V Hoofdstuk. [357]

Over de methodus docendi, *in de studie der wiskundige wetenschappen te volgen.*

Ons oogmerk is niet, om in dit laatste Hoofdstuk onzer Verhandeling alles op te geven, wat tot de *methodus docendi,* in het algemeen genomen, behoort: wij hopen over dit gewigtig onderwerp, in het vervolg, een geregeld *compendium* uit te geven: thans zullen wij ons slechts bij eenige der gewigtigste hoofdzaken, tot ons tegenwoordig oogmerk dienende, bepalen, de leerwijze, in de wiskundige studien te volgen, opgeven, en door het noodige aantal voorbeelden ophelderen.

Zal het onderwijs, dat aan eenige scholieren of studenten in eenig studievak gegeven wordt, regelmatig en in den kortsten tijd gelukkig afloopen, moeten er bij den leeraar verscheidene hoedanigheden zamenloopen, en bij de leerlingen verschillende dispositien geboren en levendig gehouden worden, zonder welke de studien langzaam zullen voortgaan en een zeer gebrekkige uitslag hebben. | [358]

Een leeraar, die eenig vak van kunst of wetenschap onderwijst, moet in zijnen persoon de volgende hoedanigheden vereenigen: 1^o. *moet hij der kunst of wetenschap, die hij zal onderwijzen, volkomen magtig zijn;* 2^o. *behoort hij met zijne gansche ziel aan het belang der jeugd, die hij onderwijst, te zijn toegedaan; om welke hoedanigheid te verkrijgen, en zich meer en meer eigen te maken, hij* 3^o. *met al die kundigheden dient bekend te zijn, welke tot het vak van eene verstandelijke en zedelijke opvoeding behooren, ten einde dezelve, door eene dagelijksche uitoefening, in praktijk te leeren brengen;* 4^o. *hij moet eindelijk door eigen voorbeeld, in de vervulling der verpligtingen, die als leeraar op hem liggen, het voorbeeld van orde, zedelijkheid en werkzaamheid geven.* Met zulke hoedanigheden begaafd, zal hij (zoo geene vreemde oorzaken eene tegenwerking veroorzaken) zich de achting en verkleefdheid zijner leerlingen verwerven, en in zijn onderwijs gelukkig slagen; vooral zal hij geene dwangmiddelen behoeven, om zijne scholieren bij hunnen pligt te houden; want, wat zwartgallige zedemeesters hier ook van mogen zeggen, *het is een hoofdtrek in het menschelijke karakter, dat hij, onder eene verstandige en zachte leiding, gaarne aan zijne verpligtingen voldoet, en zich aan eene*

goede orde onderwerpt. Men bepale vooral de werkzaamheden op eene middelmatige schaal, en late een genoegzamen tijd tot uitspan|ning;[178] helpe, [359]
zoo veel mogelijk, degenen, die minder aanleg en vatbaarheid schijnen te hebben;[179] bevordere, zoo veel tijd en gelegenheid toelaten, de meer vluggen,
en offere vooral | het belang van de geregelde vorderingen der jeugd niet aan [360]
zijne eigene eerzucht op.[180]

De leerling leert zich zelven, de onderwijzer bestuurt den loop der studien. Zich zelven te leeren is aandachtig en oplettend te zijn op hetgeen voorgehouden wordt. Hierin steekt het geheele geheim, en dit is het moeijelijkste punt in de verstandelijke en zedelijke opvoeding. Vele jonge lieden zijn zoo weinig meester van hunne aandacht, dat men hunne gedachten naauwelijks

[178] Niets is verderfelijker, dan de jeugd met te veel werkzaamheden te overladen. Knorrige zedemeesters klagen over de wulpsheid en speelziekte der jeugd, die, men moet dit erkennen, dikwijls in moedwil en slechte trekken overgaat, en zouden wel willen, dat een knaap van tusschen de dertien en achttien jaren zoo bedaard was, als een wijsgeer van vijftig. Ik denk daar anders over. De speelziekte der jeugd is een gevolg van den groei en de ontwikkeling der ligchaamskrachten; zoo gij deze geheel onderdrukt, dan werkt gij tegen de natuur. In de jongelingsjaren heeft men dagelijks nog eenige uren uitspanning noodig, door welke de geesten worden opgewekt, en tot nieuwe inspanning en aandacht bekwaam gemaakt.

[179] Niets is nadeeliger, dan zich gemelijk te betoonen, wanneer sommige scholieren eene mindere vatbaarheid schijnen te hebben dan andere, en minder vorderen, dan wij wel zouden wenschen; want dit is een geschikt middel, om den moed geheel uit te blusschen. Bovendien leert de ondervinding al dikwijls, dat die mindere vatbaarheid slechts schijnbaar is geweest, en vele zulke onvatbaren anderen in het vervolg overtreffen. *Zijt onverbiddelijk, wanneer gij de eerste zaden van zedelooze beginselen ontdekt, maar toegevend omtrent de gebreken van het verstand.*

Ik kan hier niet voorbij, eene opmerking onder het oog van den lezer te brengen, die wel verdient te worden nagedacht. *Hoe komt het, dat men met sommige knapen niets kan uitvoeren, men hun niets kan leeren, zoo dat men zou zeggen, zij zijn in alle opzigten dom en onvatbaar, en die nogtans, in hunne dagelijksche guitenstreken, van zeer veel schranderheid en overleg blijken geven?* Waar zulk een verschijnsel plaats heeft, is zekerlijk de oorzaak van hetzelve te zoeken in de onvoorzigtigheid dergenen, die in vroeger jaren over de eerste opvoeding van de zulken zijn waakzaam geweest. Intusschen blijkt het: dat zij den noodigen aanleg hebben, om nuttige dingen te leeren; dat men daar niet in slaagt, is toe te schrijven aan de onbedrevenheid in de kennis van de zedelijke oorzaken, die dit kwaad hebben gewrocht, en der zedelijke hulpmiddelen, die het kunnen beteugelen.

[180] De openbare examina's geven hiertoe dikwijls aanleiding. Wanneer, bij voorbeeld, de onderwijzer, om daar door zijne bekwaamheid aan den dag te leggen, op dezelve meer vergt, dan de jaren en vermogens toelaten: de examina's behooren alleen een zedelijk hulpmiddel te zijn, om de jeugd tot werkzaamheid en studie aan te sporen: ik ken dezelve te wel, om, hoe fraai en schitterend zij schijnen, aan dezelve veel te hechten.

eenige oogenblikken bij een onderwerp kan be|palen; eene al te groote le- [361]
vendigheid van geest is hun daarin hinderlijk; *en echter behoort men, om, in welke studie het zij, gelukkig te slagen, zijner aandacht en zinnen geheel meester te worden;* waartoe alle verschillende oefeningen kunnen dienen, en inzonderheid die, welke men als eene aangename bezigheid kan beschouwen, als, bij voorbeeld, de muzijk en teekenkunst.[181] Ik weet uit de dagelijksche ondervinding, dat er geene moeijelijker zaak is, dan degenen, wier gedachten zich bij alles bepalen, behalve bij hetgeen men met hen behandelt, aan aandacht gewoon te maken; en dit is in eene school, waar vele scholieren zijn,
zeer moeijelijk: algemeene voorschriften dienaangaande zou ik naau|welijks [362]
weten uit te denken; zedelijke beweegredenen zijn de eenige, die hier met vrucht kunnen worden aangewend, en deze zijn naar de omstandigheden zeer verscheiden; de bekwaamheid en menschenkennis van den leeraar moeten, in voorkomende gevallen, de middelen weten aan te grijpen, die tijd en gelegenheid hem aanbieden. Zijnen aandacht meester te worden is zulk een groot vereischte, dat alle goede hoedanigheden der verstandelijke vermogens van dezelfde afhangen, en niemand in eenig vak van studie, zonder dit vereischte, ooit zal kunnen slagen.

De aandacht is, onder anderen, een eerste vereischte, om het geheugen te oefenen en te versterken. Met regt beschouwt men de aankweking van het geheugen als een voornaam hoofdpunt in de studien, vooral in het aanleren van talen; maar het komt mij voor, dat de middelen, welke tot dat einde doorgaans worden aangewend, niet altijd de geschiktste zijn: en dit brengt mij van zelf tot het *van buiten leeren.* Het van buiten leeren is eene zeer nuttige en noodzakelijke oefening; want men wordt door hetzelve gedwongen, dat gene te verrigten, waardoor woorden en zaken diep in het geheugen kunnen worden ingeprent; hetgeen slechts in twee omstandigheden zal plaats hebben: 1^o. *wanneer een persoon of eene zaak op ons een diepen indruk*

[181] *Ik beschouw de beginselen der teekenkunst als eene algemeene en noodzakelijke behoefte voor de jeugd, en inzonderheid voor hen, die tot den geleerden stand worden opgeleid, zoo dat ik wenschte, dat men de kinderen, die men tot dien stand bestemde, al vroeg in dezelve oefende, en dat men tot dat einde naar middelen omzag, om het onderwijs in die schoone kunst meer algemeen verkrijgbaar te maken:* want, behalve dat het teekenen in alle vakken van studie te pas komt, en dus in den volgenden leeftijd van veel nut is, is die oefening zeer geschikt, om de aandacht gedwee te maken, de voorstellingskracht te ontwikkelen, en dus om tot eene voorbereiding tot meer ernstige studien te dienen. Ik spreek hier uit eigene ondervinding. Het teekenen is eene oefening van het gezigt, zoo als de muzijk eene oefening van het gehoor is: beide zijn derhalve zeer geschikt, om de aandacht en de voorstellingskracht te versterken.

maakt; 2^o. *wanneer wij iets bij aanhoudendheid en aandachtig beschouwen;* het laatste nu moet bij alle van buiten lee|ren plaats hebben; gevolgelijk is [363] het eene wezenlijke oefening van het geheugen; maar zoo als alle goede dingen kunnen overdreven worden, zoo kan zulks ook ten opzigte van het van buiten leeren plaats hebben. Stel dat een jong mensch gemakkelijk, op elken dag, honderd woorden van buiten kan leeren, en dat dit zelfs zeer vlot gaat, denk niet, dat gij hier iets mede zult winnen; het zal alleen bewijzen, dat de jongeling in staat is, om dit te kunnen doen; maar zoo gij meent, dat hij, na honderd dagen, tienduizend woorden zal weten, dan bedriegt gij u; hier en daar zullen er eenige in het geheugen zijn gebleven; het middel, dat gij aanwendt, zal het doel niet bereiken; want, *dat is het ware geheugen, dat men zich de zaken herinnert op het oogenblik, wanneer ons derzelver herinnering te pas komt;* en dit zal men verkrijgen, wanneer men het geheugen niet overlaadt, maar matig oefent. Alles wat schielijk in het geheugen wordt gebragt, wordt ook even spoedig uit hetzelve uitgewischt.[182] Er is eene manier van van bui|ten leeren van zaken, welke ik ten hoogste moet afkeuren, dewijl de- [364] zelve aan de jonge lieden slechts klanken en den kadans van woorden leert kennen, en hen gewoon maakt, om over de zaken niet na te denken; ik meen het van buiten leren van vragen en antwoorden, op de manier, zoo als zulks gewoonlijk plaats heeft, en het van buiten leeren van geheele fragmenten uit eenen schrijver. *Zulk een van buiten leeren acht ik dan alleen nuttig en noodzakelijk, wanneer men vooraf reeds goed begrepen heeft en verstaat, wat men zal van buiten leeren;* maar dan dient er vooreerst in de zaken, die men van buiten leert, een natuurlijke zamenhang te bestaan, en zij behooren in een goeden en eenvoudigen stijl te zijn opgesteld;[183] men leert dan met de zaken,

[182]Toen ik in mijne jeugd in de talen onderwees, liet ik, zonder acht te geven, of mijne scholieren al dan niet gemakkelijk konden van buiten leeren, dagelijks niet meer dan tien of twaalf woorden leeren, die, in het einde van de week, weder door elkander moesten worden opgezegd: ik koos woorden uit het gemeenzame leven, en zoodra men zoo ver gevorderd was, dat men kon beginnen te lezen, liet ik geene andere woorden meer van buiten leeren, dan die men in de lezing niet kende; en ik had het genoegen, dat mijne leerlingen, in zeer korten tijd, zeer ver kwamen.

[183]Dit brengt mij tot de vrageboekjes, die zoo veel in zwang gaan. Deze zijn, wanneer zij naauwkeurig zijn opgesteld, en behoorlijk gebruikt worden, zeer nuttig: *evenwel zou ik het veel beter achten, de dingen in een doorlopenden stijl voor te dragen, en de vragen, die uit eene periode kunnen gedaan worden, onder aan den voet van de bladzijde te plaatsen,* gelijk ik zulks in mijne allereerste gronden der cijferkunst gedaan heb. Dit denkbeeld is echter niet van mij, het is van HUBNER. In mijne jongere jaren was er eene bijbelsche historie van dien schrijver in gebruik, die men thans weinig ziet; dezelve was in korte afdeelingen

die | men begrijpt, gemeenzaam worden, en oefent zich, om eene zuivere en duidelijke taal te spreken. [365]

Er is eene oefening van het geheugen, die ik ten sterkste aanraad; namelijk het stellen van een kort verhaal, dat men aandachtig gelezen heeft; en ik zou hiertoe, bij voorkeur, kiezen korte levensbeschrijvingen van voorname mannen, korte zedelijke verhalen, en fragmenten uit de natuurlijke historie: ik heb mij, in vroeger tijd, daar zoo wel bij bevonden, dat mijne leerlingen, met weinig moeite, een goeden en duidelijken stijl leerden schrijven, en met vele zaken grondig bekend werden.[184] Evenwel moet zulks slechts | zeer [366] matig plaats hebben; want alles wat men overschrijft is schadelijk; in alles behoort dit de regel te zijn; *dat het geheugen niet, ten koste van het oordeel en nadenken, wordt afgepijnigd, noch het oordeel en nadenken werkzaam gehouden, zonder het geheugen te oefenen: al die verschillende vermogens zijn als zoo vele veren van het verstand, die elk op zich zelve vrij behooren te kunnen werken, zonder elkander te belemmeren.*

Met het geheugen of de herinnering staat (zoo als wij in het *III Hoofdstuk, bladz. 140* gezegd hebben) in verband de *voorstellingskracht*, | welke niet [367] meer is dan een geheugen, echter niet van woorden en enkele zaken, maar

---

verdeeld, en onder aan den voet van de bladzijde vond men de noodige vragen. Ik liet aan mijne discipelen, dagelijks, in het begin van de week, eene afdeeling duidelijk lezen, en op het einde van de week hield ik hun de vragen voor: zij moesten dus, om die vragen te kunnen beantwoorden, in den tekst zoeken, en zoo werden, en het geheugen, en het oordeel, te gelijk geoefend. Het ware te wenschen: dat men in dien trant de eerste beginselen van de algemeene geschiedenis behandele; dit zou veel tijd en schrijvens uitwinnen.

