HET VYFDE DEEL DESES BOECX,

Van constige trecken, bewesen eensdeels *Geometici,* ende door getallen, met andere besonder exempels, buyten ende door Coss, ende door de Tafel Sinus, Tangent en Secant ghesolveert,

Van dese hier ghetrocken vier linien gheteeckent met ABCD, wilmen maecken een vierhouck, sulcks soomen eenen Circkel daer om treckt, dat de vier houcken raecken den omloop.

DEse vrage heeft aen mijn ghesonden (voor ontrent 20 jaren,) eenen hervaren ende rechten Liefhebber deser const, ghenoemt *Meester Iohan Pouweltz.* welcke ick op dien tijt beantwoort hebbe met hulpe der regel Coss endc daer naer gevondē een generale maniere voor die welcke geen Coss verstaen, als volgt: lck neme dat viercant sal gemaeckt werden alsoo, dat de linien A ende C. Item, B en D tegen malcanderen over sullen ghetrocken werden.

Rcghel.

Divideert het ghetal der linie B door tgetal der linie D, comt in desen $\frac{4}{9}$, daer naer A door C (Verstaet de getallen) comt $\frac{2}{3}$, dese quotienten addeert, comt tsamen $1\frac{1}{9}$, daer naer multipliceert den eersten quotient met 6 (het ghetal der linie A) dat comende product divideert door 9, tot den comenden addeert de unitit, comt $1\frac{8}{27}$[1] met dese somma multipliceert de eerste somma, als $1\frac{1}{9}$, comt $\frac{350}{243}$. [p. 204]

Item, multipliceert A met C, ende B met D, addeert de producten, comt hier 198, dese divideert door de ghevonden $\frac{350}{243}$, uyt den quotient $\sqrt{}$, comt $\frac{24057}{175}$,[2] dit ghetal ghemultipliceert met $1\frac{8}{27}$, comt $\sqrt{231}$, soo lanck is de diagonael hier onder geteeckent met BD, vint nu een linie vande gemeene mate der linien, lanck zijnde $\sqrt{231}$, alsoo settet twee linien aen malcander, alsoo datse eene linie maken, welcker ghetallen tsamen ghemultipliceert, doen 231, als boven is getrocken een linie geteeckent met AB, lanck zijnde der ghemeene mate 11, ende BC doet 21, tusschen dese is ghetrocken de middelproportionael linie BD (als voor geleert,) maeckt nu eenen tryangel van deser ende den linien B ende C, treckt daer om eenen Circkel, ende beschrijvet daer in de ander linien, comt dat viercant ABCD, welck den begheeren ghenoech doet.

De oorsaecke van dien is de 15de des eersten ende 21ste des sesten boucx *Euc.* Om te vinden den Diameter des Circkels, treckt de perpendiculaer CF, ende den Diameter BE, ende noch een linie uyt den houck C in E. Dan hebt

[1] Drukfout: $1\frac{8}{9}$.
[2] Drukfout: $\frac{24077}{155}$.

ghy twee ghelijckformighe Tryangels, te weten, BCE ende CFD, souckt de perpendiculaer CF, comt $\sqrt{\frac{3335}{231}}$, als dese teghen CD 9, alsoo BC 8 tegen den Diameter BE,

comt $\sqrt{359\frac{239}{3335}}$. Dit is mijn slechte maniere.[3]

Den constigen Ionck-man *Cornelis Pietersz.* van Alckmaer, heeft mijn gheseyt ontrent voor vier jaren, dat hy tselve voor-gestelt, conde te weghe brengen Geometrici, welck hy nader hant metter daet ghetoont heeft door volghende generale Regel.

2.

Laet zijn de linien gheteeckent met ABCD in mijnen hier voorghestelden exempel. Om daer van een vierhouck te maken, welck in eenen winckel ghestelt, met syn houcken raecke den omloop, & c. Doet alsoo: Souckt een middel proportionael tusschen de linien A ende B, dese zij EF, noch tusschen C ende D, dese zij GE: van dese maect eenen rechten winckel, wiens hipothenusa is HE, noch souckt tusschen AD ende BC twee middel-proportionael linien, welcke zijn IE ende HE, welcker hipothenusa is IH. Item, souckt twee middel-proportionael linien tusschen A ende C, ende B, D, welcker hipothenusa is LM, noch souckt den vierden proportionael in deser reden, als HE teghen HI, alsoo LM teghen N. Ten laetsten, maeckt eenen Tryangel van dese ghevonden N, ende de twee linien gheteeckent met C ende D, ende treckt daer om eenen Circkel, in den selven teeckent de ander 2 linien A ende B, comt den quadrangel ABCD naert begheeren, als volgt: [p. 205]

Hier merct, so verde een linie gesocht wert in desen reden (te weten) als IH 180 teghen EH 210, also LM $\sqrt{198}$ teghen N $\sqrt{231}$, ende dan eenen Tryangel gemaeckt van deser, ende de linien B ende C, daer om eenen Circkel getrocken, sal mede den begeeren genoech doē. Ende hoe wel in desen den diagonael onghelijck is, nochtans sullen de Circkels ende quadrangels ghelijck zijn.[4]

[3]In de figuur moet $\sqrt{231}$ bij BD staan, niet bij CE. Verder staat in de figuur de drukfout $169\frac{5}{9}$ voor $169\frac{5}{7}$.

