umfange diese Sexagesimalrechnungsmethoden etwa sein geistiges Eigentum sind. Nichts gibt er als neu oder gar von ihm selbst erfunden aus. Insbesondere erscheint " die Tafel, die unter dem Namen Sechzigertafel bekannt ist", ihre Einrichtung und Verwendung ebenso wie das Rechnen mit Erhöhten, d. h. ganzen Sexagesimalzahlen, als übernommenes Gut. Wir halten also nach Kūšyār's vermutlichen Konkurrenten oder Vorläufern Ausschau.

Dabei stossen wir auf einen Mathematiker ersten Ranges. Es ist Kūšyār's Zeitgenosse Abul-Wafā' al-Būzağānī, der 998 starb, und den wir oben (Or 17, 510) schon als den mutmasslichen Haupterfinder der eigentlichen Kugeldreieckrechnung und Entdecker des sphärischen Sinussatzes nannten. Er, dessen algebraische Schriften uns leider nicht erhalten sind, schrieb unter anderem den in Paris noch vorhandenen, trigonometrisch und astronomisch bedeutsamen *Almagest* und berechnete sehr genau trigonometrische und astronomische Tafeln, die in der üblichen Weise sexagesimal geschrieben waren. Er verfasste auch eine *Schrift über das Rechnen mit der sexagesimalen Tafel (kitāb al-ʿamal bil-ğadwal as-sittīnī)*. Diese Angabe des Ibn al-Qifṭī (ed. Lippert S. 288) missverstand Suter ([1]), da er sich unter der sexagesimalen Tafel, die nichts anderes sein kann, als die von Kūšyār als "Sechzigertafel" (*ğadwal as-sittīn*) bezeichnete sexagesimale Einmaleinstafel, eine trigonometrische oder astronomische Tafel vorstellte. Hier liegt der Schlüssel zu der Frage, wie Abul-Wafā' seine genauen Tabellen berechnete. Es ist sehr schade, dass uns diese Schrift nicht erhalten ist. Denn hier wäre vielleicht ein Hebel zur Lösung des Problems anzusetzen, ob etwa die reine Sexagesimalrechnung eine Neuschöpfung der islamischen Mathematiker ist.

Hat sie vielleicht Abul-Wafā', dieser erfindungsreiche Rechner, aus der trümmerhaften griechischen Sexagesimalrechnung neu geschaffen? Wer wollte das voreilig behaupten? Nur Quellenforschung kann

([1]) H. Suter, *Die Mathematiker u. Astron. d. Araber*. Leipzig. 1900, S. 72. — Man beachte hier übrigens S. 66 Anm. *c*).

hier weiterhelfen. Der Titel von Kūšyār's Schrift über das Rechnen der Inder richtet unseren Blick auf die indische Mathematik. Aus dieser ist bisher keine Spur von reiner Sexagesimalrechnung bekannt geworden. Wie in der Algebra, so ist auch in der Rechenkunst mit der Möglichkeit einer nicht über Alexandrien gehenden Tradition von den Babyloniern etwa über die vorislamischen zu den islamischen Persern zu rechnen.

Zunächst ist noch in den Schriften Abul-Wafā's, seiner Zeitgenossen und Vorgänger zu forschen. Hier ein kleiner Beitrag: Abul-Wafā' verfasste eine *Schrift über das, was die Schreiber und die Rechner von der Wissenschaft des Rechnens nötig haben (kitāb fīmā yaḥtāğ ilaihi 'l-kuttāb wal-ʿummāl min ʿilm al-ḥisāb)* ([1]). Woepcke hat aus dem Inhaltsverzeichnis der Leidener Handschrift, die von den 7 "Stationen" (*manāzil*) des Werkes nur die drei ersten enthält, die Kapitelüberschriften aller 7 Stationen übersetzt ([2]). Vom Inhalt der beiden ersten Stationen sagt er an einer anderen Stelle ([3]): "Les deux premiers livres forment un traité complet d'arithmétique pratique. On y trouve une théorie fort développée des fractions, de la conversion des nombres entiers et des fractions en quantités sexagènes et sexagésimales, de la multiplications des nombres entiers et des fractions" ([4]).

([1]) Bei einem Teil der in Leiden, Kairo, im Escurial und in Rampur befindlichen Handschriften ist noch unsicher, ob es sich um dasselbe Werk handelt.

([2]) *Journal asiatique* (5) 5, 1855, S. 246-251. Die Kapitelüberschriften lassen erkennen, womit sich die *kuttāb* und *ʿummāl* zu befassen hatten, und hiernach ist bei den *ʿummāl*, die Suter in seinem vorhin genannten Buche (S. 71) durch "Geschäftsleute" wiedergibt, wohl besonders auch an Steuereinnehmer zu denken.

([3]) Fr. Woepcke, *Sur l'introduction de l'arithmétique indienne en occident*. Rom 1856, S. 53.

