Zur islamischen Rechenkunst und Algebra des Mittelalters

Von Dr. Paul Luckey, Gönningen (Württ.)

Angesichts des mächtigen Einflusses, den die islamischen mathematischen Wissenschaften des Mittelalters auf die Entfaltung der Wissenschaft des Abendlandes im Mittelalter und in der Zeit der Renaissance ausgeübt haben, erscheint es bedauerlich, ja beschämend, wie wenig die mittelalterliche islamische Mathematik und Astronomie in der Neuzeit erforscht wurden. Von den zahlreichen arabischen und persischen Handschriften aus diesem Gebiet, die die Bibliotheken des Abend- und des Morgenlandes bergen, wurden bisher verhältnismäßig sehr wenige untersucht, so daß unsere Kenntnis der Geschichte der islamischen Astronomie und Mathematik noch beträchtliche Lücken aufweist, und bei den Historikern dieser Wissenschaften auch Mißverständnisse und falsche Vorstellungen aufkommen konnten, weil sie, der orientalischen Sprachen meist nicht mächtig, ihre Kenntnisse und Schlüsse auf den viel zu kleinen Bereich des von Sprachkundigen durch Übersetzungen oder Inhaltsangaben zugänglich gemachten Quellenmaterials gründeten. Die letzten 15 Jahre waren für Forschungen dieser Art sehr ungünstig, da schon vor dem Kriege Photokopien aus ausländischen Bibliotheken schwer zu beschaffen waren, und dann während des Krieges die deutschen Handschriftenschätze verlagert wurden. Trotzdem war es mir vergönnt, eine Anzahl bisher unerforschter arabischer mathematischer und astronomischer Handschriften zu untersuchen. Im folgenden berichte ich über einige Ergebnisse, die dazu beitragen mögen, unsere bisherigen Kenntnisse zu ergänzen und Irrtümer zu beseitigen. Die Ergebnisse wären leichter zu gewinnen gewesen und umfassender ausgefallen, wenn nicht die immer noch andauernden Hemmnisse der Zeit mir den Einblick in so manche Handschrift versagt hätten, deren Titel und Inhaltsangaben in den Katalogen mich lockten. In der Hauptsache beschränke ich mich hier auf die islamische Rechenkunst und Algebra, obwohl auch aus der Astronomie, der Gnomonik und der Trigonometrie Bemerkenswertes mitzuteilen wäre.

Die an die indische Rechenkunst anknüpfende islamische Technik des Rechnens mit ganzen, im dekadischen Positionssystem geschriebenen Zahlen ist einigermaßen bekannt, soweit die elementaren Rechenoperationen bis zur Division in Betracht kommen. Auch über die islamische Bruchrechnung weiß man Bescheid, obwohl die Unterschiede in ihrer Behandlungsweise und Terminologie bei den verschiedenen Autoren und zu den verschiedenen Zeiten noch eine nähere Beleuchtung verdienen. Schlecht steht es um die bisherigen Kenntnisse der Technik des Wurzelausziehens, auf die ich weiter unten zurückkommen werde.

Besonders im Dunkeln blieb aber bisher die islamische Sexagesimalrechnung. Wie berechneten die islamischen Astronomen technisch ihre sehr genauen Tafeln der sexagesimal geschriebenen Werte der Sinusfunktion? Wie führten sie ihre sphärisch-astronomischen Rechnungen mit diesen Sexagesimalbrüchen praktisch aus? Im Taḥdīd von al-Bīrūnī, einem Werke über geographische Ortsbestimmung, das dieser große Astronom und Geograph im Jahre 1025 abschloß, beobachtet man eine außerordentlich schwerfällige Technik dieses Rechnens. Um z. B. einen Ausdruck $x = \frac{a \cdot b}{c}$ zu berechnen, in dem jede der Zahlen a, b, c ein aus Minuten und Sekunden bestehender Sexagesimalbruch ist, verwandelt al-Bīrūnī jede dieser drei Zahlen in lauter Sekunden, multipliziert die beiden so für a und b erhaltenen ganzen dekadischen Zahlen miteinander nach einer der Methoden des dekadischen Multiplizierens, dividiert dann das erhaltene dekadische Produkt $a \cdot b$ durch die als dekadische ganze Zahl der Sekunden geschriebene Zahl c, um schließlich das Ergebnis x, wenn es z. B. einen Sinus bedeutet, wieder in einen Sexagesimalbruch zu verwandeln.

Aber neben dieser umständlichen unreinen Sexagesimalrechnung besaßen Astronomen zur Zeit al-Bīrūnīs eine elegante reine Sexagesimalrechnung. Wie eine aus Ganzen und Brüchen bestehende dekadische Zahl im Positionssystem geschrieben wird, derart, daß z. B. 208,53 die nach fallenden Potenzen von 10 entwickelte Zahl

$$2 \cdot 10^2 + 0 \cdot 10 + 8 \cdot 10^0 + 5 \cdot 10^{-1} + 3 \cdot 10^{-2}$$

bedeutet, so schrieb man im sexagesimalen Positionssystem z. B.

43 0 16 8 37 Sekunden

und meinte damit die Zahl

$$43 \cdot 60^2 + 0 \cdot 60 + 16 \cdot 60^0 + 8 \cdot 60^{-1} + 37 \cdot 60^{-2}.$$

Wie das dekadische Rechnen mit den 10 Ziffern

$$0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 8,\ 9$$

arbeitet, so das rein sexagesimale mit den 60 »Ziffern«

0, 1, 2, . . ., 58, 59.

Sie wurden meist mit Ǧummalbuchstaben geschrieben, d. h. Buchstaben eines arabischen Alphabets, die in ihrem Gebrauch für die Zahlenschreibung genau den griechischen Buchstaben entsprechen, mit denen wir z. B. im Almagest des Ptolemäus die Sexagesimalbrüche geschrieben finden. Zu den Buchstabenzeichen kam wie bei den Griechen ein Nullzeichen. Der arabischen Schreibung der obigen Sexagesimalzahl entspräche also die griechische Schreibung

μγ ο ιϛ η λζ δεύτερα ἑξηκοστά.

Aber eine solche Schreibung finden wir in keinem griechischen Text. Ein griechischer Astronom würde diese Zahl schreiben: $\overset{\iota\varepsilon}{M}$ ͵δωιϛ η λζ, d. h. 154816. *8 37*.