[4]In de figuur staat dezelfde drukfout als in de figuur voor prop. 1. N.B. in deze figuur staan de vier zijden van het koordenvierhoek in een andere volgorde. Een van de diagonalen blijft dan wel hetzelfde als voorheen. Dit is een voorbeeld van de stelling dat als een koordenvierhoek de zijden a, b, c, d in willekeurige volgorde staan, er toch maar drie diagonalen mogelijk zijn, namelijk $\sqrt{\frac{pq}{r}}$, $\sqrt{\frac{pr}{q}}$ en $\sqrt{\frac{qr}{p}}$ met $p = ab + cd, q = ac + bd, r = ad + bc$. Als p het product is van de niet-aanliggende zijden, dan zijn de diagonalen de

Door de 22ste des derden boucks Euclides, zijn de twee winckels der viercanten in Circkels beschreven (als boven) twee rechte winckels ghelijck, dit bedencken voor veel jaren heeft mijn grooten arbeyt ghecost om door d'een ende ander middelen Geometrici te vinden het voorgaende, maer niet uytghericht, welck ick bekenne.

Dese wetenschap ick vergheefs ghesocht, is ghevonden door den Hoochgheleerden ende Const-rijcken *Francisco Vieta*, Raetsheer vanden Coninck van Vranckrijck, ende Meester van de Requesten in s'Conincks Palleys, ende beschreven: mede ghedruckt tot Parijs, Anno 1595,[5] welcke maniere ick den duytschen Leser hier onder stellen sal, ende bewijsen op mijne slechte maniere

eerste twee uitdrukkingen. De eerste formule is de diagonaal die de verbinding is van de snijpunten van de segmenten waarvan de producten in q voorkomen. Voor a=6, b = 8, c = 9, d = 18 krijg je zo de drie mogelijkheden $\sqrt{231}$, $\sqrt{169\frac{5}{7}}$ en $\sqrt{190\frac{10}{11}}$.

[5]Het "bewijs" van Ludolf is een gemaltraiteerde versie van het (wel goede) bewijs in F. Vieta, *Pseudo-Mesolabum et alia quaedam adiuncta capitula*, Parijs 1595, herdruk in F. van Schooten, ed., *Francisci Vietae Opera Mathematica*, Leiden 1646, p. 275-283, zie de herdruk met voorwoord van J.E. Hofmann, Hildesheim-New York: Olms, 1970. Het idee van Vieta's constructie is als volgt (notaties als in het onderste deel van Ludolfs figuur op p. 206): We willen een vierhoek construeren met vier gegeven zijden $a = AD, b, c, d$ die ingeschreven kan worden in een cirkel. Veronderstel dat de vierhoek geconstrueerd is, met $AD = a, AB = b, BC = c, CD = d$, en stel dat BC en AD elkaar ontmoeten in punt I helemaal rechts in de figuur. Construeer dan de punten H en F op IB en IA sodat $IC = IF$ en $ID = IH$. Dan zijn de twee driehoeken IHF en ICD congruent, en daardoor is $HF = CD = d$.

Omdat de vierhoek concyclisch is, geldt nu $\angle BAD = 180^o - \angle BCD = \angle ICD = \angle HFD$, en dus zijn AB en FH evenwijdig. Trek nu FL evenwijdig aan BC en stel L is het snijpunt met AB. We gaan zien dat L geconstrueerd kan worden uitgaande van de punten A, D en de grootte van $a = AD, b, c, d$. Trek ook nog de hulplijn BE evenwijdig aan CF en HD, laat E het snijpunt zijn met AD. Nu zijn de driehoeken IBE, ICF en ICH gelijkbenig met dezelfde tophoek I.

Ten eerste is $BHFL$ een parallelogram, dus is $BL = FH = d$, zodat $AL = b - d$. Punt L ligt dus op een cirkel met middelpunt A en straal $b - d$. Deze cirkel is bekend.