([4]) Dies ist eine der wenigen Stellen, an denen Woepcke im Vorbeigehen auf ein Kennzeichen der islamischen reinen Sexagesimalrechnung hinweist. Auch gelegentlich der Erörterung des Gebrauchs der indischen Ziffern erwähnt dieser Forscher die ganzen Sexagesimalzahlen: "... le calcul sexagésimal, de même qu'il avait subdivisé le degré en minutes, secondes, tierces, etc., avait conçu des ordres ascendants, supérieurs au degré, de sorte que, si on voulait, on n'était jamais obligé de dépasser, dans la notation, le nombre 59". (*Journal asiatique* (6) 1, 1863, S. 465). Auf die Sechzigertafel macht Woepcke in der in der vorhergehenden Fussnote angeführten Abhandlung (S. 70) ebenfalls aufmerksam, indem er zur Überschrift von Kapitel 3 der *Feinheiten* von Sibṭ al-Māridīnī bemerkt: "C'est la table de multiplication

Dieses Werk von Abul-Wafā' enthält zwar keine vollständige Darstellung der Sexagesimalrechnung, die ja eine Angelegenheit der Astronomen und nicht der Schreiber und Rechner war. Die Sechzigertafel wird nicht behandelt, und auch die von Woepcke erwähnte Verwandlung ganzer dekadischer Zahlen in ganze Sexagesimalzahlen, wie wir sie bei Kūšyār feststellten, habe ich in der Leidener Handschrift nicht entdecken können. Dennoch erscheint mir das, was hier an sexagesimaler Rechnung vorkommt, sehr bemerkenswert.

In der ersten Station werden die Brüche ausführlich und so eigenartig behandelt, dass zur genauen Untersuchung dieses Gegenstandes die Herausgabe des Textes mit Übersetzung und Erläuterungen erwünscht und lohnend erscheint. Hier sei nur angedeutet, dass verschiedene Darstellungen der Brüche, insbesondere auch Stammbruchsummen und Sexagesimalbrüche vorkommen, und dass der Verfasser in ihrer Art erschöpfende Tabellen für die Umrechnung der einen Form in die andere darbietet. Ich begnüge mich damit, vier von den vielen Tabellen, deren Zahlen in Worten geschrieben sind, zu übersetzen. Von den Zwecken, zu denen der Verfasser sie verwandt wissen will, sei nur gesagt, dass die vierte Tabelle ebenso wie die babylonischen Reziprokentabellen dazu dienen soll, Divisionen als Multiplikationen auszuführen. Gibt man der ersten Spalte dieser Tabelle die Überschrift n, so muss die zweite die Überschrift $\frac{60}{n}$ erhalten. Die beiden ersten Tabellen

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
30	20	15	12	10	6

$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$
$8\frac{4}{7}$	$7\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$

gehören zusammen. Ihre erste Zeile bilden die *Häupter* (*ru'ūs*).

sexagésimale". Ausser bei Woepcke und Carra de Vaux (*Bibliotheca Mathematica* (2) 13, 1899, S. 33-36), der durch Woepcke auf Sibṭ al-Māridīnī aufmerksam wurde, ist mir nur bei E. Wiedemann (*Beitr. z. Gesch. d. Naturw.* XIV, S. 20-21, Sonderabdr. aus d. *Sitzgsber. d. Phys.-Med. Soz. in Erlangen 40,* 1908) ein Hinweis auf die islamische reine Sexagesimalrechnung begegnet. Wiedemann weist in al-Bīrūnīs *Chronologie* (Text v. Sachau S. 135 u. 137, Übers. S. 132 u. 133) ganze Sexagesimalzahlen nach und beschreibt eine Sechzigertafel, ohne aber ihre Bedeutung als Einmaleinstafel zu würdigen.

Von der dritten und vierten Tabelle gebe ich nur Ausschnitte. Die erste Spalte der dritten Tabelle ist die geordnete Folge

$$\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{2}{7}, \ldots, \frac{7}{10}, \frac{9}{10}$$

aller echten, nicht kürzbaren Brüche $\frac{m}{n}$ für $n = 3, 4, \ldots, 10$.

$\frac{2}{3}$	40	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$	45	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}$	24	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}$
...	....	....
$\frac{2}{7}$	$17\frac{1}{7}$	$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{7}$
...	....	....
$\frac{4}{9}$	$26\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$
...	....	....

2	30
3	20
4	15
....	....
7	$8\frac{4}{7}$
8	$7\frac{1}{2}$
....	....
42	$1\frac{3}{7}$
45	$1\frac{1}{3}$
48	$1\frac{1}{4}$
49	$1\frac{1}{7}+\frac{4}{7}\cdot\frac{1}{7}$
....	....
120	$\frac{1}{2}$

In der vierten Tabelle, die der Verfasser dem Gedächtnis einzuprägen empfiehlt, durchläuft die Zahl der ersten Spalte von den Zahlen von 2 bis 120 alle diejenigen, die keine anderen Primfaktoren als 2, 3, 5, 7 besitzen.