In dieser unreinen Schreibweise sind die Ganzen dekadisch, die Brüche aber sexagesimal ausgedrückt. Das Kennzeichnende der islamischen reinen sexagesimalen Zahlenschreibung ist eben, daß auch die Ganzen sexagesimal im Positionssystem dargestellt werden.

Die niedrigste Stelle der Ganzen nannte man »Teile« oder »Grade«, die nächsthöhere, d. h. den Koeffizienten von 60^1, »Erhöhtes«, die folgende »zweimal Erhöhtes« und so fort. Die obige Sexagesimalzahl lautet also, ausführlich ausgesprochen:

43 zweimal Erhöhtes, 0 Erhöhtes, 16 Grad, 8 Minuten, 37 Sekunden.

Gewöhnlich kennzeichnete man den absoluten Stellenwert einfach durch Angabe des Stellenwertes der niedrigsten Stelle, wie der Sekunden in der anfangs mitgeteilten Schreibweise. In Tabellenrechnungen findet man die Bezeichnungen der Stellenwerte als Über- oder Unterschriften der Spalten. Sibṭ al-Māridīnī (1423—1506) empfiehlt, die Stelle der Grade (die Einer) durch ein Zeichen zu markieren. Dieses Zeichen ist das Äquivalent zu dem Komma, mit dem wir Deutsche, und zu dem Punkt, mit dem andere Völker die Ganzen von den Dezimalbruchstellen trennen.

Schrieb man die Sexagesimalstellen (Sexagesimalziffern) in den sogenannten indischen Ziffern, denen unsere Ziffern 0, 1, . . ., 8, 9 entsprechen, so setzte man sie mit fallendem Stellenwert untereinander.

Mit diesen reinen Sexagesimalzahlen wurden nun rein sexagesimale Rechnungen ausgeführt, d. h. Rechnungen im sexagesimalen Positionssystem, die in jeder Hinsicht genau den Rechnungen im dekadischen Positionssystem entsprechen. Wie man bei diesen das Kleine Einmaleins benutzt, d. h. die Gesamtheit der ausgerechneten Produkte von 1 mal 1 bis 10 mal 10, die man entweder auswendig weiß, oder, wie im Mittelalter, als »Tafel des Pythagoras« in Gestalt einer Tabelle mit zwei Eingängen vor sich hatte, so erfordert die reine Sexagesimalrechnung, die als Rechnung der Astronomen bezeichnet wurde, die Verwendung einer größeren Einmaleinstafel, nämlich der Tafel der sexagesimal dargestellten Produkte von 1 mal 1 bis 60 mal 60. Streng genommen genügen die Produkte bis 59 mal 59, wie beim Kleinen Einmaleins der dekadischen Zahlen diejenigen bis 9 mal 9. Man legte diese Tafel, die den Namen »Sechzigertafel« führte, als Tafel mit zwei Eingängen an. Am oberen und am seitlichen Rand standen die Zahlen von *1* bis *60*, und wenn man z. B. von der oberen *18* und der seitlichen *25* in die Tafel einging, so stieß man auf die Zahl *7 30*, d. i. das sexagesimal geschriebene Produkt $18 \cdot 25 = 7 \cdot 60^1 + 30 = 450$. Der rein sexagesimal rechnende Astronom hatte die Sechzigertafel zur Hand, wie der Astronom der Gegenwart die Logarithmentafel oder die Rechenmaschine. Gewöhnlich wurde die etwas unhandliche ganze Sechzigertafel in Teiltafeln zerlegt. Zur Bestimmung des Stellenwertes eines Produktes oder eines Quotienten diente eine besondere Tafel mit zwei Eingängen, aus der man z. B. entnehmen konnte, daß das Produkt einer zweimal Erhöhten (60^2) mit einer Terzie (60^{-3}) eine Minute (60^{-1}) beträgt. Wie man sieht, stecken in dieser Tabelle zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes und des Quotienten zweier Sexagesimalstellen die Gesetze der Multiplikation und der Division von Potenzen mit gleicher Basis 60 für Exponenten, die positive oder negative ganze Zahlen oder Null sein können.

Von dem um das Jahr 1000 lebenden Astronomen Kūšyār b. Labbān al-Ǧīlī ist uns ein Lehrbuch des Rechnens erhalten; dessen erster Teil das Rechnen mit den gewöhnlichen dekadischen Zahlen behandelt, während der zweite Teil in ganz entsprechender Weise die reine Sexagesimalrechnung lehrt. Die Sechzigertafel und die beiden Tafeln der Stellenwerte von Produkten und Quotienten, zwei Tafeln, die wir bei anderen Schriftstellern zu einer einzigen vereinigt sehen, werden beschrieben, und die Benutzung dieser Tafeln wird erläutert. Über die rationalen Operationen hinausgehend behandelt Kūšyār das rein sexagesimale Ausziehen von Quadratwurzeln, wie im ersten Teile das Ausziehen der Quadratwurzel in der Technik des Zehnersystems. Diese Schrift von Kūšyār ist die älteste der Schriften über sexagesimales Rechnen, deren ich habhaft werden konnte. Bei ihrem Studium gewinnt man aber den sicheren Eindruck, daß es sich nicht etwa um eine Neuerfindung des mathematisch nicht besonders hervorragenden Verfassers handelt, sondern daß dieser vielmehr älteres Gut in seiner Weise weitergibt. Man kann wohl mit Sicherheit annehmen, daß der 998 gestorbene Abul-Wafāʾ al-Būzǧānī, der als Astronom und als einer der Schöpfer der sphärischen Trigonometrie im eigentlichen Sinne des Wortes gleich bedeutend ist, bei der Herstellung seiner sehr genauen sexagesimalen Sinustafeln und bei seinen sphärisch-astronomischen Rechnungen r e i n sexagesimal unter Benutzung der Sechzigertafel arbeitete. Denn uns ist der Titel einer von ihm verfaßten Schrift »Über die Rechnung mit der sexagesimalen Tafel« überliefert. Die Schrift scheint, wie leider so manches wertvolle mathematische Gut der älteren Zeit, verlorengegangen zu sein.