[184]Mijn achtenswaardige collega, de Hooggeleerde Heer Peerlkamp, heeft, mijns oordeels, met zijn uitmuntend werkje, getiteld *Vitae aliquot excellentium Batavorum*, aan de Latijnsche scholieren eene groote dienst bewezen: het ware te wenschen, dat er meer zulke stukjes in goed Latijn werden opgesteld, om dezelve voor te lezen en te verklaren; de jeugd zou, in korten tijd, in de echte latiniteit groote vorderingen maken, en zij zou met meer lust en beter vrucht de klassieke schrijvers beginnen te lezen. Men begint te vroeg met fragmenten uit de klassieke schrijvers; want de constructie der Latijnsche taal is op zich zelve reeds moeijelijk, wegens derzelver groote afwijking van die onzer moedertaal; komt daar dan nog de vreemdheid der dingen bij, dan veroorzaakt zulks eene dubbele moeijelijkheid, die niet gebillijkt kan worden, door te zeggen: dat men geene andere voorbeelden van latiniteit dan die der oude schrijvers mag voorhouden. Voor dezen gebruikte men wel de zamenspraken van Corderius en Erasmus, en er werd goed Latijn geleerd; waarom zou men zulke opstellen, als ik hier bedoel, voorzien met de nodige aanwijzingen in de moeijelijke constructien, niet kunnen gebruiken? *In alle studien is toch de eerste regel: dat men den eerstbeginnenden het werk zoo gemakkelijk moet maken, als mogelijk is:* men komt spoedig genoeg aan den grenspaal, daar het werk moeijelijk wordt.

van de hoedanigheid der dingen, derzelver onderling verband, zamenhang en overeenstemming; derhalve geene *geïsoleerde* kundigheden, die zonder eenige orde zamenhangen, maar, om zoo te spreken, een helder en duidelijk inzien van het verstand in het verband der dingen. Gelijk men nu het geheugen van woorden en zaken oefent, door veelmaal die woorden te herhalen, en veelmaal aan die zaken te denken, zoo wordt het meer verheven geheugen, dat wij voorstellingskracht noemen, door studie en oefening van het denkvermogen en het oordeel verkregen; wordt die studie bestuurd, zoo als het behoort, dan werken het geheugen der woorden en de zinnelijke voorstelling der zaken mede tot opscherping van het verstand, rijping van het oordeel en het punten der scherpzinnigheid. Wie ziet dus niet, dat de aankweeking der voorstellingskracht in de studie der wetenschappen zelve bestaat, en dat de eerste stap, om tot dien hoogeren trap van herinnering te geraken, bestaan moet in het verkrijgen van duidelijke, en klare denkbeelden der zaken? Ik laat een onbedrevenen de figuur van eenen cirkel of een vierkant zien, en schrijf er bij de woorden *cirkel* en *vierkant*, zonder iets meer te zeggen; dan zal hij, wanner men hem naderhand die zelfde figuren vertoont, zich herinneren, dezelve meermalen gezien te hebben en zich dezelve onder die namen voorstellen: dit is een | eenvoudig geheugen; waneer hij aan die figuren denkt, [368]
zonder dezelve te zien, herinnering; maar zoo ik hem geleerd heb, waarin de cirkel en het vierkant bestaan, hem met de voornaamste eigenschappen dezer figuren heb bekend gemaakt, en hij den grond dezer eigenschappen heeft leren inzien, den geheelen zamenhang en de concatenatie dezer dingen meermalen op zijn gemak heeft beschouwd; dan komt hij eindelijk op die hoogte, dat hij zich dit alles, zonder de figuren voor zich te hebben, levendig kan voorstellen: zie daar wat wij voorstellingskracht noemen, een vermogen, dat door aanhoudende en geregelde oefening verkregen wordt.

Wij zeggen, *door eene geregelde oefening,* dat is, door niet slechts de zaken één voor één intuitivelijk te leeren kennen, maar om ze ook in derzelver overeenkomst, onderling verband en zamenhang te leeren beschouwen; want daarin bestaat de ware grondige kennis. Die vruchtbare manier van studeren te volgen is de ware natuurlijke leerwijze, met welke de leeraar moet bekend zijn, om zijnen leerling langs dien weg te kunnen geleiden. *Men beginne met de zinnelijke beschouwing der dingen, rangschikke dezelve in eene geschikte orde, leere ze in die orde opmerken; in derzelver zamenhang bestuderen, en eindige met ze eindelijk onder een algemeen gezichtspunt te leeren omvatten.* Zie daar, in korte woorden, de *methodus docendi en discendi,* die in alle studien be|hoort gevolgd te worden;[185] maar ook inzonderheid in de wiskundige, [369] welke, wegens hare eenvoudigheid, het beste geschikt is, om van de *methodus docendi* het model te geven, dat in alle overige studien behoort gevolgd te worden.

Wij komen thans tot het voornaamste gedeelte van dit Hoofdstuk, namelijk tot de *methodus docendi,* in de wiskundige wetenschappen, aan de Latijnsche Scholen, te volgen. Wij nemen hier aan, dat jongelingen van elf of twaalf jaren aan de Latijnsche Scholen komen, en aldaar tenminste vijf jaren verblijven; dan zal, indien er behoorlijk onderwezen wordt, en de regelmaat in het onderwijs niet wordt belemmerd, zeer gemak|kelijk aan het vereischte [370] van de wet op het middelbaar onderwijs kunnen voldaan worden.

Men verdeele het wetenschappelijke onderwijs in drie klassen, van welke de twee eerste elk één jaar duren zullen, en de hoogste gedurende het overige gedeelte van den tijd, dien men aan de Latijnsche Scholen verblijft, zal moeten afloopen. In de laagste klasse wordt behandeld de gewone telkunst, *inzonderheid de leer der evenredigheden,* naar aanleiding van het *II. Deeltje van mijne allereerste gronden der cijferkunst;* de quadraats- en kubus worteltrekking, de reken- en meetkundige reeksen, de theorie en het gebruik der logarithmen. In de tweede klasse de *allereerste gronden der stelkunst,* naar aanleiding van het Leerboekje, dat ik tot dat einde heb opgesteld, en tot de uitgave gereed is; en beginne, al ware het slechts éénmaal in de week, de scholieren te oefenen in het *meetkunstig teekenen,* naar aanleiding van het leerboekje, dat al mede tot dit einde in gereedheid is; en eindelijk in de hoogste klasse de *beginselen der meetkunst* en de *cosmographie*, naar de handleidingen, die insgelijks gereed zijn, en alle, ten dienste der Latijnsche Scholen opzettelijk opgesteld, in den loop van dit jaar nog zullen worden uitgegeven.

Dewijl aan de Latijnsche Scholen elk half jaar *novitii* aankomen, zoo zal

[185] Is dit mogelijk? Is, bij voorbeeld, de beoefening der geschiedenis niet van een verschillenden aard met die der wiskunde? *De onderwerpen verschillen hemelsbreed, maar de regelmaat in de wijze van studeren is dezelfde.* De landbeschrijving en tijdrekening zijn de zinnelijke voorstelling van de tooneelen en tijdmerken der geschiedenis: deze kunnen in kunstige tabellen worden voorgesteld, en deze zijn dan het geraamte, en de zinnelijke voorstelling van de schets. Tot tijdmerken, die als verkenningsbaken moeten dienen, behoorde men te kiezen die groote gebeurtenissen, welke op den loop der volgende den meesten invloed gehad hebben; deze behoorde men in derzelver oorzaken en gevolgen te bestuderen enz. Is dit nu wel eene andere leerwijze, dan dat ik eerst aan iemand eenen cirkel, eenen driehoek, een vierkant, een prisma, eenen kegel, bol enz. voorstel, en hem naderhand deze figuren nader leer kennen?

natuurlijk bij deze inrigting een *novitius*, die in het tweede half jaar | van [371]
den cursus der gewone telkunst aan de school komt, van het bijwonen der wiskundige lessen tot aan het begin van het volgende half jaar verstoken blijven; maar zulks is, daar het anders niet kan geschikt worden, van weinig aanbelang.

Aangezien het voor het Akademische onderwijs van het hoogste belang is, dat de Heeren Studenten, die volgens de wet tot de wetenschappelijke studien verpligt zijn, tenminste de eerste en voornaamste gronden goed verstaan, en vooral vlug kunnen rekenen, *zoo houden men de Latijnsche scholieren, indien het noodig is, twee jaren in de laagste klasse;* dat is, *indien het blijkt: dat zij nog niet grondig genoeg met de telkunst, en vooral met de theorie der evenredigheden bekend zijn, late men hen nog éénmaal de lessen in die klasse bijwonen.*

Men zou natuurlijk moeten onderstellen: dat de *novitii,* die van de lagere scholen komen, de eerste gronden van het rekenen goed verstaan, en ten minste vlug en gemakkelijk kunnen vermenigvuldigen en deelen; maar aangezien zulks, gelijk ik uit eigene ondervinding weet, bij allen het geval niet is, en echter dit gebrek een groote hinderpaal is, om in wiskundige studien te kunnen vorderen, *zoo zij de leeraar der wiskunde vooraf bedacht, om de* novitii *aangaande dit punt naauwkeurig te onderzoeken, en bevindt hij, dat hierin eenig gebrek schuilt, dit gebrek te herstellen;* hetgeen, zoo als ik bij eigene
onder|vinding weet, met die genen zelfs, die beneden het middelmatige der [372]
bevatting zijn, in korten tijd kan geschieden.[186] En dit is des te | noodzakelij- [373]

[186]Er zijn sedert eenige jaren in het praktische rekenen vele kwade gewoonten ingeslopen, die de vlugheid in het rekenen hinderlijk zijn. Om er slechts eene te noemen, zoo stel: dat 35246 met 9 moet vermenigvuldigd worden. Thans zegt men niet 9 maal 6 is 54, 9 maal 4 is 36 enz.; maar 6 maal 9 is 54, 4 maal 9 is 36 enz. Toen ik een kind was, zou men bij den meester dit niet hebben durven doen. Die kwade gewoonte maakt het vermenigvuldigen ten uiterste moeijelijk, en kan niet missen aanleiding tot vele fouten te geven. Men zegge niet, dat dit aan de leerlingen ligt, zoo als men mij voor dezen meermalen heeft tegengeworpen; want ik heb, in den jare 1821 en 1822, eene groote menigte proeven genomen op jonge lieden, die met moeite, en onder het maken van vele fouten, eene vermenigvuldiging uitvoerden, en ben met alle, geen uitgezonderd, geslaagd; en zie hier, hoe ik te werk ging. Stel: dat 35246 met 9 moet vermenigvuldigd worden; dan liet ik hard op zeggen: 9 maal 6 is? . . . hier zoo lang denken, tot 54 genoemd wordt. Dan ik: zet 4! dan wederom 9 maal 4 is? . . . antwoord 36; en 5? is 41; zet 1! dan wederom 9 maal 2? is 18; 18 en 4? is 22! zet 2 enz. Dit herhaalde ik eenige dagen, en, wanneer ik bij voorbeeld 78536 met 82793 had laten vermenigvuldigen, dan liet ik, omgekeerd, 82793 met 78536 vermenigvuldigen. Hetzelfde voorbeeld liet ik somtijds twee

ker, daar men met geen den minsten grond verwachten kan, dat iemand, die een brekebeen in het optellen en vermenigvuldigen blijft, eenige vrucht van aanbelang van zijne studien zal trekken; want welk nut zal men toch trekken uit regels, welke, hoe verre men vordere, alle op die eerste grondbewerkingen nederkomen, indien men dezelve niet met gemak heeft leeren uitvoeren? immers zal een leerling natuurlijk eenen weerzin gevoelen, wanneer het op de uitvoering van dezelve aankomt.

Wannneer die eerste gronden goed gelegd zijn, *dan vreeze men niet, dat de stelkunst of algemeene | rekenkunst en de meetkunst te moeijelijk zijn;* hier [374] voor mogen zij vreezen, die niet regt weten, wat deze kunsten eigenlijk zijn; het tegendeel is zoo zeer waar, dat de allereerste gronden der telkunst veel zwaarder zijn, omdat men bij derzelver beoefening het eerst aan eenige ingespannen aandacht gewoon moet worden; daar, wanneer men daarvan door eene matige oefening eene hebbelijkheid heeft verkregen, men, van dag tot dag, al minder en minder de pijnlijkheid gevoelt, die ingespannen aandacht bij sommigen veroorzaakt; wanneer men die eerste oefeningen is doorgekropen, dan is men reeds in zoo verre meester over zijne aandacht geworden, dat men de denkbeelden, die men over de getallen en meetkunstige figuren ziet, of hoort, voorstellen, gemakkelijk kan vatten, en, door ze herhaalde keeren te beschouwen, met dezelve gemeenzaam kan worden; hetwelk, hoe verder men komt, des te vlotter en gemakkelijker zal gaan.

Doch, *welke zijn nu de leerwijze en de manier van voordragt, die men vol-*

of drie malen op dezelfde wijze herhalen. In veel korter tijd, dan men denken zou, kende men de pythagorische tafel door en door; en dan begon ik zelf voorbeelden op het bord uit te werken en te beduiden: *dat men niet meer de namen der getallen, maar de cijfers denken moet.* Om 82793 met 7 te vermenigvuldigen? Nu spreek ik, wijzende met den vinger op 7 en 3, *eenentwintig*, en schrijf 1; verder wijzende met den vinger op 7 en 9, zeg ik, *drieenzestig,* en onmiddellijk daarop, *vijfenzestig,* en zet 5; verder wijzende met den vinger op 7 en 7 zeg ik, *negenenveertig,* en onmiddellijk daarop, *vijfenvijftig,* en zet 5; verder wijzende op 7 en 2, zeg ik, *veertien - negentien,* en zet negen; eindelijk wijzende op 7 en 8, zeg ik, *zesenvijftig - zevenenvijftig*; dit getal schrijf ik uit. Dit doe ik eenige keeren voor, en laat beproeven, of men mij gevat heeft, en eindelijk werk ik voorbeelden uit, zonder iets te zeggen, om te toonen, hoe vlug en gemakkelijk dit werk gaat. *Het noemen van de namen der getallen in het cijferen is een vermoeiend bezwaar;* men moet er natuurlijk wel eerst mede beginnen, om de gronden van de regels te beduiden, maar dan moet men het zich ook ontwennen, hetgeen geschieden kan; want ik denk gemakkelijker de figuur 56, bij voorbeeld, dan wanneer ik zeg, *zesenvijftig.* Men raadplege verder *den eersten cursus mijner wiskundige lessen.* Men ziet, dat zulk een werk zeer geschikt is, om de aandacht en de verbeeldingskracht te oefenen.

gen moet? en welke moet de hoedanigheid der leerboeken zijn? De leerwijze, die men tot hiertoe meest algemeen gevolgd heeft, is zekerlijk de slechtste, die men zou kunnen bedenken. Er wordt een kollegie over de meetkunst geopend; ik onderstel den leeraar volkomen meester van zijn onderwerp, duidelijk in zijne voordragt; het compendium, dat hij volgt en verklaart, zoo uitmuntend, als het zijn kan, hij ga | van les tot les voort met demonstreren, [375]
tot regel houdende: *capiat qui potest*; zijn kollegie zal binnen weinig weken moeten verloopen, ten zij er onder zijne toehoorders eenigen gevonden worden, die reeds met gronden bekend zijn, of hetzelve bijwonen, om zich verder in de kunst te volmaken. Dit verschijnsel kan niet anders zijn (en echter is het geen bewijs, zoo als sommigen gewild hebben, dat slechts weinig menschen voor de studie der meetkunst geschikt zijn), want men onderstelt, bij zulk eene manier van leeren, iets, dat onnatuurlijk en onmogelijk is; namelijk dat de toehoorders al de sluitredenen, uit welke eene demonstratie bestaat, van het begin tot het einde, zoo spoedig zullen vatten, als de leeraar, hij spreke zelfs duidelijk en langzaam, dezelve voordraagt; het verstand moet immers tijd hebben, om een denkbeeld te vatten; hoe dikwijls moet men niet aan iemand hetzelfde ding of dezelfde voorstelling herhalen, eer hij zegt: ja, nu vat ik het, nu zie ik het, nu ben ik overtuigd. Een mijner leerlingen, die met roem zich heeft onderscheiden, verhaalde mij laatst: "in het begin van mijn leeren, demonstreerde ik het theorema van Pythagoras in goede orde, maar het was eerst eenigen tijd daarna, dat ik overtuigd werd, dat het wezenlijk waar was." Een bewijs: hoe weinig men, in de beginselen zijnde, de kiem van demonstratien vat, wanneer zij slechts worden voorgehouden, en men dezelfde, als een van buiten geleerd lesje, opzegt. Geen wonder | [376]
dus, dat, bij zulk eene manier van leeren, hetgeen klaar en duidelijk is, en wel zamenhangt, omdat men het niet volgen kan, duister, onverstaanbaar, en verward moet voorkomen. Zoo men nu dit verschijnsel overal ziet plaats hebben, bij menschen van meer jaren, en die uit eigene overtuiging zulk een kollegie gaan bijwonen, hoe wilt gij dan zulk eene leerwijze aan eene Latijnsche School volgen![187] Zult gij daar meetkunst op die wijze verklaren aan scholieren, die eerst nog wel wat cijferen behoorden te leeren? Zoo er een middel moest bedacht worden, om eenen afkeer voor de studie der wiskunde in te boezemen, dan zou men er geen beter bij de hand kunnen nemen. Men

[187]Waar zijt gij school geweest? te X. Wie is uw leermeester daar in de mathesis geweest? Y. Hoe ver zijt gij gekomen? Ik ben den geheelen Steenstra door geweest. Wat is dan een parallelogram? Wat is dit? wat dat? wat anders? bijna alle verkeerde antwoorden. Bij het slot van rekening niets goeds!

moet waarlijk een geheel anderen weg inslaan; want zulk eene manier van leeren is niets meer, dan eene schadelijke tijdverkwisting!