Verder is, door het parallelogram $BHFL$ en de gelijkbenige driehoeken IBE en IHD, $FL = BH = ED$. We laten zien dat de punten E en F ook bekend zijn. Dit volgt uit $EF = BC = c$ (gelijkbenige driehoeken IBE en ICF) en het feit dat driehoeken BAE en HFD gelijkvormig zijn (de zijden zijn namelijk evenwijdig), zodat $EA : DF = BA : FH = b : d$. Verder is $EA + FD = a - c$. Dus is $EA = \frac{b}{b+d}(a - c)$ en $DF = \frac{d}{b+d}(a - c)$. Punt L ligt nu ook op een cirkel met middelpunt het bekende punt F en straal het bekende lijnstuk ED. Dus is punt L het snijpunt van twee bekende cirkels; het is dus een bekend punt.

Geometrici, ende door getallen. [p. 206]

De syden des vier houcks datmen begeert in eenen Circkel tc schrijven, laet zijn hier teghen ghetrocken ende gheteeckent met A B CD, men wil tselve viercant alsoo trecken dat A teghen C ende B teghen D, staet.

Doet alsoo.

Treckt de lini A gelijck AD, ende deelt de differentie tusschen A ende C in de proportie van B ende D als hier ghedaen, compt voor den cleynsten DF ende voor den grootsten deel AF, neempt de wijde van AF, ende teeckent deselve inde linie AD (van A) compt AE, ende den cleynsten deel van D valt in F.[6] Nu is AE ende FD tsamen de diffrentie tusschen A ende C ghelijck, ergo EF, is ghelijck C, lengert AD, ende laet zijn A een middel punt, ende haelt eenen halven Circkel, wiens halven Diameter sy ghelijck de diffrentie van B ende D: daer nae neempt de lengde van ED,[7] tusschen een passer ende settet den eenen voet in F, ende den anderen laet raecken den ommeloop,[8] compt FL ghelijck ED, treckt uyt A een rechte linie door den punt L, so lanck synde als B, daer naer treckt AB, LF, noch een parallel teghen LF, uyt B ghelijck den linie C, compt BC tenlesten treckt vant eynde C een rechte in D, compt CD, welcke ghelijck moet zijn de linie D, dan is gevonden dat viercant ABCD, welck het begeeren genoech doet.[9]

Bewijsinghe.

[6]De notatie is verwarrend. Om helderheid te scheppen splitsen we de figuur in drie delen. De vier verticale segmenten rechts boven, d.w.z. de vier gegeven lijnstukken A, B, C, D, vormen het eerste deel. Deze segmenten geven we in deze en de volgende voetnoten aan met kleine letters a, b, c, d. Gegeven is $a = 10, b = 8, c = 6, d = 4$. De driehoek met hoekpunten A, D en D linksboven vormen het tweede deel van de figuur. In onze voetnoten geven we de punten A, F, B in dit tweede deel aan met indices $_1$. Het bovenste punt D noteren we als D_1, en het rechtse punt D als D_2. Ludolf gebruikt dit tweede deel van de figuur om $a-c$ in de verhouding $b : d$ te verdelen. Hij stelt $A_1D_1 = a-c$, $A_1B_1 = b$, $B_1D_2 = d$, de hoek tussen AD_1 en AD_2 is willekeurig. Hij trekt dan D_1D_2 en vervolgens door het gegeven punt B_1 een lijn evenwijdig aan D_1D_2 die AD_1 snijdt in F_1. Dan is $A_1F_1 = \frac{b}{b+d} \cdot (a - c) = \frac{8}{3}$ en $F_1D_1 = \frac{d}{b+d} \cdot (a - c) = \frac{4}{3}$.

In deze en volgende voetnoten geven we de punten in het resterende deel van de figuur (met de cirkel) aan met indices $_3$. Ludolf stelt $A_3D_3 = a$ en kiest dan F_3 en E_3 op AD zodat $A_3E_3 = A_1F_1 = \frac{b}{b+d} \cdot (a - c)$ en $D_3F_3 = D_1F_1 = \frac{d}{b+d} \cdot (a - c)$. Als gevolg van deze definities is $E_3F_3 = c$.

[7]Drukfout: FD.

[8]Dit betekent dat punt L_3 ligt op de cirkel met middelpunt A_3 en straal $b - d$, maar in het algemeen niet dat F_3L_3 deze cirkel raakt, zoals in de figuur wel het geval is.

[9]Nadat hij L_3 gevonden heeft vindt hij B_3 op het verlengde van A_3L_3 zodat $A_3B_3 = b$.