Der Kenner der alten Mathematik und Astronomie des Zweistromlandes wird hier der Sexagesimalrechnung gedenken, von der uns die Rechnungen und die Produktentabellen der Keilschrifttafeln Kunde geben, und in die man besonders dank der Forschungen von F. T h u r e a u - D a n g i n und O. N e u g e b a u e r einen so schönen Einblick tun kann. Auch diese babylonische Sexagesimalrechnung war im wesentlichen eine r e i n e, wenn sie auch noch manche Unvollkommenheiten aufwies, wie das Fehlen der Kennzeichnung des absoluten Stellenwertes und in den älteren Texten das Fehlen der Null. Auch waren die Produktentafeln noch nicht zu einer Tafel mit zwei Eingängen nach Art der islamischen Sechzigertafel zusammengeschlossen. Von dieser reinen babylonischen Sexagesimalrechnung besaßen die Griechen und die Inder, soweit unsere Kenntnisse reichen, nur Trümmer. Die griechischen Astronomen schrieben, wie wir oben sahen, die Ganzen dekadisch und nur die Brüche sexagesimal. Die Multiplikationen, Divisionen und Quadratwurzelausziehungen, die wir bei Theon von Alexandrien vollzogen sehen, sind nicht r e i n sexagesimal durchgeführt. Die Sechzigertafel wurde nicht verwandt, und in den Sexagesimalstellen treten im Verlaufe der Rechnung dekadische Zahlen auf, die größer als 59 sind.

Es erhebt sich die Frage: War etwa die islamische reine Sexagesimalrechnung eine an die unreine Sexagesimalrechnung der Griechen anknüpfende Neuschöpfung der islamischen Mathematiker? Oder gehen von der babylonischen Mathematik aus auch Überlieferungen bis zur islamischen, die nicht über Alexandrien oder Indien laufen, sondern über Syrer und vorislamische Perser? Vieles spricht für die Richtigkeit der Vermutung, daß in der islamischen die babylonische Sexagesimalrechnung in dieser Weise weiterlebt, so der Umstand, daß auch bei der Algebra die Frage ähnlich liegt, so daß schon H a n k e l [1] (1839—1873) angesichts der Tatsache, daß der älteste uns überlieferte islamische Algebraiker al-Ḫwārizmī nach einer Tradition arbeitete und sich seine Algebra nicht restlos auf die griechische und die indische zurückführen läßt, keinen anderen Ausweg sah, als diese Tradition bei den Syrern und Persern vorauszusetzen. Wie viel mehr muß man, wie es auch z. B. G a n d z tut, dieser Vermutung h e u t e beistimmen, wo wir weiter zurückblicken können und bei den Babyloniern eine Algebra der quadratischen Gleichungen und eine reine Sexagesimalrechnung kennen!

In diesem Zusammenhange sei auch erwähnt, daß sich in einem für die Praxis des Geschäftsmanns und des Finanzbeamten abgefaßten Rechenbuch des obenerwähnten Abul-Wafāʾ für Zwecke der Bruchrechnung Tabellen wie die folgenden finden:

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$
30	20	15	12	10	6

$\frac{2}{3}$	40	$\frac{2}{3}$
$\frac{3}{4}$	45	$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$
$\frac{2}{5}$	24	$\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{10}$
⋮	⋮	⋮

2	30
3	20
4	15
⋮	⋮
7	$8\frac{4}{7}$
⋮	⋮

In der zweiten Tabelle durchläuft die Zahl der ersten Spalte alle echten, nicht kürzbaren Brüche mit den Nennern 3 bis 10, in der dritten von den Zahlen 2 bis 120 alle diejenigen, die keine anderen Primfaktoren als 2, 3, 5, 7 besitzen. Hier kann man nach dem historischen Zusammenhang mit den babylonischen Reziprokentafeln und den auch von den Griechen verwendeten ägyptischen Stammbruchsummen fragen. Wenn noch im 16. Jahrhundert der Astronom ʿAbdallaṭīf b. Ibrāhīm ad-Dimašqī neben anderen Tafeln für astronomische Rechnungen eine Tafel darbietet, in der den natürlichen Zahlen von 1 bis 60 in folgender Weise Bruchausdrücke gegenübergestellt sind:

$$\begin{array}{llllll} 1, & 2, & \ldots, 7, & \ldots, 43, & \ldots, 51, & \ldots, 60 \\ \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}, & \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}, & \ldots, \frac{1}{10}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{10}, & \ldots, \frac{2}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{10}, & \ldots, \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{10}, & \ldots, 1, \end{array}$$

und noch später geschriebene Sechzigertafeln über den 60 Kopfzahlen dieselben Bruchausdrücke angeben, so sehen wir hier späte Ausstrahlungen der altbabylonischen Reziprokentafeln und der altägyptischen Stammbruchrechnung.

Zu welcher Vollkommenheit die Technik der reinen Sexagesimalrechnung gelangte, zeigen die Werke des Ǧamšīd b. Masʿūd al-Kāšī, des bedeutendsten der Astronomen und Mathematiker, die im Anfang des 15. Jahrhunderts Uluġ Beg, der Gelehrte auf einem Herrscherthron, in Samarqand um sich sammelte. Aus einem hinreichend genauen Wert von sin 3° berechnete al-Kāšī sexagesimal nach einem überaus gewandten Verfahren (vgl. Hankel [1], S. 289—93) den Wert

$$\sin 1^\circ = 0.\ 1\ 2\ 49\ 43\ 11\ 14\ 44\ 16\ 26\ 17.$$

Der diesem Sexagesimalbruch entsprechende, von al-Kāšī nicht angegebene Dezimalbruch

$$\sin 1^\circ = 0.01745\ 24064\ 37283\ 51$$

ist in allen 17 Dezimalstellen richtig.

Al-Kāšī gab auch eine sexagesimale Berechnung der Zahl π in einer Genauigkeit, die alles bisher Dagewesene weit übertraf und im Abendlande, wo man nach al-Kāšīs Zeiten noch viel Falsches über Wesen und Wert der Zahl π vorgebracht hat, erst durch Ludolf van Ceulen (1540—1610) überboten wurde. Der Perser fand die in allen angegebenen Stellen richtige Sexagesimalzahl

$$2\,\pi = 6.16\ 59\ 28\ 1\ 34\ 51\ 46\ 14\ 50.$$

Die Verwandlung in eine Dezimalzahl ergibt

$$2\,\pi = 6.28318\ 53071\ 79586\ 5.$$

Zu dieser genauen Berechnung gelangt al-Kāšī, indem er nach einem elementargeometrischen Verfahren, das sich trigonometrisch als 28mal wiederholte Anwendung einer Halbwinkelformel deuten läßt, den Umfang eines dem Kreise einbeschriebenen regelmäßigen Vielecks von $3 \cdot 2^{28} = 800\,335\,168$ Seiten und hieraus denjenigen eines ebensolchen umbeschriebenen Vielecks ausrechnet. Vom gleichseitigen Dreieck ausgehend, erreicht er sein Ziel schrittweise unter fortwährender Verdoppelung der Seitenzahl. In den sehr übersichtlichen Tabellenrechnungen ist jede sexagesimale Quadratwurzelausziehung durch Quadrierung des Ergebnisses kontrolliert. Anwendung der 59er Probe, die das Gegenstück der Neunerprobe des dekadischen Rechnens ist, begleitet einzelne Schritte der Rechnung. Durch Genauigkeitsbetrachtungen werden aus der verlangten Genauigkeit des Endergebnisses die für die Zwischenrechnungen erforderlichen Stellenzahlen bestimmt.