Hier sieht man eine grossartige Vereinigung von Formen der Bruchrechnung vollzogen, die eine lange Vorgeschichte und örtlich verschiedene Herkunft haben. Die Tabellen erinnern uns sowohl an die altägyptischen Stammbruchsummen wie an die babylonischen Reziprokentafeln. Eine gründliche Prüfung dieses und anderen Materials wird erforderlich sein, um der Entscheidung näher zu kommen, wie die Fäden von der ältesten orientalischen Rechenkunst bis zur arabischen gelaufen sein mögen.

Von den mancherlei uns erhaltenen arabischen Schriften, die durch ihre Titel den Wunsch nach Untersuchung ihres auf Sexagesimalrechnung bezüglichen Inhalts erwecken, nenne ich hier zwei:

1. *Das Buch der Vollendung über das Rechnen* (*kitāb at-takmila fil-ḥisāb,* Istanbul, Laleli 2708,$_1$), das den 1037 verstorbenen ʿAbdalqāhir b. Ṭāhir al-Baġdādī zum Verfasser hat. Krause gibt in seinem Verzeichnis (S. 474) an, dass der dritte der sieben Teile des Werkes die Überschrift hat: *Darlegung der Kenntnis der Vorschriften des Verfahrens bei der Rechnung der Grade, Minuten und dem, was in dieser Richtung liegt.*

2. Eine Schrift von Abū Naṣr, der, wie Or 17 (1948) S. 510 erwähnt, ebenfalls um das Jahr 1000 lebte. Sie führt nach einem von seinem Schüler al-Bīrūnī angelegten Verzeichnis (¹) den Titel *Lehrbrief über die Minutentafel (risāla fī ǧadwal ad-daqāʾiq)* und ist uns in zwei Handschriften erhalten (Bodl. I, 940,$_6$; Bankipore 2468,$_{14}$, vgl. Katalog 22 S. 70).

Neben der r e i n e n Sexagesimalrechnung, deren Anwendung wohl auf astronomische Kreise beschränkt blieb, gab es eine unreine und uneigentliche. Sie rechnete nicht mit ganzen Sexagesimalzahlen, sondern nur mit Sexagesimalbrüchen und bediente sich nicht der Sechzigertafel. Um z. B. zwei Sexagesimalbrüche miteinander zu multiplizieren, verwandelte man jeden in Einheiten der niedrigsten Sexagesimalstelle, also den einen etwa in lauter Sekunden und den anderen in lauter Terzen. Man multiplizierte dann die erhaltene dekadische Zahl der Sekunden mit der erhaltenen dekadischen Zahl der Terzen und erhielt das Produkt als dekadische Zahl der Quinten, die dann in einen aus Quinten, Quarten usw. bestehenden Sexagesimalbruch zurückverwandelt wurde. Diese schwerfälligen Operationen finden wir in den gewöhnlichen Darstellungen des indischen Rechnens behandelt, so bei an-Nasawī und im ersten Teile von Kūšyār's Rechenbuch, an das an-Nasawī sich stark anlehnt. Allerdings kommen bei Kūšyār im ersten Teil an einer Stelle Erhöhte vor. Sie treten als Ergebnis

(¹) Vgl. al-Bīrūnī, *Chronologie orientalischer Völker,* herausgeg. von E. Sachau, Leipzig 1878, Neudruck Leipzig 1923, S. XXXXVII.

der Division auf, wenn die höchste Stelle des Divisors von niedrigerem Grade als die des Dividenden ist, also z. B. bei der Division von Graden durch Quarten. Der Verfasser erklärt hier, was Erhöhte sind und verwandelt sie in dekadisch ausgedrückte Grade.

Selbst ein Astronom wie al-Bīrūnī vollzieht die sphärischen Rechnungen mit Sexagesimalbrüchen in seinem Werk über geographische Ortsbestimmung, dem *Taḥdīd* (Fatih 3386), nach dieser unbeholfenen und unreinen Methode und bereitet dem, der diese zahlreichen Rechnungen in allen ihren Schritten nachprüft, viel Arbeit. Dass al-Bīrūnī so rechnete, aber seinen Lehrer Abū Naṣr veranlasste, über die "Minutentafel" — das dürfte die Sechzigertafel sein — eine Schrift zu verfassen, legt die Vermutung nahe, dass die reine Sechzigerrechnung, von Abul-Wafā' ausgehend, damals Raum gewann. Auch zu der von Abul-Wafā' ausgehenden neuen Kugeldreiecksrechnung nahm Abū Naṣr in einer im Namen al-Bīrūnī's geschriebenen Abhandlung Stellung, wie wir Or 17 (1948), 510 sahen. In einer Tabelle seiner Chronologie gibt al-Bīrūnī grössere ganze Zahlen zwecks sicherer Festlegung auch rein sexagesimal an.