En welke nu de vereischten van een wiskundig leerboek zijn, is uit hetgeen de *methodus docendi* behoort te zijn, gemakkelijk op te maken. Vooreerst *moet het naar den staat van den* | *tegenwoordigen tijd zijn ingerigt;* dat [377]
wil zeggen, er moeten die verbeteringen in voorkomen, die de gang des tijds heeft noodzakelijk gemaakt; men moet, bij voorbeeld, niet meer naschrijven, *dat de negatieve wortels eener tweede of hooge magtsvergelijking valsche wortels zijn,* omdat men dit te voren verkeerdelijk dacht. Ten anderen, *moeten de algemeene grondwaarheden en belangrijke leerstellingen het meest op den voorgrond uitkomen, en door in het oog loopende rustpunten duidelijk opgemerkt kunnen worden;* ten derde, *moeten in zulk een leerboek, zoo ten gerijve van den leeraar, als tot gemak der leerlingen, de noodige voorbeelden tot opheldering en toepassing te vinden zijn, en het geheel zoo zijn ingerigt, dat men de éénheid en den zamenhang van hetzelve spoedig kan overzien.* Ten vierde, *moet alles zuiver naar de regels eener strikte redeneerkunde worden voorgedragen, en mag men, onder den titel van bekortingen, nergens daar tegen zondigen;* en eindelijk, *moet de keuze der woorden eenvoudig, de stijl klaar en duidelijk zijn; ook moet men zich, zoo veel mogelijk, van zulke algemeen bekende woorden en wijzen van spreken bedienen, als bij het algemeen wordt verstaan, en moet alle overtollige geleerdheid zorgvuldig worden vermeden.* Al hetwelk vereischten zijn, die, ik moet dit erkennen, moeijelijk te vervullen zijn; omdat het in dezen niet genoeg is, de zaken, waarover men schrijft, grondig te verstaan, maar men bovendien eene menigte zamenloopende en verhevener kundigheden, onder het opstellen, | moet in het oog houden, die [378]
het leerboek, dat men opstelt, tot eene nuttige en bruikbare handleiding tot hoogere studien kunnen doen strekken; welk oogmerk men niet, dan na langdurige beproevingen en veel arbeids, verkrijgen zal.[188]

De beste leerwijze nu, in een kollegie van jonge lieden te volgen, is de socratische, welke zekerlijk voor den leeraar de moeijelijkste, maar voor de leerlingen de gemakkelijkste en leerzaamste is. Wij zullen, om onze lezers,

[188]Opmerkelijk zijn de woorden van D'ALEMBERT in zijne *melanges philosophiques.* *"Mais ce qui rend* (zegt hij, van de wiskundige leerboeken sprekende) *la plupart des élémens si défectueux, c'est moins encore le plan suivant lequel on les traite, que l'incapacité de ceux, qui l'exécutent. Ces éléments sont pour l'ordinaire l'ouvrage des mathématiciens médiocres, dont les connaissances finissent, où se termine leur livre et qui par cela même sont incapables de faire en ce genre un livre utile; car il ne faut pas s'imaginer que pour avoir effleuvé les principes d'une science, on soit en état de l'enseigner. "*

zoo veel mogelijk, met dezelve bekend te maken, dit Hoofdstuk eindigen met eenige uitgewerkte voorbeelden van dezelve op te geven, na alvorens de volgende algemeene aanmerkingen op den voorgrond te hebben geplaatst.

Men is gewoon twee leerwijzen te onderscheiden, de synthetische en de analytische: de analytische is de eenige natuurlijke weg geweest der uitvinders, | die de eigenschappen der getallenvormen en meetkunstige figuren heb- [379]
ben ontdekt: hoe zij tot die ontdekkingen zijn gekomen, hoe, bij voorbeeld, PYTHAGORAS zijn theorema gevonden heeft, is onbekend; zekerlijk altijd niet langs den eenvoudigsten weg; *thans is, in de meetkunst*, vooral sedert de uitvinding van de algemeene rekenkunst, *de analytische methode, welke oudtijds in het beschouwen van de figuur bestond, tot algemeene regels gebracht, welke de kennis van de eigenschappen der eenvoudige figuren onderstellen, benevens de regels der algemeene rekenkunst.* Het is die analytische methode, met welke men wel vroeg beginnen moet, maar niet eer beginnen kan, voor dat men eenige kundigheden, zoo wel van de eigenschappen der meetkunstige figuren, als van de algemeene rekenkunst, verkregen heeft. De synthetische leerwijze is die van de uitvinders niet; maar zij onderstelt reeds eene groote mate van kennis; *zij bestaat in eene geleidelijke voordragt der leerstellingen, van de eenvoudige beginselen tot meer en meer verhevene kundigheden opklimmende:* het is die leerwijze, volgens welke de leerboeken, de eerste beginselen behelzende, zijn opgesteld; zelfs die gene, die naar den uiterlijken schijn een analytischen vorm hebben, zoo als de allereerste gronden der stelkunst, zijn synthetisch, zoodra er eene merkbaar opklimmende orde en schikking in dezelve worden waargenomen. | [380]

In de synthetische manier van voordragen is alles in leerstellingen (in de algemeene rekenkunst somtijds onder den vorm van regels) voorgesteld, in welke de eigenschappen van eenen getallenvorm of van eene meetkunstige figuur worden voorgesteld, om betoogd te worden; of ook somtijds wel iets onder den vorm van een werkstuk wordt voorgesteld. In elke leerstelling is iets, dat als *voorwaarde* van dezelve wordt aangenomen, en iets, dat als een *noodzakelijk gevolg van die voorwaarde* wordt voorgesteld. *Betoogen, bewijzen of demonstreren* is nu aan te wijzen: 1^o. *dat het gestelde een noodzakelijk gevolg is van het onderstelde;* 2^o. *dat het onmogelijk anders zijn kan.* De grondslagen van die betoogen zijn, vooreerst, de algemeene redebeginselen, ten tweede de reeds erkende waarheden, en eindelijk de wettigheid der besluiten. Om een betoog of eene demonstratie te verstaan en te kunnen volgen, wordt in de eerste plaats vereischt, dat men den zin van de leerstelling, die zal betoogd worden, begrijpe, en in dezelve duidelijk onderscheide, wat als voorwaarde of onderstelling aangenomen, en als een gevolg van dezelve gesteld wordt; en ten anderen, dat men, in de aaneenschakeling der sluitredenen, de klem der waarheid van elken term vatte; waardoor eindelijk, na afloop van het betoog, de innerlijke overtuiging moet geboren worden.

De innerlijke overtuiging van de waarheid eener | leerstelling te gevoelen, [381]
is van het grootste gewigt; dit gevoel in ons te verfijnen is het eenige behoedmiddel tegen dwaling en vooroordeel. Men mag derhalve alle middelen gebruiken, die dienen kunnen, om *a posteriori* de waarheid eener leerstelling te bevestigen, welke middelen doorgaans in beproevingen of verificatien bestaan; *doch men hoede zich, die verificatien voor bewijzen aan te nemen; betoogen moeten eigenlijk aanwijzen, hoe eene leerstelling met andere, reeds erkende, zamenhangt.*

Eindelijk is er nog iets, dat vooral in de meetkunstige betoogen in aanmerking moet komen. De meetkunstige leerstellingen zijn algemeen; in het betoog heeft men echter eene bijzondere figuur voor oogen; *men moet derhalve doen opmerken, dat dit betoog voor elke andere figuur, die onder dezelfde voorwaarden bestaat, denzelfden vorm, en bij gevolg dezelfde kracht en denzelfden nadruk blijft behouden.*

Men zegt al vrij algemeen, dat men van de eene tot de andere leerstelling niet mag overgaan voor dat men het vorige begrepen, en van hetzelve overtuigd is; *maar daaruit volgt niet dat men eenen leerling geene waarheid mag voorhouden, die in het vervolg nog moet betoogd worden.* Men kan, bij voorbeeld, aan iemand, die reeds eenige vorderingen in de meetkunst gemaakt heeft, zeer goed doen begrijpen, dat het oppervlak van eenen bol gelijk is
aan viermaal den | inhoud van deszelfs grooten cirkel; doch hij moet dit aan- [382]
nemen op goed geloof, maar niet als eene waarheid, die hij zelf overtuigend gezien heeft. Van die handelwijze moet men somtijds wel gebruik maken; wanneer ik, bij voorbeeld, alle bewijzen voor het stelsel van Copernicus zou willen bijbrengen, waarop hetzelve berust, zou het niet mogelijk zijn, aan iemand de nuttigste kundigheden te leeren kennen; men zorge alleen slechts, *dat men in dit geval de zaken als wetenschappelijke berigten van anderen voordrage, en niet als waarheden, waarvan men de betoogen gezien heeft.*

En nu gaan wij, na deze korte algemeene aanmerkingen gemaakt te hebben, over tot het opgeven van voorbeelden van onze manier van leeren, om te strekken tot modellen voor zulke leeraars, welke aan dezelve niet gewoon zijn, om hun onderwijs er naar in te rigten. Wij zullen tot dat einde voorbeelden uit de getallenleer en de leer der uitgebreidheden nemen.

A. Voorbeelden uit de getallenleer.

De eerste cursus mijner *wiskundige lessen* is een commentarie, eene uitbreiding of opheldering op de *Allereerste gronden der Cijferkunst,* vooral van het eerste deeltje: de jonge en nog onbedreven leeraar kan uit dien eersten cursus de noodige ophelderingen verkrijgen aangaande din|gen, die in de aller- [383]
eerste gronden zeer kort behandeld zijn; hij zal uit dit boek vele kunstgrepen leeren kennen, die hij dient te weten, om van tijd tot tijd aan zijne leerlingen voor te stellen; als, bij voorbeeld, *het gebruik van de Neperiaansche staafjes, de manier, om de theorie der breuken door figuren op te helderen* enz. *Men beginne echter,* zoo als ik boven gezegd heb, *met dit boekje niet, voor dat al de scholieren, die men in de eerste klasse opneemt, zonder moeite vermenigvuldigen en deelen.* Men late in elke les een gedeelte voorlezen, en vrage de verklaring van hetgeen gelezen is, naar aanleiding der vragen, die onder den voet der bladzijden staan, en oefene bij aanhoudendheid de leerlingen, om de bepalingen en regels te zeggen, zoo als zij in het leerboek voorkomen; wel te verstaan, na dat men dezelve goed begrepen heeft. Dit zal in het eerst al zeer gebrekkig gaan; men zal bevinden: dat de jonge lieden, al hebben zij de zaak goed begrepen, of verkeerde, of overtollige woorden gebruiken; eene vraag, regtstreeks voorgesteld, zullen zij, of verkeerd beantwoorden, of niet durven spreken, omdat zij vreezen, verkeerd te zullen antwoorden; maar zoo zij die zwarigheid te boven zijn, zal men hiermede geene moeite meer hebben. Het optellen, aftrekken, en inzonderheid het vermenigvuldigen en deelen der gewone breuken (zie *XXIV - XXVII lessen*) zullen wel begrepen, maar (zoo men niet telkens die regels laat herhalen) spoedig vergeten | worden. *Het* [384]
bewijst niets nadeeligs, wanneer de leerlingen in dit punt lang zwak blijven; want de ondervinding heeft mij geleerd, dat men meer gevorderden, en die toch goede mathematici zijn geworden, nog gedurig die regels moest herinneren. Het zou echter verkeerd zijn, bij die regels langer te blijven staan, dan noodig is, om dezelve te leeren uitvoeren; want dit zou eene schadelijke verveling veroorzaken, die men altijd, zoo veel mogelijk, moet vermijden; wie eenige leergierigheid heeft, wil steeds vooruit, en hieraan moet men voldoen, zoo veel als maar eenigszins met het belang van eene regelmatige leerwijze kan overeengebragt worden. Nog moet ik, alvorens hiervan af te stappen, herinneren, *dat men in de bewerkingen de teekens zoo moet schrijven, als ik*

dezelve heb opgegeven; als men toch kruisen, strepen en stokken maakt, kan men dan wel niet even goed, en in denzelfden tijd, de teekens schrijven, zoo als het behoort, en bij alle wiskundigen in gebruik is? In de getallenleer worden de regels geoefend door het uitwerken van voorbeelden. Zie hier, hoe ik er mede te werk ga. Ik stel een zeker aantal leerlingen, die ik Pieter, Paulus, Hendrik, Willem, Victor, Cajus enz. zal noemen, en stel de volgende vraag voor.

I Voorbeeld. *Men begeert 35 R. roeden, 7 voeten, 5 duimen en 11 lijnen met* $13\frac{5}{16}$ *te vermenigvuldigen.*

Na dat ik deze vraag heb voorgesteld en op het bord geschreven, vraag ik als volgt:

| *Zeg mij,* Pieter! *wat zijn 35 R. roeden, 7 voeten, 5 duimen, 11 lijnen?* [385]

Hierdoor wordt eene zekere lengte voorgesteld, die eenige geheelen, deelen en onderdeelen bevat.

Paulus, *welke zijn hier de geheelen?*

Rijnlandsche roeden.

Welke is de aangenomene verdeeling van zulk eene roede?

Eene Rijnlandsche roede bevat 12 voeten, een voet 12 duimen en een duim 12 lijnen.

Zeg mij nu, Hendrik! *wat beteekent het die lengte met* $13\frac{5}{16}$ *te vermenigvuldigen?*

Dat men eene lengte zoeken moet, die dertien maal de gegevene lengte bevat, en daar nog moet bijvoegen eene lengte, die gelijk is aan vijf maal één zestiende deel van de gegevene lengte.

Zeer wel geantwoord: maar zeg mij nu eens, wat is vermenigvuldigen?

In geheele getallen die kortere bewerking, om, buiten de gewone optelling, de som van gelijke getallen te vinden.

Maar, Willem! *wij hebben wel geleerd getallen met getallen te vermenigvuldigen; maar hier wordt gevraagd een lengte met een getal te vermenigvuldigen; hoe moet dit verstaan worden?*

Even zoo als men een getal A twee, drie, vier en meer malen kan nemen, zoo kan men ook eene lengte of lijn twee, drie, en vier malen nemen: in het voorgestelde vraagstuk, is de gewone lengte in getallen van roeden en minder deelen van dezelve gegeven, die getallen kunnen met een ander vermenigvuldigd worden, en dan zal men hetzelfde verkrijgen, als of men die lengte op eene regte lijn zoo veel maal naast elkander voegde. | [386]

Verklaar mij nu, PIETER! *hoe de 35 R. roeden, 7 voeten, 5 duimen, 11 lijnen, met 13 zullen vermenigvuldigd worden.*

Het vermenigvuldigen bestaat hier uit vier deelen, die te zamen genomen de geheele lengte voorstellen; volgens den *III. Grondregel, bladz.* 18, moet elk dezer deelen dertien maal genomen worden, en die gedeeltelijke produkten bij elkander worden opgeteld. Dertien maal 11 lijnen zijn 143 lijnen; maar dit schrijft men zoo niet; men moet die 143 lijnen met 12 lijnen meten, om te vinden, hoeveel duimen men voor die 143 lijnen nemen kan; dit geeft 11 duimen, 11 lijnen. Verder zijn dertien maal 4 duimen 65 duimen; hierbij tel ik de 11 duimen van het vorige produkt; dit geeft 76 duimen; deze meet ik met 12 duimen, en vind, dat 76 duimen gelijk zijn aan 6 voeten en 4 duimen. Wederom zijn dertien maal 7 voeten 91 voeten; hier tel ik bij de 6 voeten van het vorige produkt, en dan vind ik 97 voeten; deze meet ik met 12 voeten, om dezelve tot roeden te herleiden, en dan vind ik 8 roeden 1 voet. Eindelijk zijn dertien maal 35 roeden 455 roeden; hierbij de 8 roeden van het vorige produkt optellende, vind ik 463 roeden. Het blijkt nu: dat dertien maal de gegevene lengte is 463 roeden, 1 voet, 4 duimen, 11 lijnen.