Die reine Sexagesimalrechnung fand Eingang ins Abendland. Um nur gedruckte Werke zu nennen, so begegnet uns die Sechzigertafel z. B. bei Orontius Finaeus (1494 bis 1555). Caspar Peucer kennt in seiner 1556 erschienenen »Logistica astronomica« die ganzen Sexagesimalzahlen *sexagena prima, secunda* usw. und beschreibt ausführlich Einrichtung und Herstellung der Sechzigertafel. So rühmt auch John Chambers in seiner 1600 erschienenen Druckausgabe der Logistik Barlaams die reine Sexagesimalrechnung und erklärt das Rechnen mit der Sechzigertafel für bedeutend bequemer als die Sexagesimalrechnungen Theons von Alexandrien und Barlaams. Noch die Werke von John Wallis enthalten die Sechzigertafel. Und bis tief in die Neuzeit hinein, als das Abendland längst mit gedruckten Logarithmentafeln rechnete, sehen wir im Morgenland die Berechner der Gebetszeiten ihre sphärisch-trigonometrischen Rechnungen sexagesimal mit Hilfe handgeschriebener Sechzigertafeln vollziehen.

Abgesehen von Fr. Woepcke (1826—64), dem bedeutendsten Förderer unserer Kenntnisse über die islamische Mathematik, der im Vorbeigehen bei Behandlung anderer Fragen die islamische reine Sexagesimalrechnung erwähnt, die er aus einer Schrift des Sibṭ al-Māridīnī kennenlernte, haben die neueren Mathematikhistoriker dieser Rechnungsweise der Astronomen des Mittelalters kaum Beachtung geschenkt.

Nach dem Muster der Sexagesimalbrüche erfand das Abendland bekanntlich um 1600 die Dezimalbrüche, und vor allem war es der Flame Simon Stevin, der das Rechnen mit ihnen systematisch behandelte. Als er seine Schrift »De Thiende« verfaßte, ahnte er nicht, daß ihm etwa 160 Jahre früher al-Kāšī im fernen Ṣamarqand zuvorgekommen war. In seinem vor 1427 erschienenen »Lehrbrief über den Kreisumfang« kommt dieser Perser nach Berechnung des oben angegebenen Sexagesimalbruchs für $2\,\pi$ auf den Gedanken, das Ergebnis auch für Leute nutzbar zu machen, die nicht wie die Astronomen seiner Zeit mit Sexagesimalbrüchen umgehen konnten. Und so verwandelt er diesen Sexagesimalbruch in den von uns oben angegebenen, im Positionssystem geschriebenen Dezimalbruch. Die Dezimalstellen bezeichnet er als »Zehntel«, »Dezimalsekunden«, »Dezimalterzien« usw. An Beispielen zeigt er, wie man im dekadischen Positionssystem zum gegebenen Durchmesser eines Kreises dessen Umfang und zu einem gegebenen Umfang den Durchmesser berechnen kann, und lehrt damit systematisch die Multiplikation und Division von Zahlen, die sich aus Ganzen und Dezimalbruchstellen zusammensetzen. In seinem 1427 erschienenen »Schlüssel des Rechnens« kommt er auf das Rechnen mit den Dezimalbrüchen zurück, als deren Erfinder er sich betrachtet, und die er auch als solche (*al-kusūr al-aʿšārīya*) bezeichnet. Er lehrt unter anderem systematisch die Verwandlung von ganzen und gebrochenen Sexagesimalzahlen in ganze dekadische Zahlen und Dezimalbrüche und die umgekehrte Verwandlung, und in geometrischen Aufgaben berechnet er gesuchte Strecken in dekadischen Ganzen mit Dezimalbruchstellen. Wie bei den Sexagesimalbrüchen, so macht er auch bei den Dezimalbrüchen von der abgekürzten Rechnung (Weglassung der Stellen unterhalb einer hinreichend niedrig gewählten) Gebrauch. Den Stellenwert der Ziffern kennzeichnet er in tabellarischen Rechnungen entsprechend seinem Verfahren in sexagesimalen Tabellenrechnungen meist dadurch, daß er die Benennung der Stelle (»Zehner«, »Einer«, »Zehntel«, »Dezimalsekunden« usw.) über die betreffende Spalte schreib Die Ganzen trennt er in diesen tabellarischen Rechnungen von den Bruchstellen oft durch einen längeren Strich, wobei er über die Stellen der Ganzen schreibt: »die Ganzen« und über die Dezimalbruchstellen: »die Brüche«. Gelegentlich sind auch die Ziffern der Ganzen schwarz und die Ziffern der Dezimalstellen rot geschrieben.

Bekanntlich finden wir z. B. bei an-Nasawī (um 1000) eine Quadratwurzel wie $\sqrt{26}$ genauer dadurch bestimmt, daß man z. B. $\frac{\sqrt{260\,000}}{100}$ näherungsweise ausrechnet, also tatsächlich zwei Dezimalbruchstellen bestimmt. Aber die Näherungslösung $\frac{509}{100}$ wurde dann nicht mit Dezimalbruch angegeben, sondern in Ganze mit Sexagesimalbruchstellen *5.5 24* durch sexagesimale Ausführung der Division 509 : 100 umgerechnet.