Lenghert de syden BC ende AD tot datse tsamen loopen in I,[10] noch treckt uyt F een linie even wijdich AB, als FH ghelijck-wijdich LB,[11] ende treckt de perpendicularen LN, KO, BM, CP,[12] dan is de figuer bereydet om Geometrici, ende door ghetallen alles te bewijsen, also, aenghesien de parallel-linien BH ende LF, noch BL ende FH.[13] Item KF, ende BC[14] mede FC ende BK, zijn de linien BH ende LF gelijck, mede FH ghelijck BL. Item BC ghelijck KF mede BC ghelijck KA[15] doorde 33ste des eersten *Eucl.* Nu is BC ghelijck EF daerom KF, ghelijck EF, ende den Tryangel EKF gelijckwijdich ende gelijckformich den Tryangels EBI CFI HDI. Item de Tryangels DHF ende DHC zijn ghelijck door de 37ste des eersten *Eucl.* Tot elck ghedaen den Tryanghel DHI, comen de Triangels FHI, DCI ghelijck. [p. 207]

Itcm, den Tryangel FHI is gelijckformich den Triangel ABI, so moet mede den selven Tryangel ghelijckformich zijn den Tryangel DCI nu doen de winckels DCI ende BCD tsamen twee rechte winckels, dewijle nu boven bewesen is, dat den winckel DCI ghelijck is den winckel A moet volghen dat de winckels teghens malcander over staende A ende BCD soo groot tsamen zijn als 2 rechte winckels, hier vooren is bewesen dat alle voorsydighe[16] figueren doen 4 rechte winckels (verstaet haer houcken) daerom de winckels ABC ende ADC tsaemen 2 rechte winckels maecken, door dese ende de 22ste propositie des 3de *euc.* is hct viercandt ABCD also bereydet dat daerom een Circkel can ghetrocken werden, wiense omloop alle hoecken raeckt.[17]

Daarna construeert hij segment $B_3C_3 = c$ evenwijdig aan L_3F_3, en tenslotte verbindt hij C_3 met D_3. Hij moet in het bewijs hieronder laten zien dat $C_3D_3 = d$ en dat de vier punten A_3, B_3, C_3 en D_3 op één cirkel liggen.

[10] Deze letter moet helemaal rechts in de figuur worden toegevoegd.

[11] Drukfout: EB. Het woord ghelijkwijdich betekent: even lang als. Dus $F_3H_3 = L_3B_3$. Het punt K_3 wordt niet gedefinieerd in de tekst en het komt in de figuur niet voor, maar blijkt het snijpunt van B_3E_3 en L_3F_3 te zijn.

[12] Drukfout: BMCP.

[13] D.w.z. omdat B_3H_3 en L_3F_3 evenwijdig en even lang zijn, zijn B_3L_3 en H_3F_3 dat ook.

[14] Ludolf heeft niet bewezen dat K_3F_3 en B_3C_3 even lang zijn. Hier zit dus een gat in zijn bewijs. Ik laat het verder achterwege de verdere gaten aan te wijzen.

[15] de tekst is onjuist en voor mij niet gemakkelijk te verbeteren. De stelling zegt dat twee evenwijdige en even lange segmenten een parallelogram vormen.

[16] Vermoedelijk moet dit viersydighe zijn.

[17] Om typografische redenen geef ik nu eerst de kolom met segmenten aan de rechterkant van p. 207 weer als een gewone lijst, met gelijktekens en kommas toegevoegd. Een asterisk wil zeggen dat ik de waarde nagerekend heb.

$AE = 2\frac{2}{3}*$,
$FD = 1\frac{1}{3}*$,
$AF = 8\frac{2}{3}*$,
FL[18] $= 7\frac{1}{3}*$,
$DE = 7\frac{1}{3}*$,
$AL = 4*$,
$AN = 2\frac{2}{13}*$,
$NF = 6\frac{20}{39}*$,
$LN = \sqrt{11\frac{61}{169}*}$,
$BM = \sqrt{45\frac{75}{169}*}$,
$AM = 4\frac{4}{13}*$,
$MD = 5\frac{9}{13}*$,
$BD = \sqrt{77\frac{11}{13}*}$,
$OF = 5\frac{47}{143}*$,
$FE = 6*$,
$EO = \frac{96}{143}*$,
$EM = 1\frac{25}{39}*$,
$KE = \sqrt{8\frac{8}{143}*}$,
$KO = \sqrt{7\frac{12377}{20449}*}$,
$EB = \sqrt{48\frac{16}{117}*}$,
KB[19] $= \sqrt{16\frac{80}{99}*}$,
$FP = \frac{32}{33}*$,
$PD = \frac{4}{11}*$,
$CP = \sqrt{15\frac{105}{121}*}$,
$AP = 9\frac{7}{11}*$,
$AC = \sqrt{108\frac{8}{11}*}$,
$BI = 14\frac{2}{3}*$,
$CI = 8\frac{2}{3}*$,
$MF = 4\frac{14}{39}*$,
$FI = 8\frac{2}{3}*$,
HI ende DI
Doet elck $7\frac{1}{3}*$.

[18] Drukfout: KL.
[19] Drukfout: AB.