Dit is alles wel; maar nu is de vraag nog niet opgelost: zeg mij, CAJUS! *wat moet er nog meer gedaan worden?*

Bij dertien maal de gegevene lengte moet nog vijf maal één zestiende deel van dezelve worden bijgeteld.

Hoe zou dit kunnen gevonden worden?

Op tweeërlei wijze: 1^o. door te bepalen, hoe groot één zestiende deel van de gegevene lengte is, en dat zestiende gedeelte vijf maal te neemen, 2^o. of door een zestiende gedeelte van vijf maal de lengte te bepalen. | [387]

Nemen wij de laatste manier, en laat PIETER *nu eens berekenen, hoeveel vijf maal de gegevene lengte bedragen zal.*

Deze bedraagt 178 roeden, 1 voet, 5 duimen, 7 lijnen.

Van die lengte moet nu één zestiende genomen worden: hoe vindt men dit?

Door dezelve lengte in zestien gelijke deelen te verdeelen.

Herinnert gij u nog, PAULUS! *wat onderscheid er is tusschen eene verhoudings- en eene verdeelings-divisie?*

Door dezelfde bewerking, die men eenvoudig deeling noemt, wordt de verhouding van twee getallen of van twee gelijkslachtige grootheden, die in getallen van dezelfde maat zijn voorgesteld, gevonden, en dit is de verhoudingsdivisie; ten anderen vindt men ook door die bewerking, hoe groot een evenmatig deel van eenig getal of van eenige grootheid is, die in getal van eenige maat is voorgesteld.

Verklaar mij nu, HENDRIK! *hoe die verdeeling in ons tegenwoordig geval bewerkt wordt.*

Één zestiende van 178 roeden is 11 roeden, en men houdt nog 2 roeden, 1 voet, 5 duimen, 7 lijnen over. Verder zijn 2 roeden en 1 voet gelijk aan 25 voeten; van 25 voeten is één zestiende gedeelte 1 voet, en er blijven over 9 voeten, 5 duimen, 7 lijnen. Wederom zijn 9 voeten, 5 duimen gelijk aan 113 duimen; van 113 duimen is één zestiende gedeelte 7 duimen, en er blijven 1 duim, 7 lijnen over. Eindelijk zijn 1 duim, 7 lijnen gelijk 19 lijnen, en één zestiende deel van 19 lijnen is $1\frac{3}{16}$ lijn. Gevolgelijk zal vijf zestiende van de gegevene lengte gelijk zijn aan 11 roeden, 1 voet, 7 duimen, $1\frac{3}{16}$ lijnen.

Wat moet nu hiermede gedaan worden? | [388]

Deze lengte moet bij dertien maal de gegevene lengte, die wij boven gevonden hebben, worden opgeteld, en dit zal geven: 474 roeden, 3 voeten, 0 duimen, 0 $\frac{3}{16}$ lijnen.

Wat denkt gij er van, WILLEM! *Zou men dit anders hebben kunnen bewerken?*

Het gemengde getal $13\frac{5}{16}$ kan door de ongebruikelijke breuk $\frac{213}{16}$ worden voorgesteld; met $\frac{213}{16}$ te vermenigvuldigen is hetzelfde, als te vermenigvuldigen met $13\frac{5}{16}$. Indien men dus de gegevene lengte tweehonderddertien maal neemt, en van dat veelvoud één zestiende gedeelte, zal men hetzelfde moeten verkrijgen. En zie hier de uitwerking.

Het is op deze of dergelijke wijze, dat men de leerlingen, door het uitwerken van toepasselijke voorbeelden, in de duidelijke kennis van de gronden moet oefenen: zij worden langs dien weg tot aandacht opgewekt, worden aan denken gewoon gemaakt, en oefenen zich in de gronden eener praktische redeneerkunde.

II. VOORBEELD. Nemen wij uit de *Allereerste gronden der cijferkunst, II Deel, bladz. 19, art. 510*, de stelling: *"Wanneer twee grootheden A en B tot elkander staan in reden, als een getal a tot een getal b, dan zal de grootheid A, zoo veel maal genomen, als er éénheden in b zijn, gelijk zijn aan de grootheid B, zoo veel genomen als er éénheden in a zijn."*

Na deze stelling, of zelf gelezen te hebben, of te hebben laten lezen, begin ik in dezer voege.

PIETER! *wat wordt in deze leerstelling aangenomen?*

Dat er twee gelijkslachtige grootheden A en B zijn, en | dat deze tot [389] elkander staan in reden, als een geheel getal a tot een geheel getal b.

Zeg mij, PAULUS! *wat gelijkslachtige grootheden zijn.*

Het zijn grootheden, die tot één zamenhangend geheel kunnen vereenigd worden, als, bij voorbeeld, lengten en lengten, vlakken en vlakken, ligchamelijke uitgebreidheden en ligchamelijke uitgebreidheden, tijden en tijden, gewigten en gewigten enz.

Indien dan de grootheid A eene lengte is, zou dan de grootheid B niet een ligchamelijke inhoud kunnen zijn?

Dan zouden A en B ongelijkslachtig en niet vergelijkbaar zijn.

Maar, HENDRIK! *wat wil het nu zeggen, dat A tot B in reden staat, als het getal* a *tot het getal* b*?*

Het wil zeggen: dat de gelijkslachtige grootheden A en B eene gemeene maat hebben, die a maal in A en b maal in B begrepen is.

Wat is eene gemeene maat van twee gelijkslachtige grootheden?

Eene derde gelijkslachtige grootheid M, die een evenmatig deel van elke dezer twee grootheden A en B in het bijzonder is.

En wanneer is eene grootheid M een evenmatig deel van eene andere grootheid A?

Wanneer die grootheid M een geheel getal malen in de grootheid A begrepen is.

Zoo ik dus zeg, A staat tot B, als 13 tot 8, wat wil dit zeggen?

Eenvoudiglijk dat A dertien, en B acht van dezelfde maten bevat.

En wat geven dan die twee getallen 13 en 8 te kennen? | [390]

De verhouding, de reden (*ratio*), de betrekking of overeenstemming der gelijkslachtige grootheden A en B.

Geven dan die twee getallen iets bepaalds te kennen?

Zeer zeker! Want indien ik zeg: A is grooter dan B, dan zeg ik iets geheel onbepaalds; want zoo A honderd deelen, en B acht deelen bevatte, dan zou ook A grooter dan B zijn; en nogtans zou, in dit laatste geval, B in A meer malen begrepen zijn, dan in het eerste; die getallen geven dus eene precieze betekenis aan het woord *grooter*; zij leeren, hoe veel maal A grooter dan B is.

Dienen die twee getallen ook nog niet tot een ander eindoogmerk?

Ja! Indien ik A met B (gesteld dat $A : B = 13 : 8$ is) wilde meten, dan zou ik bevinden, dat A in B één maal begrepen is, met nog een stuk C, en dat één achtste gedeelte van B juist vijf maal in C is begrepen; maar wanneer de verhouding van B in A door de getallen 8 en 13 is voorgesteld, dan behoef ik niet meer die twee grootheden *in natura* te meten; want ik kan dit nu met de getallen zelve doen: het getal 8 is in het getal 13 één maal begrepen, 13 is gelijk 8 en 5; de vijf, die overblijft, is juist vijf maal één achtste deel van acht, welke de maat B voorstelt. Getallen door elkander te deelen is het eene getal door het andere te meten.

Ik geloof dat gij nu allen den zin en de meening van de voorwaarde, de onderstelling of hypothesis begrijpt; wat was, Willem! *die onderstelling ook?*

Indien A tot B staat, als het getal a tot het getal b.

Die getallen a en b zijn zeker geheelen of gebrokens?

Neen! Het moeten geheele getallen verbeelden, en wel geheele getallen, die geen gemeenen deeler hebben.

En dat waarom? | [391]

Omdat de verhouding van twee gelijkslachtige grootheden altijd in de kleinste getallen, dat is, in getallen, die geen gemeenen deeler hebben, moet worden voorgesteld.

Dit versta ik niet; verklaar mij dit nader.

Indien ik zeg, A staat tot B, als 20 tot 15, dan geef ik wel een bepaald denkbeeld van de overeenstemming tusschen A en B, maar niet op de eenvoudigste wijze; want vijf gemeene maten, in welke die grootheden zijn voorgesteld, zijn vier maal in A, en drie maal in B begrepen, en dus kan vijf maal de gemeene maat als eene grootere gemeene maat van A en B beschouwd worden; men kan dus zeggen: A staat tot B, als vier tot drie. Kleiner getallen kan men zich gemakkelijker dan groote voorstellen, en daarom moet men altijd de verhouding in de kleinste getallen aanduiden.

Dit begrijp ik nu ook volkomen: maar hoe zoudt gij, Victor! *dit alles nu in wiskundige teekens schrijven?*

Indien $\mathrm{A}:\mathrm{B} = a : b$ is.

Zeer goed! maar wat wordt nu als een gevolg van die voorwaarde gesteld?

Dat b maal de grootheid A gelijk zal zijn aan a maal de grootheid B, dat is $b\mathrm{A} = a\mathrm{B}$.

Helder dit eens op door een voorbeeld.

Laat A eene lijn zijn, die 7 duimen lang, en B eene, die 4 duimen lang is, dan staat A tot B, gelijk 7 tot 4; nu is vier maal A vier maal 7, dat is 28 duimen lang, en zeven maal B is zeven maal 4, dat is 28 duimen lang; dus $4\mathrm{A} = 7\mathrm{B}$: en zoo zal men het in alle voorbeelden zien uitkomen.

Dit zijn slechts proeven, maar nog geen algemeen bewijs. Zeg mij eens, indien A to B staat, als a tot b, wat beteekent dit? | [392]

Dat de gelijkslachtige grootheden A en B eene gemeene maat M hebben, die b maal in A, en a maal in B begrepen is.

Is dan niet $A = aM$ en $B = bM$?

Dit is juist zoo.

Indien gij de vergelijking $A = aM$ met b vermenigvuldigt, wat zult gij dan verkrijgen?

Dan zal bA = abM worden, omdat dezelfde veelvouden van gelijke grootheden gelijk zijn.

En indien gij de vergelijking $B = bM$ met a vermenigvuldigt, wat verkrijgt gij dan?

Dan wordt aB = abM.

Indien nu $bA = abM$, en $aB= abM$ is, wat volgt daar uit?

Dat bA = aB is: en dit moest bewezen worden.

Lees nu het betoog in het boek!

Men late nu het betoog, in goede orde, achter elkander zeggen, en verbetere de fouten, die nog mogten gemaakt worden.

Wanneer men, op die wijze, met zijne leerlingen de *Allereerste gronden der Cijferkunst* leest, kan het niet missen, of de gronden moeten er bij allen goed en vast inkomen. Op dezelfde wijze moeten de *Allereerste gronden der Stelkunst* gelezen worden, en naar mate men vordert, de oplossing van werkstukken worden behandeld; waar van wij nog eenige voorbeelden zullen opgeven.

III Voorbeeld *Een gegeven getal a moet in twee | deelen zoodanig worden* [393]
verdeeld, dat de som van de tweede magten der deelen, verminderd met de tweede magt van derzelver verschil, gelijk zij aan een gegeven getal b.

Na deze vraag te hebben voorgelezen, of op het bord uitgeschreven, zeg ik:

Zoo het grootste van die deelen bekend was, zou men dan het kleinste kunnen vinden? wat dunkt u daarvan Cajus?

Men zou dit grootste deel van dan het gegevene getal a moeten aftrekken.

Wanneer ik dus dat grootste deel $= x$ stel, hoe zal dan het kleinste moeten worden voorgesteld?

Door $a - x$.

Hoe zou, Victor! *nu het verschil der deelen worden uitgedrukt?*

Het verschil der deelen wordt gevonden, indien men het kleinste deel van het grootste aftrekt, dat is, indien men van x aftrekt $a - x$, dat is, indien men schrijft $x - a + x$, of eenvoudiger, $2x - a$.

Wij hebben dus x, $a - x$ en $2x - a$ voor de deelen en het verschil der deelen; welke is nu, Willem! *de voorwaarde der vraag?*

Dat de som van de tweede magten der deelen, met de tweede magt van derzelver verschil verminderd, aan het gegevene getal b moet gelijk zijn.

Zeer goed, maar hoe schrijft gij dat?

$x^2 + (a - x)^2 - (2x - a)^2 = b.$

Welke soort van vergelijking is dit, Hendrik?

Het is eene vergelijking van eene onbekende, die waarschijnlijk tot de tweede magt zal opklimmen.

Zeg mij, Paulus! *hoe die vergelijking tot den eenvoudigsten vorm wordt gebracht?* | [394]

Door vermenigvuldiging wordt $(a - x)^2$ gelijk $a^2 - 2ax + x^2$ en $(2x - a)^2*$ gelijk $4x^2 - 4ax + a^2$; men kan dus schrijven

$$x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - (4x^2 - 4ax + a^2) = b.$$

of wel, indien men de haakjes wegneemt:

$$x^2 + a^2 - 2ax + x^2 - 4x^2 + 4ax - a^2 = b.$$

en nu kan men al de gelijkslachtige termen bij elkander voegen, en dan zal men eindelijk verkrijgen:

$$-2x^2 + 2ax = b.$$

waardoor de vergelijking veel eenvoudiger wordt.

Maar is nu die vergelijking nog wel onder den vorm voorgesteld, onder welke men doorgaans eene tweede magtsvergelijking voorstelt?

Neen! vooreerst moeten al de termen in het voorste lid komen, en de eerste term van het voorste lid moet altijd x^2 zijn: om dit te verkrijgen schrijf ik eerst:

$$-2x^2 + 2ax - b = 0$$

en nu keer ik de tekens om; dan wordt de vergelijking:

$$2x^2 - 2ax + b = 0$$

en eindelijk deel ik alles door twee, dan wordt zij eindelijk:

$$x^2 - ax + \frac{1}{2}b = 0$$

en nu is de vergelijking onder den eenvoudigsten vorm gebragt, en tot de oplossing gereed gemaakt.

RIGTER! *herinnert gij u nog de eigenschappen van de tweede magtsvergelijkingen?*

Zij hebben altijd twee wortels (bestaanbare of onbestaanbare), dat is, de onbekende heeft altijd twee waarden, die beide aan de vergelijking voldoen; de som van die waarden is gelijk aan den coëfficient van den tweeden term, met het tegengestelde teeken: die coëfficient is in ons geval $-a$; gevolgelijk zal de som van de wortels a zijn, en het produkt van de wortels is gelijk aan den bekenden term $\frac{1}{2}b$, met zijn eigen teeken genomen. | [395]

Welke is nu, CAJUS! *de regel, om uit de vergelijking, die wij gevonden hebben, de wortels te vinden?*

Het meetbare gedeelte der wortels is de helft van den coëfficient van den tweeden term, met een omgekeerd teeken genomen; de coëfficient is $-a$; het meetbare gedeelte is derhalve $+\frac{1}{2}a$. En om het onmeetbare gedeelte te vinden, moet men het meetbare gedeelte $\frac{1}{2}a$ tot de tweede magt verheffen; dan verkrijgt men: $\frac{1}{4}a^2$; hier achter moet geschreven worden de bekende term $+\frac{1}{2}b$, met een tegengesteld teeken; dit geeft dan den vorm $\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b$: de vierkants-wortel uit dien vorm is dan het onmeetbare gedeelte, en wij hebben gevolgelijk:

$$x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b}.$$

Waarom schrijft gij het dubbele teeken ± ?