Etwa 70 Jahre vor al-Kāšī finden wir bei Immanuel Bonfils aus Tarrascon den Gedanken der Dezimalbrüche klar ausgesprochen [2]. Auch Bonfils gibt Benennungen der Dezimalbruchstellen und Regeln zur Bestimmung des Stellenwertes des Produktes und des Quotienten zweier ganzer oder gebrochener Dezimalstellen aus den Stellenwerten der Faktoren bzw. des Dividenden und Divisors. Aber aus den kurzen Ausführungen der vorliegenden hebräischen Handschrift ist nicht zu ersehen, ob Bonfils den Gedanken praktisch im Positionssystem durchgeführt hat. Bis auf weiteres müssen wir also den Perser al-Kāšī als den ersten ansehen, der das Rechnen mit Dezimalbrüchen nicht nur theoretisch begründet, sondern auch an Beispielen mit im Positionssystem geschriebenen Zahlen praktisch gelehrt hat. Die hebräischen Schriften des Bonfils werden al-Kāšī sicherlich nicht zu Gesicht gekommen sein.

Wenn wir den Begriff Algebra im Sinne des Elementarunterrichts dahin auslegen, daß damit das Rechnen mit allgemeinen, bekannten oder unbekannten Größen gemeint ist, die wir heute durch Buchstaben bezeichnen, und ferner die Auflösung von Gleichungen $g(x) = 0$, deren linke Seite ein Polynom $g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0$ ist, so muß man sich zunächst vergegenwärtigen, mit welchen großen äußeren Schwierigkeiten die islamische Algebra zu kämpfen hatte, da sie an Stelle der Buchstabensymbolik eine schwerfällige Wortsymbolik besaß und mit Symbolen wie »Ding« für x, »Vermögen« für x^2, »Quadratokubus« für x^5, »Zahl der Kuben« für den Koeffizienten a_3 eines Gliedes $a_3 x^3$ arbeitete. Die elementaren Rechnungen mit solchen allgemeinen Größen, z. B. die Ausrechnung eines Produktes wie $(a_0 + a_1 + a_2)(b_0 + b_1)$, wo in jeder der beiden algebraischen Summen auch negative Zeichen vorkommen konnten, wurden richtig vollzogen.

In al-Kāšīs »Schlüssel« finden wir Fachausdrücke für die Potenz a^n, ihre Basis a und ihren Exponenten n, wobei a eine als bekannt angenommene oder eine unbekannte und n eine natürliche Zahl ist. Al-Kāšī und andere vor ihm setzen aber auch die Folge der Potenzen nach der anderen Seite fort, indem sie, wie schon Diophant, $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a^2}$, ... bilden, also das, was wir heute als Potenzen mit negativen Exponenten a^{-1}, a^{-2}, ... definieren. Was aber wichtiger ist, al-Kāšī schaltet zwischen die »Kette des Aufsteigens« a, a^2, a^3, ... und die »Kette des Absteigens« ..., $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{a}$ die 1 ein und faßt diese richtig als die Potenz von a mit dem Exponenten 0 auf. Er formuliert die Regeln für die Multiplikation und Division zweier Potenzen mit gleicher Basis für die Fälle, daß diese Potenzen beide der aufsteigenden oder beide der absteigenden Kette oder verschiedenen Ketten angehören. In seinen Regeln stecken die Formeln

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}, \quad a^m : a^n = a^{m-n}$$

für die Fälle, in denen m und n beliebige positive oder negative ganze Zahlen oder Null bedeuten. Für die Ausführung solcher Multiplikationen und Divisionen bietet al-Kāšī eine Tabelle mit zwei Eingängen dar, aus der man z. B. entnehmen kann, daß die Division des Quadrats a^2 durch die Reziproke des Kubus $\frac{1}{a^3} = a^{-3}$ den Quadratokubus a^5 ergibt. Diese Regeln der Potenzrechnung nimmt er nicht als sein geistiges Eigentum in Anspruch. Sie waren für den Sonderfall $a = 60$ schon in den Tabellen für den Stellenwert des Produktes und des Quotienten zweier Sexagesimalstellen enthalten, Tabellen, die uns seit Kūšyār in den Lehrbüchern der reinen Sexagesimalrechnung begegnen. Wahrscheinlich wurden sie auch schon vor al-Kāšī für eine beliebige Basis formuliert. Wenn Bonfils diese Regeln auf die Basis 10 anwendet, so kann ich hierin nicht, wie Gandz es tut, einen Fortschritt in der Potenzrechnung sehen. Daß schon die griechische Mathematik solche Regeln in anderer Form besaß, ist bekannt, aber es kommt hier auf ihre algebraische Formulierung an. Es ist nicht richtig, daß, wie Tropfke in seiner so wertvollen Geschichte der Elementarmathematik meint, der Potenzbegriff bis zum ausgehenden sechzehnten Jahrhundert auf die Unbekannte beschränkt blieb, und daß erst das Abendland den klaren Begriff des Exponenten geschaffen habe. Al-Kāšī entwickelt seine Potenzlehre im »Schlüssel« ausdrücklich für bekannte und für unbekannte Grundzahlen. Auch gibt er dort eine Rechenvorschrift, um allgemein aus der altertümlichen Bezeichnung, wie »Quadratoquadratokubus« den Exponenten, hier 2 + 2 + 3 = 7, zu berechnen, und umgekehrt aus einem beliebigen ganzen positiven Exponenten die Bezeichnung der Potenz.

Was die Auflösung algebraischer Gleichungen betrifft, so sind die islamischen Algebraiker hinsichtlich der formalen Lösungen nicht über die quadratischen und solche Gleichungen höheren Grades hinausgelangt, die sich auf quadratische zurückführen lassen. Es fehlte aber, wie wir noch sehen werden, nur ein kleiner Schritt bis zur Lösung kubischer Gleichungen durch die sogenannte Cardanische Formel. Dagegen wurden numerisch einzelne, nicht auf lauter Quadratwurzeln zurückführbare Gleichungen mit großer Genauigkeit gelöst. Wie noch heute in sehr vielen Fällen, so löste man auch im Mittelalter eine Gleichung

$$g(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x = q,$$

wo a_n, ..., a_1, q gegebene Zahlen sind, in der Weise, daß man zunächst eine Näherungslösung $x = a$ etwa durch Probieren ansetzte. War dann $g(a) < q$, so wurde a durch Hinzufügung einer Korrektur b, die man sich ebenfalls rein versuchsweise angenommen denken kann, die aber auch methodisch bestimmbar ist, derart verbessert, daß $g(a + b)$ dem Werte q näher kam, als $g(a)$. Dieses Verfahren wurde fortgesetzt und führte bei richtiger Handhabung zu einer beliebig genauen Lösung der vorgelegten Gleichung. Wenden wir diese Methode zunächst auf die reinen Gleichungen $x^n = q$, also auf die Wurzelausziehungen an, so mußte man also ein Verfahren besitzen, um nach Ansetzen der ersten Näherungslösung a und der Korrektur b den Ausdruck

$$g(a + b) = (a + b)^n$$

auszurechnen.