Von den meisten der ältesten in arabischer Sprache geschriebenen Rechenbücher sind uns leider nur die Titel und die Namen ihrer Verfasser erhalten. Unser Blick richtet sich mit besonderer Spannung auf die Schrift *Algoritmi de numero Indorum* (1) und den *Liber Algorismi*, der in einer Handschrift dem Johannes von Sevilla zugeschrieben wird (2). Den ersten dieser beiden Traktate erklärte Woepcke (3) mit guten Gründen für eine Übersetzung eines Rechenbuches von al-Ḫwārizmī, und der zweite steht in engem Zusammenhang mit dem ersten. Beide führen die von ihnen dargebotene Sexagesimalrechnung ausdrücklich auf die I n d e r zurück (S. 17, Z. 8 v. u. ff., S. 49, Z. 4 v. u. ff.). In beiden sind die Sexagesimalbrüche wie bei Kūšyār und an-Nasawī vertikal in indischen Ziffern geschrieben. Beide lehren aber diejenige Art der Sexagesimalbruchrechnung, die wir soeben als unreine und uneigentliche gekennzeichnet haben, und von ganzen Sechzigerzahlen und Sechzigertafel sagen sie nichts.

(1) *Trattati d'aritmetica* pubbl. da B. Boncompagni, Rom 1857, S. 1-23: *I, Algoritmi de numero Indorum.*

(2) *Trattati*, S. 25-136: II, *Ioannis Hispalensis liber Algorismi de pratica arismetrice.*

(3) S. die S. 174, Anm. 3 zitierte Schrift, S. 17-19.

Nach Behandlung der Multiplikation zweier Sexagesimalzahlen gemäss dem Verfahren der Zurückführung auf dekadische Multiplikation heisst es jedoch in der ersten Schrift (S. 19, Z. 1 v. u.): "et est ei alius modus breuior: set hic ordo est, quo usi sunt indi, super quem figurare numerum suum".

War dieser andere, kürzere Multiplikationsmodus, den al-Ḫwārizmī kennt, aber neben dem von ihm dargestellten indischen nicht mitteilt, etwa das Verfahren der reinen Sexagesimalrechnung? Sicher ist das nicht. Man kann auch an das Verfahren des Theon von Alexandrien denken, der zwar jede Sexagesimalstelle des einen Faktors mit jeder Sexagesimalstelle des anderen Faktors multipliziert, die Teilprodukte aber in dekadischer Form ausrechnet und niederschreibt, und erst bei ihrer Addition zur sexagesimalen Schreibweise, aber nur der Bruchstellen, übergeht. Besonders nahe kommt Theon der reinen Sexagesimalrechnung bei einer im vierten und einer im neunten Buch seines Kommentars zum Almagest ausgeführten Division. Den Mangel, der darin liegt, dass ihm die ganzen Sechzigerzahlen fehlen, umgeht er hier künstlich, und die ihm ebenfalls fehlende Sechzigertafel ersetzt er durch einen für den vorliegenden Zweck hergestellten unvollkommenen Behelf.

Woepcke erklärte die reine islamische Sexagesimalrechnung, insbesondere die Einführung der ganzen Sexagesimalzahlen, für eine spätere Vervollkommnung, deren Anfänge sich bei Theon befinden ([1]). Er verweist dabei auf das erste der beiden von uns genannten Divisionsbeispiele Theons. Aber können wir, die wir um das vorgriechische Rechnen mit Sexagesimalzahlen von relativem Stellenwert unter Verwendung von Produktentabellen wissen, dieser Annahme ohne weiteres folgen?

Die reine Sexagesimalrechnung lässt sich auch in der späteren islamischen Mathematik feststellen. In den Īlḫānischen Tafeln von aṭ-Ṭūsī (1201-74) kommen Erhöhte, also ganze Sexagesimalzahlen vor ([2]). Näheres darf man aus der Untersuchung seiner beiden uns erhaltenen Rechenbücher erhoffen. Das eine derselben: *Zusammenfassung des Rechnens mit Tafel und Staub* (Verzeichnis von Krause, S. 496) bringt im dritten Kapitel zwei Arten der Bruchrechnung nach dem Verfahren der Astronomen, nämlich erstens "ihr Verfahren vermittels der Rechnung der Inder" und zweitens "ihr Verfahren vermittels der Ǧummal-

([1]) *Journal asiatique* (6) 1, 1863, S. 466.

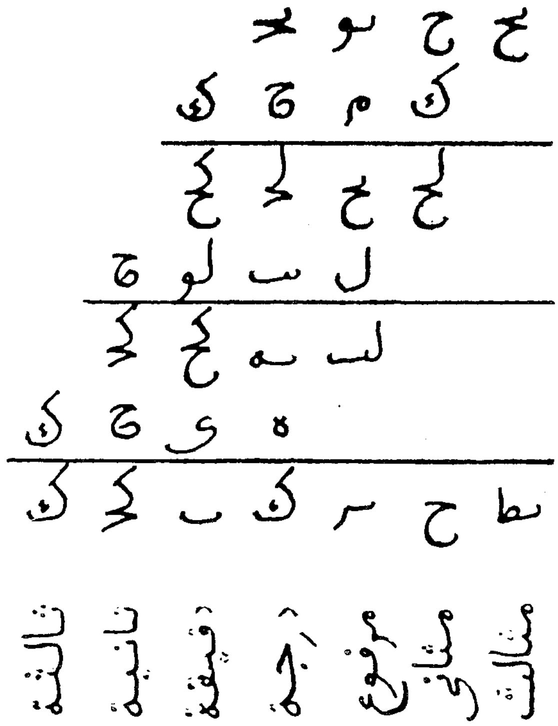
([2]) Vgl. C. Schoy, *Die trigonometrischen Lehren des persischen Astronomen... al-Bīrūnī.* Hannover 1927, S. 108.

rechnung". Das andere ist persisch geschrieben, heisst *Schrift über die Multiplikation und die Division* (Krause S. 497) und handelt im dritten Buche "über die Rechnung der Grade und Minuten".