Omdat de vierkants-wortel uit een getal zoo wel positief, als negatief, kan genomen worden; hetgeen dan ook de reden is, waarom x twee waarden heeft, namelijk:

$$x = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b}$$

$$x = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}b}.$$

Zou men het onmeetbare gedeelte van de wortels nog niet eenigszins anders kunnen voorstellen?

Indien men den vorm, die onder het wortelteeken staat, met vier vermenigvuldigt, maar dan (omdat de wortel uit vier gelijk twee is) de wortel-uitdrukking zelve door twee deelt, of met een half vermenigvuldigt, dan verkrijgt men* de formule:

$$x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2b}.$$

Zeg mij, welk eene beteekenis heeft nu deze formule?

Zij bevat niets meer dan eenen regel, die aanwijst, hoe men werken moet, om, wanneer a en b in bepaalde gevallen gegeven zijn, x te vinden.

Stel, bij voorbeeld, $a = 11$ *en* $b = 56$, *hoe zult gij dan door die formule de waarde van x vinden?*

| Deze waarde bereken ik aldus: [396]

$x = \frac{1}{2} \cdot 11 \pm \frac{1}{2} * \sqrt{121 - 112} = \frac{1}{2} \cdot 11 \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{9} = \frac{1}{2} \cdot 11 \pm \frac{1}{2} \cdot 3.$ of $x = \frac{1}{2} \cdot 11 \pm \frac{1}{2} \cdot 3,$ of $x = 7$ en $x = 4$.

En wat is nu het kleinste deel?

Het kleinste deel is hier $a - x$ of $11 - x$, dat is, 4 of 7.

Houdt dit proef?

Ja! want het verschil der deelen is 7 min 4 of 3; nu is:

$7 \times 7 + 4 \times 4 - 3 \times 3 = 49 + 16 - 9 = 56 = b.$

Maar zoo men nu het kleinste deel in een algemeenen vorm zou willen voorstellen, hoe zou men dan, Willem! *moeten te werk gaan?*

Dan zou men de waarde van x van a moeten aftrekken; het kleinste deel zou dan worden:

$$a - x = \frac{1}{2}a \pm \frac{1}{2}\sqrt{a^2 - 2b}.$$

En hoe zou men het verschil der deelen voorstellen?

Het verschil der deelen $2x - a$ zijnde, zoo wordt: $2x - a = a \pm \sqrt{a^2 - 2b} - a = \pm\sqrt{a^2 - 2b}$

Zou nu de algemeene oplossing even zoo proef houden, als wij gezien hebben, dat voor het bijzondere voorbeeld heeft plaats gehad? Beproef dit eens.

De tweede magt van het eerste of grootste deel, de waarde van x^2, wordt, na vermenigvuldiging en herleiding,

$$x^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - 2b}.$$

de tweede magt van het andere deel $a - x$ wordt:

$$(a - x)^2 = \frac{1}{2}a^2 - \frac{1}{2}b \pm \frac{1}{2}a\sqrt{a^2 - 2b}$$

indien men deze vierkanten bij elkaar optelt, dan vindt men voor de som:

$$x^2 + (a - x)^2 = a^2 - b.$$

Voorts hebben wij gevonden voor het verschil $2x-a=\pm\sqrt{a^2-2b}$, gevolgelijk is:

$$(2x-a)^2=a^2-2b$$

| dit vierkant moet nu van de som der vierkanten x^2 en $(a-x)^2$ worden [397]
afgetrokken, en heeft men:

$$x^2+(a-x)^2-(2x-a)^2=b.$$

waar uit blijkt: dat de algemeene waarden proef houden.

Maar nu nog iets; zeg mij eens, Hendrik! *kan men nu in de algemeene formule*

$$x=\frac{1}{2}a\pm\frac{1}{2}\sqrt{a^2-2b}$$

voor a en b alle getallen nemen?

Geenszins! $2b$ kan niet grooter zijn dan a^2; anders zou a^2-2b negatief worden, en negatieve getallen hebben geen bestaanbaren vierkants-wortel.

Wanneer men, op deze wijze, met zijne leerlingen de regels en werkstukken behandelt, zal één uur werkens meer nut doen, dan dat gij hen verscheidene uren op de gewone wijze laat werken, en zij zullen weldra eene handigheid en vaardigheid in het oplossen van andere werkstukken verkrijgen. Wanneer ik nu, op die hoogte zijnde, zulk een werkstuk heb behandeld, geef ik een ander op, dat bijna in denzelfden geest is; bij voorbeeld: *een getal a in drie deelen zoodanig te verdeelen, dat het verschil van twee der deelen gelijk zij aan b, en de som van de tweede magten der deelen gelijk c;* om dit in een bepaalden tijd geheel in geschrift uit te werken. Maar geven wij nog een ander voorbeeld.

IV Voorbeeld. *Acht personen, A, B, C, D, E, F, G, H, maken onderling eene afspraak, dat zij, twee aan twee, zoo dikwijls zulks mogelijk is, zullen gaan wandelen, zonder dat twee, die reeds zamen zijn uit geweest, op | nieuw* [398]
zullen uitgaan; men vraagt: 1^o. *op hoeveel verschillende wijzen zulks kan geschieden;* 2^o. *en ten anderen, of men, het aantal personen gelijk n stellende, hierop een algemeenen regel kan vinden.*

Ik begin de personen, in hunne alphabetische volgorde, op eene rij te zetten; aldus:

A, B, C, D, E, F, G, H

en vraag: *ziet gij niet,* Pieter! *dat A met al de overigen kan uitgaan; te weten:*

AB, AC, AD, AE, AF, AG, AH;

Ja! dit zie ik duidelijk, en dit maakt juist zeven wandelingen.

Juist; en onthoud dit! Ik zal het op het bord laten staan; maar kan nu ook op dezelfde wijze B niet met al die anderen zeven wandelpartijen maken?

Dit zie ik duidelijk, en deze wandelpartijen zullen zijn:

BA, BC, BD, BE, BF, BG, BH.

Zeer goed, maar merkt gij niet, dat er onder die laatste wandelpartijen al ééne heeft plaats gehad?

Ja, de wandelpartij BA, die dezelfde is als AB.

Deze moet dus uitgesloten worden, en hoeveel blijven er dan over?

De volgende zes wandelpartijen:

BC, BD, BE, BF, BG, BH.

Zeer goed; onthoud dit getal zes. Indien nu C met al de overigen uitgaat, hoeveel wandelpartijen geeft dit?

De zeven volgende:

CA, CB, CD, CE, CF, CG, CH.

maar ik zie, dat de twee eerste CA en CB reeds hebben plaats gehad, en dat deze vijf

CD, CE, CF, CG, CH

nieuwe wandelpartijen zijn, die nog geen plaats hebben gehad. | [399]

Dit hebt gij zeer juist opgemerkt. Indien nu D met alle zeven anderen uitgaat, zal men hebben

DA, DB, DC, DE, DF, DG, DH

hoeveel van die wandelpartijen hebben er reeds plaats gehad?

De drie eerste, zoo dat de vier laatste

DE, DF, DG, DH

geheel nieuwe wandelpartijen zijn.

Zoo nu E met al de overigen uitgaat, hoeveel dan?

Slechts drie; namelijk EF, EG, EH.

En zoo F met de overigen uitgaat, hoeveel dan?

Slechts twee, FG, FH.

En hoeveel, zoo G met de overigen uitgaat?

Slechts eene, namelijk GH.

Schrijf nu alle wandelpartijen die wij gevonden hebben, eens onder elkaar.

Deze zijn bevonden te zijn:

AB	AC	AD	AE	AF	AG	AH.
	BC	BD	BE	BF	BG	BH.

CD	CE	CF	CG	CH.
	DE	DF	DG	DH.
		EF	EG	EH.
			FG	FH.
				GH.

Denk nu eens een oogenblik na; zouden er geene nieuwe te vinden zijn, die wij nog niet aangetroffen hebben?

Ik kan er geene vinden.

Dit is natuurlijk; want wij hebben, in eene geregelde volgorde, alle zamenvoegingen nagegaan, en niets overgeslagen; wij hebben dus alle mogelijke combinatien moeten aantreffen. Maar zeg mij, zou men nu, zoo als die | [400]
wandelpartijen in eene tafel zijn opgeschreven, niet ligtelijk derzelver aantal kunnen vinden? Laten wij eens van de onderste naar de bovenste rij opwaarts gaan, wat vinden wij dan?

In de onderste rij is ééne partij, in elke volgende rij ééne meer, in de bovenste zeven, zoo dat al de partijen te zamen zijn:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 = 28.$$

Dit is goed geteld; maar zoo er nu negen personen waren, hoeveel partijen zouden er dan in de bovenste rij zijn?

Na een weinig bedenkens, acht, en het getal der partijen zou zijn:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36.$$

En als er tien partijen waren?

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45.$$

Laten wij nu het getal der personen eens algemeen gelijk n stellen; waaraan zou dan het aantal wandelpartijen gelijk zijn?

Aan de som der natuurlijke getallen van 1 tot $n - 1$; namelijk aan:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \text{enz.} + (n - 2) + (n - 1).$$

Bedenk nu eens, of gij geen middel ziet, om de som van die getallen in eene enkele formule voor te stellen.

Die getallen maken eene rekenkunstige reeks, waarvan de eerste term één, de laatste term $n - 1$, en het getal der termen $n - 1$ is; nu is de som van de termen eener rekenkunstige reeks gelijk aan de som van de uiterste termen, vermenigvuldigd met de helft van het getal der termen: de som der uiterste termen is $1 + (n-1) = 1 + n - 1 = n$; derhalve is de som van al de termen volgens den regel $n \times \frac{1}{2}(n-1)$ of $\frac{n(n-1)}{2}$.

Zie daar dus de vraag opgelost, vervolg ik. Hier heeft | eene manier van [401]
redeneren plaats, die eenigszins verschilt van de manier van redeneren, waarvan men zich in de oplossing van andere vragen bedient. Wij hebben acht personen gesteld, en na dit geval onderzocht te hebben, hebben wij bedaardelijk nagegaan, wat er zou plaats hebben, indien er negen, tien, elf, en meer personen gesteld waren: al ten eerste hebben wij in die gevallen eene regelmatige opklimming bespeurd, die, hoe groot het getal der personen gesteld wordt, noodzakelijk dezelfde blijft, en zijn tot de algemeene formule $\frac{1}{2}n(n-1)$ gekomen; in welke nu een algemeene regel begrepen is, om, hoe groot het getal n mogt zijn, het aantal der zamenvoegingen, twee aan twee, op alle mogelijke wijzen, te vinden. Deze formule is van eene zeer groote nuttigheid. Stellen wij, bij voorbeeld, eene loterij van negentig nommers; op hoe veel onderscheidene wijzen kunnen er twee nommers worden uitgetrokken? Hier is $n = 90$; derhalve $\frac{1}{2}n(n-1) = \frac{1}{2} \times 90 \times 89 = 4005$. Zoo iemand dus op twee nommers eene inlage zet, is de waarschijnlijkheid, dat deze twee nommers er zullen uitkomen $\frac{1}{4005}$.

Men moet al vroegtijdig beginnen met het behandelen van zulke voorbeelden, die de nieuwsgierigheid kunnen opwekken, en in welke, zoo als men het noemt, analytische zetten voorkomen. Smakelooze vragen, waarvan onze vroegere leerboeken vol zijn, moet men verwerpen.

V Voorbeeld. *Eene algemeene formule te vinden voor de som van de tweede magten der natuurlijke getallen 1, 2, 3 enz., tot n ingesloten.*

Ik begin aldus. In de vraag, die ik u hier voorstel, | zult gij zeker geen gat [402]
zien: echter zijn er verscheidene middelen, om dezelve op te lossen. Één dezer middelen zal ik met u behandelen, en gij zult zien, hoe eene kunstige zamenvoeging van gedachten dikwijls tot eene eenvoudige oplossing kan brengen. Gij zijt bekend met de formule $(1+a)^3 = 1 + 3a + 3a^2 + a^3$. Wel nu deze zal ik eens tot eenen grondslag nemen, en, in plaats van 1, 2, 3, 4, 5, 6, enz. n, schrijven, 1, 1+1, 1+2, 1+3, 1+4, 1+5, 1+6 enz., $1 + (n-1)$, en met behulp van de aangehaalde formule de vergelijkingen schrijven:

$$1^3 = (1+0)^3 = 1$$
$$2^3 = (1+1)^3 = 1 + 3.1 + 3.1^2 + 1^3$$

$3^3 = (1+2)^3 = 1 + 3.2 + 3.2^2 + 2^3$
$4^3 = (1+3)^3 = 1 + 3.3 + 3.3^2 + 3^3$
$5^3 = (1+4)^3 = 1 + 3.4 + 3.4^2 + 4^3$

Gij ziet, dat men op deze wijze kan voortgaan en schrijven:

$$n^3 = (1 + (n-1))^3 = 1 + 3(n-1) + 3(n-1)^2 + (n-1)^3$$

$$(n+1)^3 = (1+n)^3 = 1 + 3.n + 3.n^2 + n^3.$$

Laat ons nu eens al die vergelijkingen optellen, en stellen wij, om dit gemakkelijk te doen:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + enz. + n^3 = P$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = enz. + n^2 = x$$

$$1 + 2 + 3 + 4 + enz. + n = q$$

dan zal die optelling geven:

$$P + (n+1)^3 = (n+1) + 3q + 3x + P.$$

Ziet gij nu niet, PIETER! *dat men deze vergelijking kan vereenvoudigen?*

Ja, men kan er P=P aftrekken, en dan wordt:

$$(n+1)^3 = (n+1) + 3q + 3x.$$

Maar is de waarde van q uit vorige beginsels niet bekend? | [403]

Ja! Men heeft $q = \frac{1}{2}n(n+1)$

Wat wordt dus onze vergelijking?

Deze wordt, wanneer men voor q de waarde schrijft:

$$(n+1)^3 = (n+1) + \frac{3}{2}n(n+1) + 3x$$

en wanneer men, om de breuk weg te maken, met twee vermenigvuldigt:

$$2(n+1)^3 = 2(n+1) + 3n(n+1) + 6x.$$

Wat beteekent nu in deze vergelijking x en wat n?

De letter x beteekent hier de nog onbekende som van de vierkanten der natuurlijke getallen, tot n ingeslooten, en n het aantal van die vierkanten.

Zoo dat gij, wanneer gij nu die vergelijking oplost, de waarde van x zult vinden, en zien, hoe die som van het getal n afhangt. Laat ons nu eens zien, hoe gij die vergelijking zult oplossen.

Eerst breng ik $6x$ in het voorste lid, en dan wordt:

$$6x = 2(n+1)^3 - 3n(n+1) - 2(n+1)$$

de termen van het achterste lid dezer vergelijking zijn, met betrekking tot $n+1$, gelijkslachtig, en ik kan dus schrijven:

$$6x = (n+1) \times [2(n+1)^2 - 3n - 2].$$

de termen van den factor tusschen [ ] ontwikkel ik aldus:
$2(n+1)^2 - 3n - 2 = 2n^2 + 4n + 2 - 3n - 2 = 2n^2 + n$
of $2(n+1)^2 - 3n - 2 = n(2n+1)$
en dus blijkt het, dat men stellen kan:

$$6x = n(n+1)(2n+1)$$

$$x = \frac{n(n+1)(2n+1)}{2.3} \quad \ldots . \; (A)$$

en zie daar, hoe de som van 1, 4, 9, 16 enz., tot n^2 ingesloten, van n afhangt.