Om dit door getallen te bewijsen, den Tryangel ALN (welcke bekent is door de 13^{ste} des 2^{de} *Euclides*,) met al zijn syden is ghelijckformich den Tryangel ABM, (de linien tot deser bewijsinghe van nooden doen als onder volcht) daerom als AL teghen LN alsoo AB 8 teghen BM compt $\sqrt{45\frac{75}{169}}$* (als hier onder.) Item 4 AL teghen AN $2\frac{2}{13}$* alsoo AB 8 teghen AM compt $4\frac{4}{13}$* van AD 10, rest voor MD $5\frac{9}{13}$*, tot desen quadraet addeert het quadraet der[20] perpendiculaer BM uit der somma $\surd$ compt voor de diagonael BD $\sqrt{77\frac{11}{13}}$*. Om te vinden de ander middel linie AC merct den Tryangel LNF is ghelijckformich den Tryangel KOF daerom als LF $7\frac{1}{3}$* teghen LN $\sqrt{11\frac{61}{169}}$* alsoo KF (ghelijck EF) teghen KO $\sqrt{\frac{155520}{20449}}$* nu vindt ghy lichtelijck voor EO $\frac{96}{143}$* deser quadraet met den quadraet KO doen het quadraet EK daer uyt $\surd$ compt voor EK $\sqrt{8\frac{8}{143}}$* voor EM compt $1\frac{25}{39}$* deser quadraet addeert tot den quadraet BM dan der somma $\surd$ gheeft voor EB $\sqrt{48\frac{16}{117}}$*, hiervan KE rest voor BK, $\sqrt{16\frac{80}{99}}$* dese ghelijck FC, nu is den Tryangel CFD, bekent met alle zijden,[21] souckt de perpendicul. CP sult vinden $\sqrt{15\frac{105}{121}}$* ende FP doet $\frac{32}{33}$*, PD $\frac{4}{11}$* addeert AF als $8\frac{2}{3}$* tot PF,[22] compt $9\frac{7}{11}$* voor AP ten corsten ? vint ghy door de 47^{ste} des eersten *Eucl.* voor AC $\sqrt{108\frac{8}{11}}$*, soo verde men begheert de lengde CI. Item DI, doet men alsoo als KO $\sqrt{7\frac{12377}{20449}}$* teghen KF, 6* alsoo BM $\sqrt{45\frac{75}{169}}$* teghen BI, compt voor BI $14\frac{2}{3}$*, hier van BC als 6 rest voor CI $8\frac{2}{3}$*, soo lanck moet mede zijn FI om dit te proeven, settet als KO teghen OF $5\frac{47}{143}$* alsoo BM teghen MI compt $13\frac{1}{39}$* hier van FM, rest voor FI, $8\frac{2}{3}$* als boven ghevonden voor CI voor HI of DI, welcke mede ghelijck compt $7\frac{1}{3}$* ende CH ghelijck FD doet $1\frac{1}{3}$*, welck is de Basis des Tryangels CDH die ghelijck is de Tryangel FHD, ende ghelijckformich den Tryangel ABE (alsboven bewesen) de winckels BAE ende DCH, zijn ghelijck, ende CH (cleyne deel der diffrentie tusschen A ende D) teghen DC (gelijck D) also AE (groote deel der[23] diffrentie tusschen A ende D) teghen AB (ghelijck.) Item [p. 208]
FH CD, ende LB zijn ghelijck, hieruyt iste mercken: waeromme de diffrentie tusschen den linien A ende C (teghen malcander overghetrocken) ghedeelt

[20]Drukfout: daer

[21]Merk op dat gevraagd wordt aan te tonen dat CD = 4. Het is dus helemaal niet zo dat deze driehoek helemaal bekend is.

[22]Drukfout: PD.

[23]Drukfout: de

zijn inde proportie die is tusschen B ende D (mede teghen malcander over ghetrocken) Item door wat oorsaecke de differentie tusschen de linien D ende B voor den halven Diameter AL ghenomen is.

4

Besiet 'tvolgende exempel van de selve 4 linien daer in de linie B voor de Basis genomen, ende B tegen D. Item A tegen C getrocken, zijn de diffrentie tusschen B ende D ghedeelt naer de proportie der linien A ende C & c. BI ende AI ghesocht op een ander maniere als in voorgaenden. Aengesien de parallel linien CF en BI, als nu GA 4 tegen AF $6\frac{1}{2}$*, also AB 10 tegen AI $16\frac{1}{4}$*, doort selve vint ghy voor BI $13\frac{3}{4}$*,[24] voor CI $9\frac{3}{4}$* voor DI $8\frac{1}{4}$* door de 13^ste^ des 2^de^ *Euclides*, voor OI $10\frac{45}{52}$* substraheert dat quadraet AO van quadraet AB uyt den rest $\surd$ compt voor de perpendiculaer BO $\sqrt{71\frac{1}{169}}$* ende voor de perpendiculaer CP vindt ghy licht $\sqrt{85\frac{45}{121}}$* door de 47^ste^ des eersten *Euclides*. Vindt ghy de diagonael linien BD $\sqrt{77\frac{11}{13}}$* ende voor AC $\sqrt{108\frac{8}{11}}$* als in voorghestelde exempel, soo verde ghy begheerdt de groote des[25] viercants, multipliceert de perpendiculaer BO met de helfte van AI comt voor den Tryangel BAI, $\sqrt{4687\frac{1}{2}}$* noch multipliceert de perpendiculaer CP met de helfte van DI, compt voor den Tryangel DCI $\sqrt{607\frac{1}{2}}$* dese grootheyt ghenomen van der groote des Tryangels BAI rest voort viercant ABCD $\sqrt{1920}$*.