In reifer, vollendeter Form finden wir die reine Sexagesimalrechnung angewandt und dargestellt bei Ǧamšīd b. Masʿūd al-Kāšī, einem der Gelehrten um Uluġ Beg. In seinem 1427 abgeschlossenen *Schlüssel der Rechner (Miftāḥ al-ḥussāb),* einem Lehrbuch des Rechnens und der praktischen Geometrie, das ich eingehend untersucht habe ([1]), bringt er im dritten Buch das Rechenverfahren der Astronomen, d. i. das Rechnen mit Sexagesimalzahlen. Die hier gelehrten Rechenoperationen und ihre Ausführungsformen entsprechen denjenigen, die er im ersten Buche für das dekadische Rechnen mit ganzen Zahlen ausführlich mitgeteilt hat. (Das zweite Buch behandelt die Bruchrechnung.) Um einen Einblick in seine Sexagesimalrechnung zu geben, begnüge ich mich mit der Wiedergabe einer der Formen, in der er die Multiplikation zweier Sexagesimalzahlen auszuführen lehrt. Nachdem er (Leiden Nr. 185 Gol., 38a) das Vorgehen allgemein beschrieben hat, bringt er als Beispiel die

Multiplikation von

20 42 35 Sekunden (ك مب له ثانية) mit *55 26 48 40 Minuten* (نه كو مح م دقيقة).



Dreimal Erhöhtes	Zweimal Erhöhtes	Erhöhtes	Grad	Minuten	Sekunden	Terzen
18	8	16	13			
	20	40	0	20		
	38	18	33	28		
		30	12	36	0	
		32	15	28	23	
			5	10	0	20
19	8	17	20	2	23	20

([1]) S. oben S. 166, Anm 1.

Die äussere Form der Rechnung ist ganz anders als bei Kūšyār. Die Stellen einer Sexagesimalzahl werden in Ǧummalziffern mit fallendem Stellenwert von rechts nach links nebeneinander geschrieben. Bezeichnen wir wie oben (S. 165) die in einer Stelle einer Sexagesimalzahl stehende, der Menge 0, 1, 2, ..., 59 angehörige Zahl als 'Sexagesimalziffer', so kommt durch die verbundene Schreibung der Ǧummalzeichen auch bei denjenigen dieser Sexagesimalziffern, deren Schriftbild aus zwei Buchstaben zusammengesetzt ist, mehr oder weniger der Eindruck eines einzigen Zifferzeichens zustande, wie z. B. bei يج = *13*. Der absolute Stellenwert wird bei einer im laufenden Text vorkommenden Zahl durch Angabe des Stellenwertes der niedrigsten Stelle gekennzeichnet. *20 42 35 Sekunden* bedeutet also *20 Grad 42 Minuten 35 Sekunden*. In Rechnungen und Tabellen pflegt al-Kāšī aber die Stellenwerte über, oder, wie hier, unter den Spalten anzugeben. Für "zweimal Erhöhtes", "dreimal Erhöhtes" usw. sehen wir hier neue, neben den alten aufgekommene Kunstwörter (مثانى , مثالث usw.) angewandt. Die Übersetzung gebe ich in unseren Ziffern und in der bei uns wie bei den Griechen üblichen rechtsläufigen Niederschrift der Sexagesimalzahlen, bei der die höchste Stelle links steht.

Da nicht mehr auf der Staubtafel gerechnet wird, können Ziffern nicht ausgelöscht und durch ein neues Zwischenergebnis oder ein Endergebnis ersetzt werden: jedes Teilergebnis ist niedergeschrieben und nachprüfbar.

Dem Wesen nach rechnet aber al-Kāšī noch fast genau so wie Kūšyār. Er multipliziert die Stellen des einen Faktors nacheinander mit jeder Stelle des anderen, wobei jedes der entstehenden Teilprodukte als Produkt zweier Sexagesimalziffern aus der wie bei Kūšyār eingerichteten Sechzigertafel entnommen wird, soweit der Rechner es nicht durch Kopfrechnung findet oder auswendig weiss. Zuerst multipliziert er die höchste Stelle *20* des ersten Faktors mit den einzelnen Stellen des zweiten Faktors *55 26 48 40*, bei der höchsten beginnend. In der Sechzigertafel liest er aus der Spalte mit der Kopfzahl *20* die Teilprodukte $20 \cdot 55 = 18\ 20$, $20 \cdot 26 = 8\ 40$, $20 \cdot 48 = 16\ 0$, $20 \cdot 40 = 13\ 20$ ab. (Man findet diese auch im Kopf, da der Multiplikation mit 20, vom Stellenwert abgesehen, eine Division durch 3 gleichkommt.) Diese Teilprodukte schreibt er nacheinander in zwei Zeilen gestaffelt nieder, wie es aus dem Rechenbild zu ersehen ist, dessen beide ersten Zeilen wir hier wiederholen, indem wir das erste Teilprodukt durch Umrahmung kennzeichnen:

18	*8*	*16*	*13*	
	20	*40*	*0*	*20*

An diese Teilprodukte schliessen sich diejenigen der zweiten Stelle *42* des ersten Faktors mit den einzelnen Stellen des zweiten Faktors an. So entsteht im Rechenschema die zweite Doppelzeile, deren erstes Teilprodukt $42 \cdot 55 = 38\ 30$ um eine Stelle (im Urtext nach links, in der Übersetzung nach rechts) einzurücken ist. Erst nachdem alle 12 Teilprodukte niedergeschrieben sind, vollzieht al-Kāšī die Addition, während wir Kūšyār im Verlaufe der Staubtafelrechnung fortwährend Teiladditionen vornehmen sahen. Zur Bestimmung des Stellenwertes der niedrigsten Stelle des Produktes aus den Stellenwerten der niedrigsten Stellen der Faktoren dient eine Hilfstafel, die im wesentlichen ebenso wie bei Kūšyār angelegt ist.

Zur Nachprüfung der Rechnung bedient sich al-Kāšī der 59-er Probe, die das Gegenstück der Neunerprobe der dekadischen Rechnung ist. Für das soeben wiedergegebene Beispiel würde diese Probe, wenn wir uns der Kürze halber moderner Ausdrucksweisen bedienen, so lauten:

$$20 + 42 + 35 \equiv 38 \bmod 59, \quad 55 + 26 + 48 + 40 \equiv 51 \bmod 59,$$
$$19 + 8 + 17 + 20 + 2 + 23 + 20 \equiv 50 \bmod 59, \quad 38 \cdot 51 \equiv 50 \text{ mod. } 59.$$

Zu jeder seiner Rechnungsmethoden in ganzen dekadischen Zahlen gibt al-Kāšī als Gegenstück die Ausführung mit ganzen Sexagesimalzahlen. Bemerkenswert sind in dieser Hinsicht seine Wurzelausziehungen. Er zieht sowohl dekadisch wie sexagesimal Wurzeln zweiten, dritten und höheren Grades nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren in einer Weise aus, die noch die Herkunft aus der Staubtafelrechnung verrät und deshalb zwar äusserlich, aber nicht wesentlich verschieden von der modernen Ausführungsart dieses Verfahrens ist. Er lehrt aber auch die Ausziehung solcher Wurzeln auf Grund des binomischen Lehrsatzes, den er für beliebige ganze positive Exponenten formuliert. An anderer Stelle (1) habe ich al-Kāšī's und anderer islamischer Mathematiker Methoden zur Ausziehung der Wurzeln und seine Lehre vom binomischen Lehrsatz und den Binomialkoeffizienten, deren Anordnung in Form des sogenannten Pascalschen Dreiecks er nach eigener Erklärung von seinen Vorgän-

(1) Vgl. S. 166, Anm. 2.

gern übernommen hat, ausführlich dargestellt. Den abendländischen Mathematikhistorikern blieb das Vorkommen des binomischen Lehrsatzes in der islamischen Mathematik bisher fast unbekannt. Erst nach dem Studium al-Kāšī's bemerkte ich den Hinweis, den der Tübinger Mathematiker und Mathematikhistoriker H. Hankel (1839-1873) (1) auf einen Artikel von J. Tytler (2) gab. In diesem Artikel wird das Auftreten des binomischen Lehrsatzes bei al-Kāšī und dem anscheinend von al-Kāšī abhängigen Muḥammad Bāqir Zainalʿābidīn al-Yazdī (Anfang des 17. Jahrh.) mitgeteilt.

An die Methoden der Wurzelausziehung, d. h. die Methoden der numerischen Auflösung der r e i n e n Gleichungen, schliessen sich in natürlicher Weise die Methoden der numerischen Auflösung der g e m i s c h t e n Gleichungen an. Eine hervorragende Leistung al-Kāšī's auf diesem Gebiet, die in überaus genauer sexagesimaler Rechnung nach einem geschickten Iterationsverfahren vollzogene Auflösung der kubischen Gleichnung für eine Winkeldreiteilung hat Hankel (S. 289-293) gebührend gewürdigt. Da Hankel nur aus einer sekundären Quelle schöpfen konnte, habe ich mich bemüht, auf Grund eines ursprünglicheren und ausführlicheren Berichts in einer Handschrift (Kairo[4] V, S. 210) das Verfahren al-Kāšī's darzustellen und zu erläutern. Zugleich suchte ich nach al-Kāšī's Vorbildern, als welche al-Bīrūnī's numerische Auflösungen kubischer Kreisteilungsgleichungen und al-Bīrūnī's Behandlung der Winkeldreiteilung in Frage kommen. Der so entworfene Beitrag zur Geschichte der numerischen Auflösung gemischter Gleichungen im Mittelalter — auch Leonardo Pisanos unter arabischem Einfluss numerisch gelöste kubische Gleichung gehört hierher — bedarf der Ergänzung durch eine Arbeit, die die chinesischen Auflösungsmethoden gemischter Gleichungen aus den Quellen darstellt (3).