Zeer juist! Laat ons nu eene proef nemen. Zoeken wij de som van 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, en 100: wat moet dan voor n genomen worden? | [404]

Dan is $n = 10$; derhalve $x = \frac{10.11.21}{6} = 385$, en dit getal vindt men ook, wanneer men die getallen optelt.

Die formule is van veel gebruik. Wanneer er in het vierkant 100 kogels in eene rij, en 100 zulke rijen liggen, dan liggen in dit vierkant 100 × 100 = 10000 kogels; boven op die rij ligt eene andere rij van 99 × 99 enz., tot dat in de bovenste laag slechts één kogel ligt; die stapel vertoont dan eene opklimmende pyramide: hoeveel kogels liggen er dan in dien stapel?

$$x = \frac{100 \times 101 \times 201}{6} = 338350.$$

Nu vervolg ik. Men ziet uit dit voorbeeld al wederom: *hoe men door de algemeene rekenkunst regels vindt, om met weinig moeite te vinden, wat men anders bezwaarlijk vinden zou.* Maar daar het zoo gemakkelijk gegaan is, om de som van de tweede magten van de natuurlijke getallen 1, 2, 3 enz., tot

n ingesloten, te vinden, zoo laat ons beproeven, of wij dien weg ook kunnen inslaan, om de som $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 +$ enz. $+n^3$ te vinden.

In het algemeen is $(1 + a)^4 = 1 + 4a + 6a^2 + 4a^3 + a^4$.

Wij hebben derhalve:

$1^4 = (1 + 0)^4 = 1$
$2^4 = (1 + 1)^4 = 1 + 4.1 + 6.1^2 + 4.1^3 + 1^4.$
$3^4 = (1 + 2)^4 = 1 + 4.2 + 6.2^2 + 4.2^3 + 2^4.$
$4^4 = (1 + 3)^4 = 1 + 4.3 + 6.3^2 + 4.3^3 + 3^4.$
$5^4 = (1 + 4)^4 = 1 + 4.4 + 6.4^2 + 4.4^3 + 4^4.$
$6^4 = (1 + 5)^4 = 1 + 4.5 + 6.5^2 + 4.5^3 + 5^4$
enz. enz.
$(n + 1)^4 = (1 + n)^4 = 1 + 4.n + 6n^2 + 4n^3 + n^4.$

| Nu is bekend, als volgt: [405]

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \text{ enz. } + n* = n \times \frac{n + 1}{2}$$

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + \text{ enz. } + n^2 = \frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6}$$

en men stelle:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \text{ enz. } + n^3 = x$$

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + 4^4 + 5^4 + \text{ enz. } + n^4 = P.$$

Wanneer wij dan al deze vergelijkingen optellen, dan zullen wij vinden:

$$P + (n + 1)^4 = (n + 1) + 4.\frac{n(n + 1)}{2} + 6.\frac{n(n + 1)(2n + 1)}{6} + 4x + P$$

Van deze vergelijking kan P=P worden afgetrokken; dan wordt

$$(n + 1)^4 = (n + 1) + 2n(n + 1) + n(n + 1)(2n + 1) + 4x$$

en hieruit haalt men dan,

$$4x = (n + 1)^4 - n(n + 1)(2n + 1) - 2n(n + 1) - (n + 1)$$

of, dewijl al de termen van het achterste lid met betrekking tot $(n + 1)$ gelijkslachtig zijn:

$$4x = (n + 1) \times [(n + 1)^3 - n(2n + 1) - 2n - 1]$$

Nu is verder: $(n+1)^3-n(2n+1)-2n-1 = n^3+3n^2+3n+1-2n^2-n-2n-1 =$ $\ldots\ldots = n^3 + n^2 == n^2(n+1)$
derhalve wordt eindelijk:

$$4x = (n+1)(n^2)(n+1) = n^2(n+1)^2$$

$$x = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

door welke formule de som van de kuben of derde magten der natuurlijke getallen zal gevonden worden. Stellen wij, bij voorbeeld, $n = 10$, dan is

$$x = \frac{10^2 \times 11^2}{4} = \frac{100 \times 121}{4} = 3025$$

zoo als bij de proef blijken zal, indien wij 1, 8, 27, | 64, 125, 216, 343, [406]
512, 729 en 1000 optellen. - *Beproef nu eens, of gij, door denzelfden weg te volgen, de som van de vierde en vijfde magten der getallen, 1, 2, 3, enz., tot n ingesloten, vinden kunt.*

Wat ik hier voorgesteld heb is eene geheel wetenschappelijke voordragt, die ik, van tijd tot tijd, met de socratische manier van ondervragen afwissel, om te beproeven, of de aandacht, zoo lang de voordragt duurt, genoegzaam gespannen blijft; als de korte verhandeling is afgeloopen, dan beproef ik doorgaans, of men de voornaamste trekken van dezelve gevat heeft, en neem aanleiding uit het verhandelde, om te leeren opmerken, wat meestal uit hetzelfde kan worden afgeleid. Ik vervolg.

Komen wij eens tot het behandelde terug. Wij hebben gevonden:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + enz. + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + enz. + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$1 + 8 + 27 + 64 + 125 + enz. + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Zeg nu eens, PIETER! *indien in al deze reeksen, n hetzelfde getal betekent, bij voorbeeld, n = 100, en gij vergelijkt de eerste en derde reeks met elkander, bemerkt gij dan niet eene merkwaardige overeenstemming tusschen de som* *der natuurlijke getallen, 1, 2, 3, 4 enz., en tusschen de som van derzelver derde magten, 1, 8, 27, 64 enz. ?* | [407]

Indien ik de getallenvorm $\frac{n(n+1)}{2}$, zijnde de som van de n eerste natuurlijke getallen, 1, 2, 3, enz. tot de tweede magt verhef, dan verkrijg ik $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$, en die vorm is juist de som van de derde magten van die getallen.

Maar wat besluit gij daaruit?

Ik besluit daaruit: dat de som van de kuben der natuurlijke getallen van één tot honderd, bij voorbeeld, gelijk is aan de tweede magt van de som dezer getallen, insgelijks van één tot honderd.

Zoudt gij dit door een proef kunnen bevestigen?

Bij voorbeeld, $1 + 2 + 3 = 6$, en $1 + 8 + 27 = 36$, en $36 = 6 \times 6$. Wederom $1 + 2 + 3 + 4 = 10$ en $1 + 8 + 27 + 64 = 100$ en $100 = 10 \times 10$. Wederom $1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$ en $1 + 8 + 27 + 64 + 125 = 225$ en nu is ook $225 = 15 \times 15$, enz.

Indien gij, Paulus! *de formule* $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ *eens in enkele termen ontwikkelt, wat verkrijgt gij dan?*

Dan verkrijg ik $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$

Ziet gij dus niet, dat de som van $1 + 4 + 9+$ *enz.* $+n^2$ *den vorm* $An^3 + Bn^2 + Cn$ *heeft?*

Dat zie ik duidelijk.

Indien men nu eens, a priori, *had kunnen nagaan, dat de som van* $1 + 4 + 9+$ *enz.* $+n^2$ *den vorm* $An^3 + Bn^2 + Cn$ *moest hebben, zoudt gij dan geen middel weten, om uit dien vorm alleen, en dan ook uit de aard der voorgestelde vraag, de aangenomene en onbekende coëfficienten* A, B *en* C *te vinden? want indien gij die gevonden hebt, dan is de vraag opgelost.*

Ik zie wel, dat dan de vraag zou opgelost zijn; maar hoe de coëfficienten te vinden, is iets, dat ik niet inzie. | [408]

Wel aan! Laat ik eens beproeven, of ik u er niet toe brengen kan! Moet de formule, die wij voor $1 + 4 + 9+$ *enz.* $+n^2$ *zoeken, voor alle waarden van n niet algemeen zijn?*

Dit moet zij ongetwijfeld; want indien n, bij voorbeeld, gelijk 20 is, moet ik door die formule de som van de tweede magten der 20 eerste getallen kunnen vinden.

Regt zoo; maar wat zou dan onze aangenomene formule worden, indien wij n=1 stellen?

Die zou worden $A + B + C$.

En de som zelve?

De som (er is slechts één term) die zou zijn *één.*

Geeft die onderstelling dus niet eene vergelijking?

Ja, die geeft de vergelijking;

$$A + B + C = 1 \;.\;.\;.\;.\;.\; (1).$$

Zoudt gij nu niet eene dergelijke vergelijking verkrijgen, wanneer n=2 gesteld wordt?

Indien men n=2 stelt, dan is de som 1+4=5, en wij hebben derhalve, in die onderstelling

$$8A + 4B + 2C = 5 \;.\;.\;.\;.\;.\; (2).$$

Dit is dan eene tweede vergelijking: maar zoudt gij nog niet eene derde vergelijking kunnen vinden, indien gij n=3 stelde?

Dan zou de som der termen zijn $1 + 4 + 9 = 14$, en men zou dus verkrijgen:

$$27A + 9B + 3C = 14 \;.\;.\;.\;.\;.\; (3).$$

Hebt gij nu geene vergelijkingen genoeg, om de onbekende coëfficienten A, B en C te vinden?

Wij hebben drie vergelijkingen, en drie onbekenden.

Trek twee maal de eerste vergelijking eens van de tweede af; wat verkrijgt gij dan?

$$6A + 2B = 3 \;.\;.\;.\;.\;.\; (4).$$

|*Trek nog eens drie maal de eerste vergelijking van de derde; wat houdt gij dan over?* [409]

$$24A + 6B = 11 \;.\;.\;.\;.\;.\; (5).$$

Trek nog eens drie maal de vierde vergelijking van de vijfde; wat verkrijgt gij dan?

$$6A = 2, \text{ of } A = \frac{1}{3}.$$

En zoo gij vier maal de vierde vergelijking van de vijfde aftrekt; wat verkrijgt gij dan?

$$-2B = -1 \text{ of } B = \frac{1}{2}.$$

Kunt gij nu ook C niet vinden?

Dit is uit de eerste vergelijking gemakkelijk; want $C = 1 - A - B = 1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$.

Ziet gij nu niet, dat alles gevonden is?

Ja; want de aangenomen vorm wordt nu $\frac{1}{3}n^3 + \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{6}n$, die juist dezelve is, als welke boven op eene andere wijze is gevonden.

Men kan dit, des verkiezende, verder uitbreiden. *Men zorge in het behandelen van de oplossing van vraagstukken, dat men gelegenheid vinde, om die beginselen, waarop alles het meest aankomt, het meest te herhalen.* Maar nu nog een woord over de vraagstukken. Men moet de rekenkunstige vraagstukken niet al te veel vermenigvuldigen, en met die beginnen, welke gemakkelijk in vergelijking kunnen gebragt worden, en die, welke niet zoo gemakkelijk in vergelijking te brengen zijn, tot het laatst uitstellen, en de leerlingen in deze helpen.

VI Voorbeeld. *Drie fabrijkeurs, A, B en C, hebben zoo veel volk in het werk, dat A en B aannemen een | werk in a dagen te leveren, A en C in* [410] *b dagen, en B en C in c dagen; in hoe veel dagen zouden zij dit werk, elk afzonderlijk, kunnen volbrengen?*

Ik begin met te zeggen: hier zijn drie onbekende grootheden, die wij aldus zullen kunnen aanduiden:

Stel, dat de fabrijkeurs, A, B en C, het werk, A in x, B in y, en C in z dagen kunnen volbrengen.

Ziet iemand uwer kans, om uit de opgave van de vraag tot eene vergelijking te komen?

Niemand zal waarschijnlijk antwoorden.

Wat dunkt u, Pieter! *zoo de vraag was opgelost, en gij wist dus, hoe groot x was, zoudt gij dan ook kunnen berekenen, wat gedeelte van het werk A, in éénen dag, zou afwerken?*

O ja! zoo x=20 was, bij voorbeeld, dan zou A, in éénen dag, één twintigste van het werk volbrengen; derhalve zal ook de breuk $\frac{1}{x}$ het gedeelte voorstellen van het werk, dat A, in éénen dag, zal volbrengen.

Dit is zeer goed gezegd; maar nu kunt gij immers ook vinden, welk gedeelte van het werk B en C, in éénen dag, zullen volbrengen.

Om dezelfde reden zal B, in éénen dag, $\frac{1}{y}$, en C, in éénen dag, $\frac{1}{z}$ gedeelte van het werk volbrengen.

Nu, dunkt mij, kunt gij ook wel eenen getallenvorm vinden, die voorstelt, hoe veel A en B te zamen, in éénen dag, zullen werken.

Het is klaar, dat A en B, te zamen werkende, in éénen dag, zoo veel zullen maken, als door $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ wordt voorgesteld. | [411]

En welk gedeelte van het werk zullen A en C, in éénen dag, maken?

Zoo veel, als door $\frac{1}{x} + \frac{1}{z}$ wordt voorgesteld. En nu zie ik ook, dat B en C te zamen, in éénen dag, zoo veel werk zullen verrigten, als door $\frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ wordt aangeduid.

Nu komen wij op den weg. Zeg mij, Paulus! *indien A en B, in éénen dag,* $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ *werk verrigten, hoe veel werk zullen zij dan in a dagen maken?*

Dit zal ik vinden, indien ik het werk $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$, dat zij te zamen, in éénen dag, volbrengen, a maal neem, en dit zal geven $\frac{a}{x} + \frac{a}{y}$ voor het werk, dat zij in a dagen maken.

Wel nu dan! is ook gegeven, hoe veel werk zij in de tijd van a dagen volbrengen?

In dien tijd maken zij het geheele werk.

Volgt daaruit nu geene vergelijking?

O ja, nu is klaarblijkelijk

$$\frac{a}{x} + \frac{a}{y} = 1.$$

Wel, Hendrik! *kunnen wij uit de vraag, en hetgeen reeds verklaard is, nog geene meer vergelijkingen vinden?*

Na een weinig bedenkens. Wij hebben nog deze twee vergelijkingen:

$$\frac{b}{x} + \frac{b}{z} = 1, \text{ en } \frac{c}{y} + \frac{c}{z} = 1.$$

| *Kan men, door de breuken weg te maken, die vergelijkingen niet eenvoudiger voorstellen?* [412]

Zij zullen dus doende worden:

$$ax + ay = xy \ldots . (1)$$

$$bx + bz = xz \ldots . (2)$$

$$cy + cz = yz \ldots . (3)$$

Hoe zoudt gij, Willem! *deze vergelijkingen oplossen?*

Ik zou uit (2) en (3), bij voorbeeld, z afzonderen, en hier uit eene tusschenvergelijking in x en y zoeken. Uit (2) volgt $z = \frac{bx}{x-b}$ en uit (3) $\frac{cy}{y-c}$; wij hebben dus:

$$\frac{bx}{x-b} = \frac{cy}{y-c}$$

Wel nu, en als gij deze verder herleidt?

$$bx(y-c) = cy(x-b)$$
$$bxy - bcx = cxy - bcy$$
$$bcx - bcy = (b-c)xy \;.\;.\; (4)$$

Ga nu voort.
Uit de (1) en (4) vergelijking los ik y op, en dan verkrijg ik:

$$y = \frac{ax}{x-a} = \frac{bcx}{(b-c)x+bc}$$

Los nu deze vergelijking op.
Wanneer ik die oplos, dan vind ik

$$x = \frac{2abc}{(a+b)c-ab}$$

Bereken nu verder de waarde van y en z.

$$y = \frac{2abc}{(a+c)b-ac} \text{ en } z = \frac{2abc}{(b+c)a-bc}.$$

Nu vervolg ik, Gij ziet dus, dat de waarden, die voor x, y en z zijn gevonden, op eene regelmatige wijze van de getallen a, b en c afhangen. *Maar, zoek nu eens eene | formule, waar door berekend kan worden, in hoe veel tijd* [413]
al de fabrijkeurs te zamen het werk zullen afmaken. Stel dien tijd $= t$; dan moet gij vinden:

$$t = \frac{2abc}{ab+ac+bc}.$$

Dit uit te werken is eene opgave, die ik u thans voorstel.