AE = $2\frac{1}{2}$*,
FD = $1\frac{1}{2}$*,
AF = $6\frac{1}{2}$*,
DE = $5\frac{1}{2}$*.
GF = $5\frac{1}{2}$*,
FH ghelijck EF 4*,
AO = $5\frac{5}{13}$*
OD = $2\frac{8}{13}$*
GN = $\sqrt{11\frac{61}{169}}$*,[26]
BO = $\sqrt{71\frac{1}{169}}$*, [p. 209]

[24]Drukfout: 13.
[25]Drukfout: de.
[26]Drukfout: de wortel is weggelaten.

BD $= \sqrt{77\frac{11}{13}}*$,
CP $= \sqrt{35\frac{85}{121}}*$,
AC $= \sqrt{108\frac{8}{11}}*$,
AI $= 16\frac{1}{4}*$,
BI $= 13\frac{3}{4}*$,
DI $= 8\frac{1}{4}*$,
CI $= 9\frac{3}{4}*$,
OI $= 10\frac{45}{52}*$,
OD $= 2\frac{8}{13}*$,
PI $= 7\frac{31}{44}*$,
PA $= 8\frac{6}{11}*$.

Noten: Van Ceulen bedoelt $AB = 10, AD = 8, DC = 6, CB = 4$. Punt H (in de figuur niet getekend) is het snijpunt van GF en BE. Punt P en KP zijn verkeerd geplaatst in de figuur: CP moet een loodlijn zijn uit C op AD. Merk op dat D en P niet samenvallen; $PI = 7\frac{31}{44} < 8\frac{1}{4} = DI$.

5

Daer werdt noch ghevraecht of men begheerde dat gevonden viercant te deelen in twee ghelijcke deelen, met een rechte linie ghetrocken even-wijdich teghen AB: vraghe hoemen tselve Geometrici doen soude, ende bewijsen: Mede hoe lanck de linie is, ende hoe verde vant Centro des Circkels. Den Diamet. des circkels daerin het viercant gestelt is doet $\sqrt{109\frac{19}{30}}*$.[27]

Om dese te beantwoorden, hebbe ic gesocht eenen Tryan. den viercant ABCD gelijck, den selven ghedeelt in twee ghelijcke deelen, met de linie BG[28] (als ghy in volgender figuer sien cont daer den tryangel ABE, den viercant ABCD gelijc is, welck door voorgaende leeringe te bewijsen is) daer na is ghesocht AK, staende int midden der proportie van GH ende AH, dese lengde geteeckent van H in den Basis AH, valt in L, uyt desen punt getrockē LM, parallel AB, comt dat viercant ABML gelijck den viercant LMCD, dat dit also is cont ghy bewijsen op de maniere des 16ste exempels int derde deel deses boucks. Om dese door ghetallen te beantwoorden, doet als volcht, divideert $\sqrt{1920}*$ (de groote des tryan. ABE (gelijck den quadrang. ABCD) door de perpend. BF (daer voor gevondē is $\sqrt{71\frac{1}{169}}*$) comt voor AG $5\frac{1}{5}*$,de

[27]De diameter kan berekend worden uit de volgende gelijkheid, in de notaties van prop. 4: $BD \cdot BA = (diameter) \cdot BO$.

[28]Drukfout: BD.

helfte der basis AE, nu is een voorgaendē bekent AF van AE, rest FE, deser quadraet ende tquadraet van BF tsamen uyt der somme $\surd$, sal comen voor BE, als hier tegen gheteeckent, souct uyt voorgaender leer BN, NA, ende de perpendiculaer NE. Item, multipliceert GH[29] met AH uyt den comenden product $\surd$, comt AK ghelijck HL, dese genomen van $16\frac{1}{4}$, rest $16\frac{1}{4} - \sqrt{179\frac{9}{16}}*$ voor AL, Om te vinden LM, merckt, als $16\frac{1}{4}$ AH teghen HL so ? AB, alsoo LH teghen LM, facit $\sqrt{68}$, den Diameter des ongheschreven Circkels doet $\sqrt{109\frac{10}{39}}$, syn helfte is $\sqrt{27\frac{49}{136}}$, so lanck BO gelijck AO, substraheert dat quadr. van PB, als 25 van den quad. BO uyt den rest $\surd$ comt PO $\sqrt{2\frac{49}{139}}$. Item, aengesiē de gelijcformige tryang. ANE ende AQL, als AE $10\frac{2}{5}$ tegē NE $\sqrt{76\frac{4}{5}}$, alsoo AL $16\frac{1}{4} - \sqrt{179\frac{9}{16}}$ teghen QL ghelijck PS, comt $\sqrt{187\frac{1}{2}} - \sqrt{127\frac{1}{2}}*$. [p. 210]