Der hervorragende Astronom und Mathematiker ʿOmar Ḫaiyāmī, der 1123 starb, und von dem nicht ganz sicher ist, ob er auch der Dichter der unter seinem Namen gehenden, zwischen tiefsinniger Mystik und frivolem Atheismus schwankenden persischen Vierzeiler ist, erklärt in seiner »Algebra«, er habe in einer besonderen Schrift, die uns leider nicht erhalten ist, in Erweiterung der indischen Methoden der Quadrat- und Kubikwurzelausziehung ein arithmetisches Verfahren zur Ausziehung von Wurzeln beliebigen Grades entwickelt. Da das indische wie das islamische Verfahren für Quadrat- und Kubikwurzeln ein Verfahren der sukzessiven Approximationen der vorhin gekennzeichneten, noch heute in unseren Schulen gelehrten Art ist, so vermuteten unsere Mathematikhistoriker und nahmen es schließlich, wie Tropfke, als sicher an, daß ʿOmar den obigen Ausdruck $(a + b)^n$ für beliebige ganze positive Werte von n nach dem binomischen Lehrsatz entwickeln konnte und auf diese Entwicklung seine Wurzelausziehungen gründete.

Hierbei übersah man, daß die Entwicklung einer Potenz $(a + b)^n$, ja allgemeiner einer ganzen rationalen Funktion n-ten Grades $g(a + b)$, nach Potenzen von b für eine beliebig gegebene natürliche Zahl n auch ohne Kenntnis des binomischen Lehrsatzes möglich ist, und zwar nach einem geschickten elementaren Verfahren aufeinanderfolgender Multiplikationen und Additionen, das unter dem Namen »Hornersches Schema« bekannt ist, weil der Brite W. G. Horner es 1819 veröffentlichte. Schon 1804 hatte aber der Italiener P. Ruffini dasselbe Schema, das sich in der angewandten Mathematik als sehr vorteilhaft erweist, bekanntgegeben. Beide benutzten das Schema zur Auflösung algebraischer Gleichungen in der oben skizzierten Art der sukzessiven Approximationen. Nach dieser Ruffini-Hornerschen Methode lösten aber schon im Mittelalter die Chinesen algebraische Gleichungen von höherem als dem zweiten Grad. Nachdem im vorigen Jahrhundert in Europa das Vorkommen dieser Methode in der chinesischen Mathematik der Zeit um 1300 n. Chr. bekannt wurde, wies neuerdings (1940) der Japaner M. Fujiwara [3] Ansätze zu ihr in der chinesischen Mathematik einer noch früheren Zeit nach. Es wäre zu begrüßen, wenn die von Fujiwara in japanischer Sprache veröffentlichten Untersuchungen in einer abendländischen Sprache zugänglich gemacht würden. Berichte über sie findet man im Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 66_1 (1940), S. 12—13, und im Zentralblatt für Mathematik 23 (1941), S. 195.

Um zu entscheiden, ob die islamischen Wurzelausziehungen nach dem Ruffini-Hornerschen Verfahren oder nach dem binomischen Lehrsatz vollzogen wurden, eignet sich die Untersuchung der Quadratwurzelausziehungen nicht, da hier die charakteristischen Unterschiede der beiden Methoden nicht genügend zutage treten. Soweit ich sehe, haben die abendländischen Mathematikhistoriker bisher nur in einem einzigen arabischen Rechenbuch die Ausziehung von Wurzeln höheren als zweiten Grades studiert, nämlich bei an-Nasawī (Anfang des 11. Jahrhunderts). Außer bei an-Nasawī untersuchte ich nun diesen Gegenstand bei folgenden vier Mathematikern: Kūšyār b. Labbān (Ende des 10. Jahrhunderts), Amīnaddīn al-Abahrī (starb 1333), Ibn al-Hāʾim (starb 1412), al-Kāšī (»Schlüssel des Rechnens« 1427). Al-Kāšī zieht Wurzeln beliebig hohen

Grades aus, die vier älteren Autoren höchstens Kubikwurzeln. Die ältesten drei der fünf Gelehrten rechnen auf der Staubtafel nur nach dem Ruffini-Hornerschen Schema, das auf der Staubtafel in einer anderen äußeren Form erscheint, als beim modernen Rechnen mit der Feder. Al-Abahrī teilt aber mit, daß die hierbei gebildeten Koeffizienten die Ausdrücke a^3, $3a^2$, $3a$ sind. Ibn al-Hā'im stellt die Kubikwurzelausziehung rein auf Grund der binomischen Formel für $(a+b)^3$ dar. Al-Kāšī, der mit der Feder rechnet, befolgt sowohl dekadisch als auch sexagesimal das Ruffini-Hornersche Verfahren, leitet aber zusätzlich aus dem Ruffini-Hornerschen Schema den binomischen Lehrsatz für beliebige ganze positive Exponenten n und das Pascalsche Dreieck der Koeffizienten ab, ohne diese Weiterführung als eigene Leistung in Anspruch zu nehmen [4]. Es ist also möglich, aber nicht sicher, daß schon ʿOmar Ḫaiyāmī den binomischen Lehrsatz für beliebige natürliche Zahlen n als Exponenten besaß; bei al-Karaǧī (Anfang des 11. Jahrhunderts) finde ich ihn für $n = 3$ und $n = 4$ in anderem Zusammenhang angewandt. Aber man gewinnt den Eindruck, daß das Ruffini-Hornersche Verfahren die ältere Methode ist, aus der der binomische Lehrsatz erst hervorwuchs. Das Ruffini-Hornersche Verfahren ist hiermit erstmalig für die islamische Mathematik nachgewiesen. Der um die Erforschung dieses Gebietes hochverdiente H. Suter (1848—1922) bemerkte bei der Untersuchung der Kubikwurzelausziehung an-Nasawīs nicht, daß diese Methode hier vorliegt.

Ibn al-Hā'im gibt übrigens auch an, wie man Kubikwurzeln auf Grund der Zerlegung des Radikanden in Primfaktoren ausziehen kann, ferner auf Grund der Formeln für die Summen der Quadrate der aufeinanderfolgenden geraden und ungeraden Zahlen.