Deze bijgebragte voorbeelden zullen voor den jongen, en in de *methodus docendi* nog onbedreven, leeraar voldoende zijn, om een denkbeeld te verkrijgen van de wijze, op welke hij zijn onderwijs behoort in te rigten, om het aan alle middelmatige verstanden wezenlijk nuttig te maken. Het is waar, *die leerwijze zal hem in het eerst veel moeite kosten;* hij zal genoodzaakt zijn, hetgeen hij zelf geleerd heeft, nader en grondiger te bestuderen; omdat hij, handen aan het werk slaande, ondervinden zal, dat hem nog veel ontbreekt: de meesten van onze oudere onderwijzers, die steeds gewoon zijn geweest, hun ouden slenter naar Steenstra en Van Campen te volgen, zullen verpligt zijn, hunne gronden van den beginne af aan na te gaan: dit zal hun zekerlijk moeite kosten; maar deze moeite zal hun, dit kunnen wij verzekeren, veel voordeel en genoegen aanbrengen.

B. Voorbeelden van de methodus docendi, *in de leer der uitgebreidheden.*

Ik onderstel, dat men, gedurende den tijd, dat de scholieren met het leeren der gewone telkunst en | algemeene rekenkunde, in het eerste en tweede [414]
schooljaar, of in de twee eerste en het derde schooljaar, zijn bezig geweest, men hen ook met de eerste beginselen van het meetkunstig teekenen en de constructie der meetkunstige werkstukken, van tijd tot tijd, heeft bezig gehouden, naar aanleiding van het kleine boekje, dat ik tot dat einde heb opgesteld (gedurende welken tijd men zich ook in het handteekenen zou kunnen oefenen); zoo ik dit mag onderstellen, dan zal men hen geschikt bevinden, om tot de studie van de eigenlijke meetkunst over te gaan.

Bij die oefening in het meetkunstig teekenen, moet men zich van alle demonstratien onthouden, en men moet hen eenvoudig de namen der figuren leeren kennen, de regels van de constructien der eenvoudige werkstukken, bij herhaling, laten uitvoeren, en figuren, op het oog, naar eene zekere maat leeren teekenen; het gebruik van schalen en transporteur leren kennen, en hen, inzonderheid, oefenen in het netjes teekenen der figuren; hetwelk hun in het vervolg veel voordeel zal aanbrengen, en bekwaam maken, om hunne denkbeelden over eenige zaak in teekening te schetsen. Men zie verder mijne *Eerste Handleiding tot het Meetkunstig Teekenen,* die eerstdaags, tot dit einde, zal worden uitgegeven, waarin de aanwijzing zal voorkomen, hoe men dit boekje gebruiken moet.

De leerwijze of manier van onderwijs, in de | eigenlijk gezegde meetkunst [415]
te volgen, is dezelfde, als in de telkunst en algemeene rekenkunst; *maar voornamelijk komt het hier aan op het wel verstaan van de bepalingen, de zuiverheid der betoogen, en de kennis van den zamenhang der leerstellingen, en vooral dat men zijne scholieren daar heen brenge, dat zij de kracht en klem der betoogen gevoelen, en den noodzakelijken zamenhang tusschen de onderstelling en het gestelde in elke leerstelling gevoelen.*

De voorbeelden, die hier volgen, zijn uit mijne *Beginselen der Meetkunst* genomen, van welke een *verkort Uittreksel, ten gebruike der Latijnsche Scholen,* binnen kort zal worden uitgegeven: de figuren zijn dus in dit boek te vinden, en andere zal de lezer zelf uit de beschrijving kunnen opmaken.

I VOORBEELD. Men leze de eerste bepaling in de Inleiding. "De meetkunst is de kunst om te bepalen, hoe de grootte van elke uitgebreidheid afhangt van de wijze, op welke zij door hare grenzen bepaald is, ten einde, langs dien weg, de regels te vinden, om dezelve met uitgebreidheden van dezelfde soort te vergelijken."

Nu vervolg ik. *Zeg mij,* PIETER! *hoe zoudt gij, naar ons taalgebruik, het woord meetkunst uitleggen?*

De kunst om te meten, zoo als men zegt, *teekenkunst,* de kunst om te teekenen, *schilderkunst*, de kunst om te schilderen, enz.

Gij hebt, PAULUS! *reeds in de allereerste gronden der | cijferkunst menig-* [416]
maal van meten hooren spreeken, wat is dit?

Meten is eene zekere grootheid, zoo als de lengte van iets, bij voorbeeld, de lengte van een stuk linnen, naar de lengte van iets anders, bij voorbeeld, de lengte van ééne el te vergelijken; men doet dit dagelijks: men verdeelt, in de gedachten, de lengte van het linnen in deelen, die zoo lang zijn, als de lengte van ééne el, en telt, hoe veel zulke ellen in de lengte van dit stuk begrepen zijn. Zoo meet men ook de getallen; zoo is, onder anderen, de gewone deeling niets anders, dan het eene getal met het andere te meten.

Zeer wel geantwoord: wegen, om er dit bij te voegen, is ook meten: men zoekt door middel van een werktuig, dat men balans of weegschaal noemt, hoe veel maal het gewigt van een Nederlandsch pond of eene kilogramme in het gewigt van de zaak, die men weegt, begrepen is: maar moet dit meten en wegen daarom eene kunst genoemd worden? Zeg mij eens, HENDRIK! *wat is eene kunst?*

Eene kunst? dit zou ik moeijelijk kunnen zeggen: Ik zie wel, dat eene kunst zoo iets meer dan dagelijksch werk is.

Kunst is alles, waartoe regels worden vereischt, om iets uit te voeren, benevens eene handigheid, om die regels vaardig en gemakkelijk te kunnen uitvoeren: zoo is het, bij voorbeeld, eene kunst, om in eens, zonder optellen, te bepalen, hoe groot de som van de honderdduizend eerste getallen, 1, 2, 3, enz. tot 100000, is. Die geene algemeene rekenkunst verstaat, zou die getallen alle moeten uitschrijven en optellen; zoo hij elk getal in eene secunde tijds schrijven kan, dan zou hij weinig minuten minder dan achtentwintig uren daartoe noodig hebben, en dan zou hij nog de optelling van al die getallen
moe|ten uitvoeren; maar door de kunst weet ik, dat die som gelijk is aan [417]

$$100001 \times 50000 = 5000050000$$

De meetkunst is derhalve iets anders, dan het gewone dagelijksche meten.

Ziet gij van deze hoogte den Rotterdamschen toren wel? Wanneer ik u vroeg, om te meten, hoe ver wij hier van denzelven afstaan, dan zoudt gij dit niet kunnen uitvoeren, omdat gij, vooreerst, wegens vele beletselen, niet hier van daan naar dien toren in eene regte lijn kunt aangaan, en zoo gij dit al doen kondet, zou het meten van dien grooten afstand u nog zeer langwijlig en bezwaarlijk zijn; althans zou dit niet zoo gemakkelijk en zeker gaan, als dat wij de lengte en breedte van deze kamer meten; en nogtans bestaat er eene kunst, om dien grooten afstand, ja nog veel grooter, onmiddellijk en met de uiterste naauwkeurigheid te meten. De regels om dit te kunnen doen zullen u in de kunst, op welke gij u nu begint toe te leggen, geleerd worden: maar gelijk het tellen, dat alle menschen kennen, de grond is van alle kunstregels der algemeene rekenkunst, zoo is het gewone dagelijksche meten de grond van alle regels der meetkunst.

Lezen wij thans de bepaling verder! Zij zegt: *de meetkunst is de kunst, om te bepalen, hoe de grootte van elke uitgebreidheid afhangt van de wijze, op welke zij door hare grenzen bepaald is.* Gij hebt in de voorbereidende lessen reeds de namen van vele meetkunstige figuren leeren kennen (hier vertoon ik alle soorten van driehoeken, vierhoeken, prisma's, piramiden, konussen, kegels, bollen enz. en laat de namen van dezelve noemen); ziet gij niet: dat dit vierkant er anders uitziet, dan die cirkel? die kegel anders dan den bol? Die cirkel is door eene enkele kromme lijn bepaald, dit vierkant door vier gelijke lijnen, die cirkel heeft een vlakken inhoud, dit vierkant ook. Zie | daar twee [418]
koperen plaatjes, die even dik, en even zwaar zijn; het eene heeft de gedaante van eenen cirkel, het tweede van een vierkant; het cirkelvormige plaatje heeft eene andere figuur (ziet er anders uit) dan het vierkante plaatje; de kromme lijn is de grens van den cirkel, de vier lijnen, die het vierkant bepalen, zijn de grenzen van het vierkant: *de wijze, waarop de grenzen dezer figuren bepaald zijn, noemt men derzelver onderscheidene gedaante. De grootte nu hangt van die grenzen af.* Indien ik slechts weet, hoe lang de straal van den cirkel is, dan behoef ik den inhoud van het vierkant van den straal slechts met 3,14159265 te vermenigvuldigen, om, in vierkante éénheden, den inhoud van den cirkel te vinden; en om den inhoud van een vierkant te vinden, behoef ik het getal, dat aanduidt, hoeveel maal de inhoud van de lengtemaat in de zijde van dit vierkant begrepen is, tot de tweede magt te verheffen enz. Gij ziet dus uit die voorbeelden, dat de grootte eener uitgebreidheid van de wijze, hoe zij door hare grenzen bepaald is, afhangt. Voor het overige zal u het vervolg de opgegevene bepaling duidelijker doen verstaan, en derzelver waarheid meer en meer doen gevoelen.

Maar verder wordt gezegd: *ten einde langs dien weg de regels te vinden, om dezelve met uitgebreidheden van dezelfde soort te vergelijken.* Men heeft u reeds in de beginselen der telkunst en algemeene rekenkunst geleerd, wat gelijkslachtige grootheden zijn, en hoe deze met elkander kunnen vergeleken worden; wat wij aldaar gelijkslachtige grootheden hebben genoemd, zijn hier uitgebreidheden van dezelfde soort, lijnen en lijnen, hoeken en hoeken, vlakken en vlakken, ligchamen en ligchamen. De figuur of de gedaante van eenen cirkel en een vierkant, van eene kubus en eenen cilinder verschilt van elkander, maar een vierkante duim is de | maat van de twee eerste, en een kubieke [419] duim de maat van de twee laatste. Hoe men vinden kan, hoeveel maal de vierkante duim in den cirkel en het vierkant, en hoeveel maal de kubieke duim in de kubus en den cilinder begrepen zijn, wordt uit de beschouwing van die figuren zelve afgeleid; om die reden wordt gezegd, dat de meetkunst de kunst is, om na te gaan: hoe de grootte van elke uitgebreidheid afhangt van de wijze, waarop zij bestaat, en door hare grenzen bepaald is. Voor het overige zal de naauwkeurigheid van die bepaling des te meer bevestigd worden, hoe verder men in de kunst vordert.

Gaan wij thans verder. Willem! *lees eens de tweede en derde bepaling.*

Na deze gelezen te hebben, vervolg ik. Hoezeer de woorden, in welke deze bepalingen zijn voorgedragen, zeer duidelijk zijn, verdienen zij echter eene nadere toelichting.

Er wordt hier gesproken van *begrensde en onbegrensde ruimte.* De *onbegrensde ruimte,* of het *spatium,* waarin het geheelal bestaat, *is zonder grenzen.* Dit kan men niet dan met eenig nadenken verstaan. Laat ons eens zien, wat de sterrekundigen dienaangaande geleerd hebben. Het onbedreven algemeen denkt, dat de zon, de maan en de sterren even ver van ons afstaan, dat de hemel de gedaante van eenen bol heeft, en dat wij in het middelpunt van dien bol geplaatst zijn: intusschen leert de meetkunst ons dit anders; deze leert ons: dat de zon zoo ver van de aarde afstaat, dat een kanonskogel meer dan vijfentwintig jaar tijd zou noodig hebben, om dien afstand door te vliegen; intusschen is de afstand van de boven-planeten nog grooter. Uranus, die de verste planeet van ons zonnestelsel is, die wij kennen, staat wel negen|tien maal verder van de zon, dan de aarde. Intusschen is ons planeet- [420] stelsel slechts een stip, in vergelijking van de ontzaggelijke ruimte, in welke de vaste sterren, die gij des avonds ziet, geplaatst zijn; de ontdekking der kijkers en teleskopen heeft dit geleerd. En om u daarvan nog een duidelijker denkbeeld te geven, zal het genoeg zijn, u te doen opmerken, dat het door waarnemingen is gebleken, dat het licht den afstand van de zon tot de aarde in minder dan acht minuten tijds doorloopt; terwijl zeker het licht van de vaste ster, die het naaste bij ons is, meer dan drie maanden noodig heeft, om den afstand tusschen dezelve en ons door te loopen. Voeg hier eindelijk bij: dat uit de ontdekkingen van Herschel blijkt: dat er, buiten den sterrenhemel, dien wij zien, nog vele andere sterrenhemelen bestaan. Die alle nu bestaan in de ruimte; maar, daar men aan de uiterste grenzen der schepping komt, bestaat nog ruimte; nergens kan men, hoe ver men ga, eenen grenspaal van de ruimte denken; want stel zulk eenen grenspaal, en dat men met zijne gedachten tot aan denzelven gekomen is, en men voor dien grenspaal, als voor eenen muur, staat, dan zou men nog vragen: wat is achter dien muur? en die vraag onderstelt achter denzelven eene ruimte. De ruimte derhalve, waarin het heelal bestaat, is onbegrensd; wij zullen doorgaans die onbegrensde ruimte *spatium* noemen. Wat nu eene meetkunstige uitgebreidheid is, is eigenlijk eene uitgebreide en begrensde plaats in de ruimte of het *spatium*.

Ziet gij deze twee kuben, die even groot zijn? de eene is van hout gemaakt, en de andere van steen: noch het hout, noch de steen, is eene kubus, maar de uitgebreidheid van die massa's hout en steen, en de gedaante, die aan dezelve is gegeven, zijn de kuben. *De meetkunst be|schouwt alleen de vormen van de* [421]
uitgebreidheid der natuurlijke ligchamen, en geenszins de stof, uit welke die natuurlijke ligchamen bestaan.

De vormen van die ligchamen hebben grenzen. Ziet gij dien bol in dit glas water liggen; die bol is van koper, van rondom raakt het water het koper aan; tusschen het water en het koper bestaat geene ligchamelijke uitgebreidheid meer; tusschen het water en het koper is toch een ergens, en dit ergens is over de geheele oppervlakte van den bol uitgebreid; het is dus eene uitgebreidheid, die, noch in het water, noch in het koper, maar tusschen beide is; waar het koper eindigt, en het water begint, is, wat is dit? de grens, de oppervlakte van de meetkunstige gedaante, die de kunst aan het stuk koper gegeven heeft. Lees nu eens de vijf eerste bepalingen! Men leest.

Ziet gij niet, Willem! *dat de vlakte-uitgebreidheid geheel wat anders is, dan de ligchamelijke?*

De ligchamelijke uitgebreidheid is in het ronde, en alle rigtingen, tot aan de grenzen uitgebreid; de vlakte-uitgebreidheid slechts over de oppervlakte der ligchamelijke uitgebreidheid, en bestaat nergens, binnen noch buiten.

Zeer wel: maar wij zijn met het beschouwen van eene houten en steenen kubus begonnen: kunt gij u nu de figuur, die de kunst aan die stukken hout en steen gegeven heeft, niet voorstellen, zonder aan het hout of steen te denken?

Zeer goed. Die ligchamen zouden ook van ijzer, koper, tin enz. kunnen zijn, en derzelver gedaante eene kubus.

Dit is, hetgeen men noemt, eene *abstractie* of *aftrekking*. De uitgebreide figuur van een natuurlijk ligchaam is, wat men een meetkunstig ligchaam noemt: de meetkunst houdt zich alleen op met de beschouwing van de | [422]
uitgebreide figuur der natuurlijke ligchamen. Maar gaan wij verder. *Gij,* VICTOR! *beschouw eens oplettend het blad papier, dat in dit raam gespannen is; is dit blad papier niet zeer dun?*

Dit papier is al zeer dun.