Hiervan PO, rest voor OS $\sqrt{147\frac{49}{120}} - \sqrt{127\frac{1}{2}}*$, daer na gevraegt is, om nu te rekenē of dat afgesnedē stuc ABNL de helfte is van den viercant ABCD. Neemt in den sin een perpendiculaer, getrocken van M op den Basis AH, welcker lengde vint alfoo, ghelijck hem AB tegen FB, alfo LM tegen $\sqrt{48\frac{48}{169}}$[30], defe multiplic. met $\frac{1}{2}$ van LH, comt voor den tryangel MLH $\sqrt{2167\frac{1}{2}}*$, ende hier voren is ghevonden voor den Tryangel ABC $\sqrt{4687\frac{1}{2}}$, defe van malcander ghesubstraheert, rest voor dat viercant ABML $\sqrt{480}*$, dit is de helfte des viercants ABCD als begheert wert.

Diameter doet $\sqrt{109\frac{19}{30}}*$,
RO $= \sqrt{27\frac{49}{120}}*$,
BF $= \sqrt{71\frac{1}{169}}*$,
AG $= 5\frac{1}{5}*$,
AE $= 10\frac{2}{5}*$,
AF $= 5\frac{5}{13}*$,
GF $= \frac{12}{65}*$,
FH $= 10\frac{45}{52}*$,
GH $= 11\frac{1}{20}*$,
FE $= 5\frac{1}{65}*$,
AK ghelijck HL $= \sqrt{179\frac{9}{16}}*$,

[29] Drukfout: IA.

[30] Drukfout: $\sqrt{48\frac{8}{169}}$.

BE = $\sqrt{96\frac{4}{25}}$*,
NB = $4\frac{2}{5}$*,
AN = $5\frac{3}{5}$,[31]
de perpendicul. NE = $\sqrt{76\frac{4}{5}}$*,
AH = $16\frac{1}{4}$*,
AL = $16\frac{1}{4} - \sqrt{179\frac{9}{16}}$*,
LM = $\sqrt{68}$*,
PO[32] = $\sqrt{2\frac{49}{120}}$*,
PS[33] $\sqrt{187\frac{1}{2}} - \sqrt{127\frac{1}{2}}$*,
de perpendicul. vallende van M op LH, doen $\sqrt{48\frac{48}{169}}$[34].

6

Daer zijn 4. linien, als hier geteeckent met ABCD, van dese is gemaeckt een viercant daer om een Circkel beschreven can werden, ende uyt den winckel B is ghetrocken de rechte BG, doort Centro des Circkels, welcke door-snydet AD in F, vraghe naer AF, FD, BF, ende FG. Om dese te beantwoorden, Doet alsoo:

Maect het viercant als voor geleert is, ende bereydet de figuer als hier tegē staet: ende merct, dē Tryang. ABD is bekent met alle zijden, daerom is mede bekent de perpendiculaer BH, AH, en HD. Item, de linie KI ghetrocken uyt den middelpunt des circkels perpendicularit. op den Basis AD, welcke in K ghelijck ghedeelt werdt, daerom als BH teghen BD, alsoo AB teghen den Diameter BG, comt als hier tegen geteeckent. Nu zijn mede bekent de linien AG en DG, dewijle de winckels BAG ende BDG recht zijn, mede de perpendicul. LG, LD ende AL,[35] daerom genomē LD van 9 (als KD) rest KL, dese is ghelijck IM dit quadraet ghenomen vant quadraet des halven Diameters uyt den rest $\sqrt{}$, comt MG, den Tryangel IMG is nu bekent met syn zijden, ende mede ghelijckformich den Tryangel GFL, BHF, ende IFK, als nu MG tegen GI, also GL tegen FG, comt $\sqrt{171\frac{17545973931}{96780929615}}$*,[36] noch als

[31] Het wortelteken op p. 209 is een drukfout; op p. 210 worden de waarden van NB en AN herhaald, ditmaal correct.
[32] Drukfout: PE.
[33] Drukfout: ps.
[34] Drukfout: $\sqrt{48\frac{8}{169}}$.
[35] Met een abstracte redenering is meteen in te zien dat LD=AH.
[36] Deze breuk is te schrijven als $\frac{2079}{3335} \cdot 144 \cdot (\frac{7439}{5387})^2$.