Wie gross sein Geschick und seine Übung in der Sexagesimalrechnung ist, zeigt al-Kāšī in seinem *Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-risāla al-muḥīṭīya)*, den ich nach dem in Berlin (Mss.

(1) H. Hankel, *Zur Geschichte der Mathematik*, Leipzig 1874, S. 269.

(2) J. Tytler, *Essay on the Binomial Theorem; as known to the Arabs.* Communicated by R. Tytler, *Asiatic Researches* 13, Calcutta 1820. S. 456-466.

(3) Die in japanischer Sprache veröffentlichten Arbeiten von M. Fujiwara, *Miscellaneous Notes on the History of Chinese Mathematics, Tôhoku Math. Journ. 46*, 1940, S. 295-308; *47*, 1940, S. 35-48; S. 49-57 lernte ich nur aus dem Bericht im *Zentralbl. f. Math. 23*, 1941, S. 195 kennen.

simul. or 60) befindlichen Photogrammen der Handschrift des Stambuler Armeemuseums übersetzt und ausführlich erläutert habe [1]. Auf Grund eines flüssigen elementargeometrischen Verfahrens, das, modern trigonometrisch gesprochen, auf die immer wiederholte Anwendung einer Halbwinkelformel hinausläuft, bestimmt al-Kāšī durch eine Folge von übersichtlichen sexagesimalen Tabellenrechnungen den Umfang eines dem Kreise einbeschriebenen und eines ihm umbeschriebenen regelmässigen Vielecks von $3 . 2^{28} = 800335168$ Seiten und schliesst damit den Kreisumfang in viel engere Grenzen ein als irgend einer seiner Vorgänger. Er erhält so für das Verhältnis des Kreisumfangs zum Halbmesser den in allen niedergeschriebenen Sexagesimalstellen richtigen Wert

$$2\pi = 6.\ 16\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50.$$

Um dieses Ergebnis auch für Leute nutzbar zu machen, die nicht wie die Astronomen seiner Zeit mit Sexagesimalzahlen umgehen können, kommt er auf den Gedanken, diese Sexagesimalzahl in eine Dezimalzahl zu verwandeln. Er gibt Anleitungen, mit dem von ihm richtig berechneten und im dezimalen Positionssystem geschriebenen Wert

$$2\pi = 6.28318\ 53071\ 795865$$

zu gegebenen Halbmessern die Umfänge und zu gegebenen Umfängen die Halbmesser zu berechnen und erweist sich hierbei nach unseren bisherigen Kenntnissen als der erste unter den Erfindern der Dezimalbrüche, (*al-kusūr al-aʿšārīya*), der Vorschriften zu deren Schreibung im Positionssystem und zum praktischen Rechnen mit ihnen gab. Er nimmt die Einführung dieser Brüche als eigene Leistung in Anspruch und sagt, dass er nach Analogie der Sexagesimalzahlen, bei denen es eine aufsteigende Kette (*silsila*) der Ganzen und eine absteigende Kette der Brüche gebe, auch bei den indischen Zahlen eine absteigende Kette der "Zehntel" (*aʿšār*), "Dezimalsekunden" (*ṯānī al-aʿšār = zweites der Zehntel*), d. h. Hundertstel usw. einführe

In Rechnungen kennzeichnet er bei den Dezimalzahlen den Stellenwert wie bei Sexagesimalrechnungen durch Über- oder Unterschriften der Spalten, zuweilen aber auch dadurch, dass er, wenn

(1) *Der Lehrbrief über den Kreisumfang (ar-risāla al-muḥīṭīya) von Ǧamšīd b. Masʿūd al-Kāšī*. Übersetzt und erläutert von P. Luckey. 112 Seiten Maschinenschrift, 1943, unveröffentlicht.

Ganze und Bruchstellen vorkommen, die Ganzen von den Bruchstellen durch einen Strich trennt.

Aus der Zahl der zum Teil umfangreichen Dezimalbruchrechnungen al-Kāšī's gebe ich ein kleines Beispiel, das zugleich zeigt, welches Verständnis dieser oft so überaus genau rechnende Mathematiker auch für abgekürzte Rechnungen hat. Er sagt (19b), um den Umfang eines Kreises vom Halbmesser $127 \frac{1}{2}$ Ellen zu finden, reiche es aus, folgendermassen zu rechnen ([1]).