Die Vermutung liegt nahe, daß die islamischen Mathematiker wie die Chinesen das Ruffini-Hornersche Verfahren auch zur numerischen Lösung gemischter algebraischer Gleichungen von höherem als dem zweiten Grade verwandten. Nachgewiesen ist dies aber bisher nicht. Al-Bīrūnī gibt sehr genaue sexagesimale Lösungen der Gleichungen $1+3x = x^3$ und $x^3+1 = 3x$ an und sagt, diese Lösungen seien nur durch Probieren (*istiqrā'*) zu finden. Es kann bloß ein systematisches Näherungsverfahren gemeint sein. Leonardo Pisano (Anfang des 13. Jahrhunderts), der sein mathematisches Wissen islamischen Lehrern und Büchern verdankt, besitzt eine sehr genaue sexagesimale Lösung der Gleichung $x^3+2x^2+10x = 20$. Die schon erwähnte äußerst genaue sexagesimale Lösung einer kubischen Gleichung für sin 1° durch al-Kāšī beruht auf einem vom Ruffini-Hornerschen Verfahren verschiedenen Iterationsverfahren.

Wie gliedern sich die mathematischen Leistungen der sogenannten Araber, die überwiegend islamische Perser waren, in die Gesamtgeschichte der mathematischen Wissenschaften ein, die sich über Jahrtausende erstreckt? Es will schon viel sagen, daß die islamischen Gelehrten, bei denen sich das mathematische Gut verschiedener Völker, der Griechen, der Inder und schließlich auch der Ägypter und Babylonier sammelte, diese Wissenschätze pflegten und an das Abendland weitergaben, das zunächst in dunkler Unwissenheit lebte. Aber sie haben dieses Gut auch beträchtlich vermehrt, und es ist nur zu bedauern, daß so manche ihrer Leistungen, wie z. B. diejenigen al-Kāšīs, dem Westen unbekannt blieben. Im Vergleich zu dem Gewaltigen, was später das Abendland auf diesem Gebiet leistete, mögen die astronomischen und mathematischen Fortschritte der islamischen Gelehrten freilich bescheiden erscheinen. Wichtig ist uns aber die Frage, mit welcher Seele sie die Geistesgüter aufnahmen, verarbeiteten und weiterbildeten. Drangen sie in die Tiefe griechischen mathematischen Denkens ein? In welchem Geist und in welcher Richtung vermehrten sie die griechischen Wissensschätze und diejenigen, welche ihnen aus dem Orient zuflossen? Vollzogen sie eine Fusion?

Es verdient darauf hingewiesen zu werden, daß ein Mann wie al-Bīrūnī einen anderen Gelehrten zur Abfassung einer uns leider nicht erhaltenen Schrift über die Frage anregte, ob die Erde ruhe oder sich bewege, und daß verschiedene Mathematiker sich um den Beweis des Euklidischen Parallelenpostulates bemühten. Die islamischen Astronomen, an ihrer Spitze Abul-Wafā', schufen erst die eigentliche sphärische Trigonometrie, indem sie an die Stelle der griechischen Rechnungen mit den Sehnen von Bögen des vollständigen sphärischen Vierseits solche mit den Sinussen von Seiten und Winkeln des sphärischen Dreiecks setzten.

Die klassische griechische Mathematik bietet einen großen Teil der mathematischen Wahrheiten in geometrischer Form dar, so z. B. die Auflösung der quadratischen Gleichungen. Erst bei einem Heron und einem Diophant begegnen uns die entsprechenden rechnerischen Lösungen. Es ist eine wesentliche Leistung der islamischen Mathematiker und kennzeichnend für den Geist, in dem sie Mathematik trieben, daß sie die Arithmetisierung und Algebraisierung der Mathematik, die Abstreifung des geometrischen Gewandes, auf ihre Fahne schrieben. Hier liegt ein Prozeß vor, der sich durch Mittelalter und Neuzeit hinzieht und auch jetzt noch nicht zum Abschluß gekommen ist, besonders wenn wir an seine Fortsetzung durch symbolisch-rechnerische Behandlung geometrischer Beziehungen und an den Logikkalkül denken. Aufgaben, die von den Griechen geometrisch formuliert und gelöst wurden, wie die Zehnteilung des Kreises, die Teilung des Kugelinhalts durch eine Ebene nach einem vorgeschriebenen Verhältnis und die Dreiteilung eines gegebenen Winkels brachten die Fortgeschrittensten unter den islamischen Mathematikern auf die Form algebraischer Gleichungen, und diese Gleichungen lösten sie numerisch.

Wie schon oben angedeutet wurde, tritt in der ältesten arabischen Algebra eine Tradition zutage, die keineswegs allein und direkt an die Griechen und Inder anknüpft. Noch Ṯābit b. Qurra, der 901 starb, stellt die rechnenden »Algebraleute«, die ersichtlich jene alte, bei al-Ḫwārizmī in Erscheinung tretende Tradition weiterführen, denjenigen gegenüber, die das Bedürfnis nach geometrischen Beweisen auf Grund der Euklidischen Elemente haben [5]. Er selbst rechnet sich zu der letzteren Gruppe. Jene Tradition der »Algebraleute« muß zuletzt auch auf die babylonische Mathematik zurückgehen, ebenso wie die islamische reine Sexagesimalrechnung. Es ist das Verdienst der islamischen Mathematiker, diese orientalische, arithmetisch-algebraische Komponente in der Mathematik zur Entfaltung und zur Vorherrschaft gebracht zu haben. Um kein einseitiges Bild zu entwerfen, erinnern wir daran, daß auch in der griechischen Mathematik und Philosophie die reine Zahl eine maßgebende Rolle spielt, und daß auch neupythagoreische und neuplatonische Zahlentheorie und Zahlenphilosophie auf die islamische Mathematik einwirkten. Die Frage, warum sich die klassische griechische Mathematik so geometrisch gibt, kann hier nicht erörtert werden.