MG teghen IG, alsoo BH tegen BF, comt voor BF $\sqrt{34\frac{11746814}{29019769}}*$: dese twee liniē tsamen geaddeert, comt $\sqrt{359\frac{239}{3335}}$[37] voor den Diameter BG. Item, als MG tegen IM, alsoo LG teghen LF, comt $7\frac{31027}{64644}*$. Hier toe LD, comt $11\frac{341}{5387}*$, noch als MG tegen IM, also BH tegen HF,[38] comt $3\frac{22843}{64644}*$, hier toe AH, comt voor AF $6\frac{5046}{5387}*$ Dit condt ghy prouven.

AC = $\sqrt{169\frac{5}{7}}*$,
BD = $\sqrt{231}*$,
AH = $3\frac{7}{12}*$,
HD = $14\frac{5}{12}*$,
BH = $\sqrt{23\frac{23}{144}}*$,
Diameter BG = $\sqrt{359\frac{239}{3335}}*$,
IG = $\sqrt{89\frac{2561}{3335}}*$,
AG = $\sqrt{323\frac{239}{3335}}*$,
DG = $\sqrt{128\frac{239}{3335}}*$,
AL[39] = $14\frac{5}{12}*$,
LD = $3\frac{7}{12}*$,
LG = $\sqrt{115\frac{111121}{480240}}*$,
LK ghelijck IM doet $5\frac{5}{12}*$,
MG = $\sqrt{60\frac{205369}{480240}}*$,
FL = $7\frac{31027}{64644}*$,
FD = $11\frac{341}{5387}*$,
AF = $6\frac{5046}{5387}*$,
HF = $3\frac{22843}{64644}*$. [p. 211]

[37]Drukfout: $\sqrt{358\frac{239}{3335}}$.
[38]Het is veel handiger LF + AF = HL te gebruiken.
[39]Drukfout: HL.

Daer is een viercant beschreven in eenen Circkel, alsoo dat syn houcken den omloop raecken, AB doet 24, BC 11, CD 8, DA 14. Nu is door de zijde AB ghetrocken den Diameter CG, doorsnijdende AB in F, ende deelt dat viercant in twee ongelijcke stucken, vrage hoe groot is elck deel, te weten, den tryangel BCF en dat viercant FCDA.

Doet alsoo:

Souct de middel-linie BD, AC, ende CG, comt als hier onder der figuer gestelt, ende bereydet de figuer op voorgaende maniere, ofte als hier ghestelt, ende souckt de linien BI, IA, ende IC, daer na substraheert dat quadraet KA (als $\frac{1}{2}$ van AB) vant quadraet des halven Diameters AE, uyt den rest $\sqrt{}$, comt EK, dese addeert tot CI, comt CL $\sqrt{115\frac{176089842601}{21180104060}}*$[40] als deze tegen $5\frac{457}{752}*$ LE, also KE $\sqrt{3\frac{104059}{374535}}*$ tegen FK, comt als hier teghen ghestelt, dese ghesubstraheert ende gheaddert tot de helfte van BA, sal comen de lengde van BF ende FA, multipliceert de helfte van BF met der perpendiculaer GI, comt voor den tryangel BCF $\sqrt{2449\frac{92051798041751}{392531352259216}}*$.

Item, souckt de groote der Tryangels BCA ende CDA, sult vinden voor den Tryangel BCA $\sqrt{\frac{407868615}{35344}}*$ ende voor CDA $\sqrt{\frac{18352215}{8836}}*$, somma voor dat geheele viercant ABCD $\sqrt{23408\frac{7}{16}}*$[41] daer van ghesubstraheert den Tryangel BCF, rest voort stuck AFCD $\sqrt{10713\frac{24363319759062}{24533209516201}}*$. Dit condt ghy prouven.

BD = $\sqrt{306\frac{44}{53}}*$,[42]
CA = $\sqrt{390\frac{8}{47}}*$,
IC = $\sqrt{80\frac{78415}{565504}}*$,
CG = $\sqrt{589\frac{41701}{374535}}*$,
CE = AE = $\sqrt{147\frac{104059}{374535}}*$,
EK = $\sqrt{3\frac{104059}{374535}}*$,
FK = $\frac{4672436}{4953101}*$,

[40]Note that for checking this and the subsequent values, a pocket calculator was not sufficient, but the program Mathematica was used.

[41]Drukfout: $\sqrt{23408\frac{7}{8}}$.

[42]Drukfout: $\sqrt{106\frac{44}{53}}$.

AF $= 12\frac{4672436}{4953101}*$,
FB $= 11\frac{280665}{4953101}*$,
KI = LE[43] $= 5\frac{457}{752}*$,
BI $= 6\frac{295}{752}*$,
AI $= 17\frac{457}{752}*$.

Noot bij de figuur: de letter F is niet ingetekend (het snijpunt van CG en BA).

[43] Drukfout: KE.