٠	٦	٢	٨	٣	٢	١	الصحاح
	١	٢	٥	٦	٦	٢	
		٤	٣	٩	٨	٧	
			٣	١	٤	٥	الكسور
٠	٨	٠	١	١	٠		
الصحاح				الكسور			

0	6	2	8	3	2	*1*	Ganze
	1	2	5	6	6	*2*	
		4	3	9	8	*7*	
			3	1	4	*5*	Bruch
0	8	0	1	1	0		
Ganze				*Brüche*			

Im wesentlichen wird man heute die abgekürzte Multiplikation

$$127.5 \text{ Ellen mal } 6.2832 = 801.15 \text{ Ellen}$$

genau so ausführen.

In dem nach der *Muḥīṭīya* erschienenen *Schlüssel der Rechner* kommt al-Kāšī auf die Dezimalbrüche zurück. Er behandelt unter anderem die Verwandlung ganzer und gebrochener sexagesimaler Zahlen in dezimale und umgekehrt. Auch die Ergebnisse mit gegebenen Masszahlen gestellter geometrischer Aufgaben drückt er mit Hilfe von Dezimalbrüchen aus.

Bekanntlich findet man den Gedanken, dass an die Stelle der den Sexagesimalbrüchen zugrunde liegenden Zahl 60 auch eine andere Grundzahl treten könne, im Mittelalter vereinzelt theoretisch

([1]) Das in der Textwiedergabe Überstrichene und in der Übersetzung kursiv Geschriebene ist in der Handschrift rot geschrieben. In der Handschrift erscheint nur der die Einer von den Zehnteln trennende waagrechte Gitterstrich kräftiger als die übrigen.

ausgesprochen. Der Begriff der Dezimalbrüche wurde am deutlichsten etwa 70 Jahre vor al-Kāšī von Immanuel Bonfils aus Tarrascon entwickelt ([1]), von dem al-Kāšī nichts zu wissen scheint. Dass Bonfils den Gedanken aber praktisch im Positionssystem durchgeführt hätte, ist nicht bekannt.

Übrigens zeigt al-Kāšī neben der Kunst, umfangreiche Rechnungen in übersichtlicher tabellarischer Form anzulegen, die Fähigkeit, seine Gegenstände lebendig und mit didaktischen Geschick darzustellen. Um die Genauigkeit seiner Kreisberechnung zu veranschaulichen, sagt er an der Spitze des Lehrbriefs über den Kreisumfang, er wolle so genau rechnen, dass bei einem Kreis, dessen Durchmesser 600 000 Erddurchmesser beträgt, der Fehler weniger als die Dicke eines Haars ausmacht, die ein Sechstel der Breite eines mittleren Gerstenkorns ist. Er rechnet dann vor, auf wieviel Sexagesimalstellen 2π zu berechnen ist, um diese populär formulierte Genauigkeitsforderung zu erfüllen. In derselben Schrift bringt er für die Ziffernfolge der sexagesimalen Entwicklung von 2π einen arabischen Merkvers, für diejenige der dezimalen einen arabischen und einen persischen. Damit erweist er sich als Vorläufer der Dichter, die später im Abendlande die Zahl π in mehr oder weniger schönen Merkversen besungen haben.

Es bleibt noch zu untersuchen, ob al-Kāšī in seiner Sexagesimalrechnung von Šihābaddīn abhängt, der unter dem Namen Ibn al-Mağdī bekannt ist und von 1365 bis 1447 lebte, oder ob umgekehrt Ibn al-Mağdī von al-Kāšī abhängt. Ibn al-Mağdī stand im 62. Lebensjahre, als al-Kāšī's *Schlüssel* erschien. Seine Schrift über die Sexagesimalrechnung hat den Titel *Enthüllung der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten* und ist uns in Oxford und Algier erhalten. Dieses Werk, das ich noch nicht einsehen konnte, hat für uns besonderes Interesse, da der Verfasser in ihm ausführliche Hinweise auf das Verfahren der Vorgänger gibt. Wir erfahren das aus der Schrift seines Schülers Sibṭ al-Māridīnī (1423-1506) über die Sexagesimalrechnung *Feinheiten der Wahrheiten über die Rechnung der Grade und Minuten*, ein Werk, über dessen Inhalt ich in meiner Abhandlung über die Rechenkunst bei al-Kāšī berichtet habe. Auch auf die späteren arabischen Schriften über Sexa-

([1]) S. Gandz, *The Invention of the Decimal Fractions and the Application of the Exponential Calculus by Immanuel Bonfils of Tarrascon (c. 1350). Isis* 25, 1936, S. 16-45.

gesimalrechnung kann ich hier nicht eingehen. Aus dem Werk des Sibṭ al-Māridīnī sei aber hier eine Anweisung zur Kennzeichnung des absoluten Stellenwertes wiedergegeben: "Du musst aber die Stelle der Grade durch ein Zeichen (*ʿalāma*) markieren, wenn bei ihnen Erhöhtes steht, und wenn der Name der letzten der Stellen vermerkt wird, so ist das gut". (Gotha 1390, 4 b 10-20).