Während noch bei Ṯābit die Auflösungsformeln der quadratischen Gleichungen erst durch Zurückführung auf euklidische geometrische Lehrsätze sozusagen ihre Weihe und Seinsberechtigung erhalten, beweist der im Anfang des 11. Jahrhunderts lebende al-Karaǧī in einer besonderen Schrift: »Die Gründe des Rechnens der Algebra, ihre Erklärung und der Beweis dazu« dieselben Auflösungsformeln rein algebraisch. Dieser al-Karaǧī, den man in unseren mathematikhistorischen Werken infolge falscher Lesung als »al-Karḫī« bezeichnet findet, hat aber auch in einer großen, bisher unbeachteten Schrift, auf die Levi Della Vida aufmerksam machte [6], und die den Titel »Das Wunderbare über das Rechnen« führt, bewußt den umfassenden Versuch unternommen, größere Teile der Mathematik rein arithmetisch-algebraisch zu behandeln. Durch Zahl und Rechnung, ohne die Anschauung geometrischer Figuren, soll das Ziel erreicht werden.

Ein wichtiger Abschnitt in diesem Werk ist die rein arithmetisch-algebraische Darstellung der griechischen Irrationalenlehre, die Euklid im 10. Buch der Elemente in geometrischem Gewande aufbaut. Al-Karağīs Behandlung gipfelt im Ausspruch der Formel

$$\sqrt{A \pm B} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B^2}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B^2}}{2}},$$

in der A und B Quadratwurzeln aus rationalen Zahlen bedeuten. Diese Formel, in der nach einem mit einem Körnchen Salz zu nehmenden Ausspruch von Chasles die ganze Irrationalenlehre des zehnten Buchs der Elemente beschlossen ist, hat man bisher bei den Indern erst mehr als ein Jahrhundert nach al-Karagi nachgewiesen. Darüber hinausgehend sprengt aber dieser Perser den engen Rahmen der griechischen, nur die Quadratwurzeln und die aus solchen zusammengesetzten Ausdrücke umfassenden Irrationalenlehre, indem er Wurzeln beliebigen Grades und aus solchen zusammengesetzte Ausdrücke in den Bereich der Irrationalen aufnimmt. Er fordert den Leser wiederholt auf, selbst zusammengesetzte Irrationalen dieser Art zu bilden. Gelegentlich beobachten wir auch, wie er zu einer angesetzten Irrationalen die algebraische Gleichung aufsucht, der sie genügt. Hätte al-Karağī Nachfolger gefunden, die in diesem Geiste weitergearbeitet hätten, so hätte leicht einer auf den Gedanken kommen können, in der rechten Seite der soeben mitgeteilten Formel die beiden großen Quadratwurzeln durch Kubikwurzeln zu ersetzen. Dann hätte sich ein Ausdruck ergeben, der wesentlich mit der sogenannten Cardanischen Formel übereinstimmt, und durch Umrechnungen, die schon al-Karağī beherrschte, wie die Ausrechnung von $(a+b)^3$, hätte sich gezeigt, daß der Ausdruck die Lösung einer kubischen Gleichung ist. Erst die Italiener, die an die islamischen Algebraiker, und über Leonardo Pisano besonders auch an al-Karağī anknüpften, erkannten dies.

Für einen ganz wichtigen Punkt, in dem die Griechen erstmalig Unvergleichliches geleistet haben, zeigt al-Karağī kein Verständnis, und ebensowenig die meisten übrigen islamischen Mathematiker. Es ist die Rechenschaftsablegung über den Begriff des Irrationalen, die bei den Griechen in der grundlegenden Unterscheidung der »Zahl« von der »Größe« ihren Ausdruck fand. Der moderne Mathematiker muß bei einer Behandlung der Irrationalen als »Zahl« eine Definition der Irrationalzahl und den Beweis dafür verlangen, daß man mit ihr wie mit den rationalen Zahlen rechnen kann. Das fehlt bei al-Karağī, ja er gebraucht die von Euklid so sorgfältig voneinander geschiedenen Ausdrücke »Zahl« und »Größe« wild durcheinander. Erst der Neuzeit war es vorbehalten, im Geiste der griechischen Feinheit neue Formulierungen für die Grundlegung des Irrationalen zu finden.

Auch die Behandlung der quadratischen diophantischen Gleichungen, die al-Karağī über seine Darstellung dieses Gegenstandes in dem vorher verfaßten »Faḫrī« hinausführt, ist weit entfernt von der tiefen Erfassung, die dieser Gegenstand bei den Indern und in der Neuzeit fand.

In anderen Punkten aber finden wir wieder bei ihm einen weiten Blick. So versucht er die Quadratwurzelausziehung aus Polynomen, die Quadrate von anderen Polynomen sind, nach dem Muster der Quadratwurzelausziehung aus ganzen Quadratzahlen auszubilden und hat dabei hinsichtlich der Polynome mit lauter positiven Koeffizienten einen vollen Erfolg, während er bei Polynomen mit teilweise negativen Gliedern noch sehr schwerfällig vorgeht, weil er nicht zum vollen Begriff der negativen Zahl durchgedrungen ist. Bemerkenswert ist auch, daß er in einer ganzen rationalen Funktion von x dieses x (šai' = »Ding«) nicht nur als Unbekannte einer Gleichung, sondern auch als Variable auffaßt, insofern er darlegt, daß diese Funktion für verschiedene Werte von x verschiedene Werte annimmt. Wiederholt begegnet uns der mehr oder weniger geglückte Versuch, Klasseneinteilungen vorzunehmen, so bei seinen Irrationalen.

Literaturverzeichnis

[1] H. Hankel: Zur Geschichte der Mathematik. Leipzig 1874.

[2] S. Gandz: The invention of the decimal fractions and the application of the exponential calculus by Immanuel Bonfils of Tarrascon (c. 1350). Isis 25 (1936), 16—45.

[3] Tôhoku Math. J. 46 (1940), 295—308; 47 (1940), 35—48.

[4] P. Luckey: Die Ausziehung der n-ten Wurzel und der binomische Lehrsatz in der islamischen Mathematik. Math. Ann. 120 (1948), 217—274.

[5] P. Luckey: Tabit b. Qurra über den geometrischen Richtigkeitsnachweis der Auflösung der quadratischen Gleichungen. Ber. d. Math.-Phys. Kl. d. Sächs. Ak. d. Wiss. z. Leipzig, 93 (1941), 93—114.

[6] G. Levi Della Vida: Appunti e quesiti di storia letteraria araba. Rivista degli Studi Orientali 14 (1934), 249—283.

P. Luckey: Beiträge zur Erforschung der islamischen Mathematik. Erscheint demnächst in: Orientalia 17 (Rom 1948) oder im darauf folgenden Jahrgang.