Waar voor houdt gij de uitgebreidheid van dit blad papier, voor eene ligchamelijke of vlakte-uitgebreidheid?

Mij dunkt: eene ligchamelijke uitgebreidheid; omdat in eene vlakte-uitgebreidheid geene stoffelijke zelfstandigheid meer bestaan kan.

Maar als men evenwel dit dunne papier eens duizend maal dunner kon maken, zou het dan geene vlakte-uitgebreidheid worden?

Al werd dit blad papier een millioen maal dunner gemaakt, zou het papier nog altijd eene ligchamelijke uitgebreidheid blijven behouden: men moet alle dikte van dit papier weg denken, om eene vlakte-uitgebreidheid te verkrijgen; maar als men die dikte weg denkt, dan bestaat er geen papier meer.

Dit begrijpt gij zeer wel: een stoffelijk iets kan nooit den vorm eener vlakte-uitgebreidheid hebben: de vlakte-uitgebreidheid bepaalt, zoo als wij gezien hebben, de grenzen van de ligchamelijke uitgebreidheid van een ligchaam. Maar beschouw nu eens die kubus; daar valt zij in stukken. Laten wij die stukken eens weder aan elkander sluiten; zie eens, hoe juist zij sluiten: maar wat is nu tusschen die stukken?

Wat tusschen die stukken is, is geene ligchamelijke, maar vlakte-uitgebreidheid.

Dit is juist, en nu verstaat gij den zin van de V bepaling. Zie daar een blad papier, de eene helft is zwart, en de andere wit: wat is, CAJUS! *tusschen het zwarte en het witte?* | [423]

Mij dunkt, dat het noch vlakte- noch ligchamelijke uitgebreidheid is.

Lees dan eens de VI bepaling. - CAJUS leest. - *Wel nu; wat is tusschen het zwart en het wit?*

Lengte-uitgebreidheid.

Bedenk eens, of gij een onderscheid tusschen de lengte- en vlakte-uitgebreidheid kunt vinden.

In de vlakte-uitgebreidheid kan men in alle rigtingen van de eene naar de andere plaats gaan, mits men niet buiten die vlakte-uitgebreidheid kome; doch tusschen het zwart en het wit slechts in ééne rigting.

Zeer wel opgemerkt! Maar, PIETER! *zie eens deze dikke streep!*

Is die streep dikker dan deze?

Hier is geen twijfel aan.

Zijn die strepen lengte-uitgebreidheden?

Geen van beide

Zijn het dan vlakte-uitgebreidheden?

Ook niet.

Wat dan?

Ligchamelijke uitgebreidheden.

Ligchamelijke uitgebreidheden?

Zoo komt het mij ten minste voor: de eerste streep is wel breeder of dikker, dan de tweede, maar hoe dun gij ook de tweede maakt, is de streep zwart, en om dezelve zigtbaar te maken, moet zij met inkt getrokken worden; maar die inkt is eene ligchamelijke zelfstandigheid, die zich op het oppervlak van het papier heeft vastgezet.

Dan meent gij, dat de streep geene breedte moet hebben, en niet met inkt geteekend zijn, om eene lengte-uitgebreidheid te kunnen zijn? | [424]

Dit blijkt uit het voorbeeld van het stuk papier, dat half wit, en half zwart is. De eerste streep is breeder, dan de tweede; beide hebben zij breedte, zij hebben ook beide de dikte van den inkt, waarmede zij getrokken zijn; beide zijn dunne, smalle, ligchamelijke uitgebreidheden.

Zoo moeten juist alle geteekende figuren in het vervolg worden verstaan: men kan geene regte of kromme lijn in eene figuur zigtbaar voorstellen, of men moet aan dezelve eene zekere breedte en dikte geven, maar die breedte en dikte moet men weg denken, om zich de regte of kromme lijn voor te stellen, zoo als zij wezenlijk moet gedacht worden. Maar zoude ik, PAULUS! *dien dunnen zijden draad, dien ik hier uitgespannen houde, niet als eene lengte-uitgebreidheid kunnen aanmerken.*

Ja, mits men alle dikte van dezelve weg denke.

Welke soort van lengte-uitgebreidheid zou dan die draad zijn?

Eene regte lijn.

Wat noemt gij eene regte lijn?

Eene lengte-uitgebreidheid, die overal in dezelfde rigting voortgaat, zonder ergens van die rigting af te wijken; zij heeft overal in al hare deelen dezelfde figuur, hetzelfde beloop.

Wat is dan eene kromme lijn?

Eene lengte-uitgebreidheid, die onophoudelijk en onmerkbaar van rigting verandert.

Wanneer ik de regte lijn AB voorstel

A ———————————— B

wat zijn de uiteinden van die lijn?

Punten; en deze hebben volstrekt geene uitgebreidheid.

Punten zijn dus niets?

Punten hebben volstrekt geene uitgebreidheid; maar zij | zijn toch iets; [425]
zij zijn plaatsen in de onbepaalde ruimte, die van alle uitgebreidheid beroofd zijn; een *ergens*, waar eene regte of kromme lijn begint en eindigt, waar de deelen eener regte of kromme lijn onmiddellijk aan elkander sluiten; gelijk de lengte de grenzen der vlakte-uitgebreidheden, en de uitgebreide plaatsen, alwaar de deelen eener vlakte-uitgebreidheid aan elkander sluiten.

Wij hebben dus punten, lengte- vlakte- en ligchamelijke uitgebreidheden: deze kan men zich afzonderlijk voorstellen. Punten zijn punten; lengte-uitgebreidheden kunnen, behalve de regte lijn, onnoemelijk vele gedaanten hebben, zoo als al die kromme lijnen, die ik hier op het bord teeken; de vlakte-uitgebreidheden hebben verschillende omtrekken of grenzen; de oppervlakten der ligchamen kunnen vlak, en op verschillende wijzen gebogen zijn. Wij hebben het vermogen, om al die verschillende soorten van uitgebreidheden te denken, ons dezelve op onderscheidene wijzen, en op grooter en kleiner afstanden van elkander voor te stellen, zonder meer te denken aan de stoffelijke ligchamen, welker zinnelijke beschouwing aanleiding tot de voorstelling van de vormen der uitgebreidheden gegeven heeft. Na dat het verstand de meetkunstige uitgebreidheid der ligchamen in derzelver grenzen en bestanddeelen heeft geanalyseerd, komt de voorstellings- en verbeeldingskracht in werking; door die vermogens construeren wij de verschillende vormen van figuren, onderzoeken derzelver eigenschappen, vergelijken deze onderling met elkander: zoo schept men zich, door eigene studie, een grooten schat van wetenschap, welke, in de studie der natuur, wordt aangewend, om de verschijnselen der natuur in derzelver wetten en werkingen te leeren kennen.* Die wetenschap
wordt door de beoefening der meetkunst ver|kregen. Gij kunt wel op dit [426]
oogenblik nog niet begrijpen, hoe dit toegaat; maar er zullen slechts weinig lessen noodig zijn, om dit in te zien: weldra zult gij overtuigd worden: dat de meetkunst, als de wetenschap van de gesteldheid en eigenschappen der figuren beschouwd, op eene andere wijze, dan andere wetenschappen, geleerd wordt; op eene wijze, die u het voordeel zal aanbrengen van uw* verstand te beschaven, en tot het grondig overdenken van gewigtige en diepzinnige zaken

bekwaam te maken.

II Voorbeeld, Men leze de *XV bepaling van het I Boek!* Men leest. "*Een regtlijnige hoek,* bij verkorting *hoek* genaamd, is de onbepaalde vaste ruimte P, gelegen tusschen twee lijnen (regte) AB en BC, welke in een punt B zamenkomen, en naar welgevallen verlengd kunnen worden. De zamenkomende lijnen AB en BC noemt men de beenen of zijden, en het punt van zamenkomst het toppunt of hoekpunt van den hoek."

Na dit gelezen te hebben, vervolg ik: ziet gij allen op dit bord de lijnen BA en BC, die uit het punt B, in twee verschillende rigtingen, zijn getrokken? onderscheidt gij het witte gedeelte van het bord, tusschen die lijnen, van het overige gedeelte, dat zwart is? Verbeeld u, dat de platte vlakte van dit bord, naar de regter- en linkerhand, naar boven en naar beneden, zonder grenzen is, en de lijnen BA en BC insgelijks onbepaaldelijk zijn verlengd; dat het geheele bord zwart is, behalve hetgeen tusschen de onbepaaldelijk verlengde lijnen ligt, hetwelk wit gemaakt is; dan is dit witte gedeelte, dat door de lijnen BA BC begrensd is, maar aan den tegenovergestelde kant van het hoekpunt B tot in het onein|dige voortloopt, een *regtlijnige hoek;* de regtlijnige hoek [427]
is dus, aan twee kanten, door twee lijnen AB en BC begrensd, en verder onbegrensd.

Wanneer de lijn BA onbeweeglijk op hare plaats blijft, maar de lijn BC daarentegen om het hoekpunt B naar buiten omdraait, wat dunkt u dan, Pieter! *zal de onbepaalde vlakte, tusschen die lijnen, dat is, de hoek ABC, dan grooter of kleiner worden?*

Natuurlijk grooter.

En zoo die beweging anders om plaats heeft, wat zal er dan gebeuren?

Dan zal de hoek kleiner worden.

Gij ziet dus, dat hier hetzelfde plaats heeft, als wanneer op eene regte lijn AB het punt B voorwaarts of achterwaarts gaat; in het eerste geval wordt de lijn grooter, in het tweede geval kleiner. Lees nu eens de volgende bepalingen. Men leest. - Na de verklaringen van die bepalingen gegeven te hebben, vervolg ik: keeren wij nog eens tot de bepaling van den hoek terug. Euclides heeft gezegd: *dat een hoek de helling of neiging van twee regte lijnen is:* die bepaling is om vele redenen duister en onnaauwkeurig. 1^o. Wat regt overeind staat, wordt gezegd *niet te hellen*, Men zegt: *die muur helt voor- of achterover,* indien hij niet regt op staat; wanneer een toren te lood staat, zegt men, dat hij met den grond of horizon een regten hoek maakt: zie daar eene tegenstrijdigheid; *een hoek namelijk, die geene helling is!* 2^o. Indien

men eenige hoeken optelt, kan de som gelijk aan twee regte hoeken zijn: is nu de som van hoeken geen hoek? en zijn twee regte hoeken wel eene helling van twee lijnen? een hoek is regt, wanneer de beenen loodregt op elkander staan; en de beenen van eenen hoek, die zoo groot is, als twee regte hoeken, liggen in dezelfde rigting. 3^o. Men | zegt: *in dien hoek ABC is een* [428]
punt gegeven, eene lijn getrokken enz.; elk verstaat die spreekwijze; maar deze onderstellen stilzwijgend, dat de hoek eene ruimte is. 4^o. Eindelijk kan niets anders, dan hetgeen eene begrensde en onbegrensde uitgebreidheid is, in de meetkunst, een onderwerp van beschouwing uitmaken; *helling is nu eene bijzondere omstandigheid van plaatsing, die alleen bepaald wordt, door den hoek, welken twee lijnen met elkander maken.* Voor het overige zult gij in het vervolg zien, dat de bepaling, die wij van den hoek gegeven hebben, veel beter met alle andere beginselen overeenstemt.

Zeg mij eens, Paulus! *hoe lang moeten in eenen hoek de beenen worden genomen?*

Men kan de beenen zoo lang en zoo kort nemen, als men verkiest. Zich den hoek in zijn geheel voor te stellen, zoo als men eenen cirkel en eenen driehoek in de gedachten omvat, is onmogelijk; men moet zich dus vergenoegen, met de rigting der beenen aan te duiden; indien die rigting aangewezen is, dan is het om het even, of de lijnen, welke dezelve aanduiden, lang of kort zijn.

Wanneer zijn twee hoeken gelijk of evengroot? of liever, hoe kan men beproeven, of twee hoeken even groot zijn?

Dit zal blijken, wanneer men het hoekpunt van eenen der hoeken in het hoekpunt van den anderen hoek legt, en een zijner beenen langs een been van den anderen hoek: zoo men dan bevindt, dat het tweede been van den eersten hoek langs het tweede been van den anderen valt, dan zal men zeggen, die beenen zijn gelijk, omdat alle uitgebreidheden gezegd worden gelijk te zijn, wanneer derzelver grenzen op elkander passen.

Men late nog de volgende vragen beantwoorden. *Hoe verenigt men hoeken tot een geheelen hoek? Hoe ver|deelt men eenen hoek in andere hoeken? Hoe* [429]
ontstaat een regte hoek enz.

III Voorbeeld Ik neem hier tot een voorbeeld de *XVII Stelling van het I Boek. "De som der supplementen van al de hoeken eens veelhoeks, wiens hoeken alle naar buiten staan, is altijd, hoe groot het aantal van deszelfs zijden zijn moge, gelijk aan vier regte hoeken."* Na deze stelling gelezen te hebben, vervolg ik.

Zeg mij, Willem! *wat wordt in deze leerstelling als voorwaarde aangeno-*

men?

Dat er een veelhoek gegeven is, wiens hoeken alle naar buiten staan.

Wat is een veelhoek?

Eene figuur, die binnen een zeker aantal regte lijnen is ingesloten, die elkander doorsnijden.

En een veelhoek, welks hoeken alle naar buiten staan?

Zulk een veelhoek, welks diagonalen alle binnen den veelhoek liggen.

Wordt de driehoek hier ook onder de benaming van veelhoek begrepen?

Deze is natuurlijk onder die benaming begrepen, omdat hij met alle veelhoeken tot de klasse der regtlijnige figuren behoort.

Wat wordt van zulk eenen drie- of veelhoek gesteld?

Dat de som van de supplementen van al derzelver uitspringende of naar buiten staande hoeken gelijk is aan vier regte hoeken.

Wat is, HENDRIK! *het supplement van eenen hoek?*

Wanneer men een der beenen van eenen hoek verlengt, dan ontstaat er een tweede hoek, die het supplement van den eersten genoemd wordt. | [430]

En hoeveel maakt nu een hoek met zijn supplement?

Volgens het betoogde in de V stelling, twee regte hoeken.

Wat is een regte hoek?

Een vierde gedeelte van de onbepaalde platte vlakte, in welke die hoek ligt.

Zoo dat dus vier regte hoeken te zamen de geheelde onbepaalde vlakte uitmaken?

Dit blijkt uit het betoogde in de vierde stelling. Indien twee lijnen loodregt op elkander staan, en aan beide zijden tot in het oneindige verlengd zijn, dan verdeelen zij de geheele vlakte, in welke zij liggen, in vier gelijke deelen.

Wat moet dan nu eigenlijk in de voorgestelde leerstelling bewezen worden?

Dat de som van al de supplementen van de hoeken eens veelhoeks, onder de voorgestelde voorwaarde, gelijk is aan de onbegrensde platte vlakte.

Nu vervolg ik aldus. Alvorens tot het betoog over te gaan, zal ik u door eenige proeven doen zien, dat het gestelde voor eenen drie- vier- vijfhoek enz. plaats heeft. Hier is op dit blad geteekend een driehoek ABC: ik verleng de zijden AB, BC, CA tot in D, E en F; dan is CBD = supplement ABC, ACE = supplement BCA, en BAF = supplement CAB. Nu zal ik die supplementen van die hoeken eens uitknippen; daar hebt gij den driehoek ABC zelven; zie daar de supplementen van deszelfs hoeken: laten wij nu die hoeken (zoo als ik u geleerd heb) eens tot een geheelen hoek aan elkander sluiten; daar is de hoek ACE met den hoek CBD te zamengevoegd; er blijft nog eene opening: zie nu eens, hoe naauwkeurig de hoek BAF in die opening sluit. | [431]

Wat zegt gij nu, PAULUS! *ziet gij nu, dat de som van de supplementen van dien driehoek vier regte hoeken maakt?*

Dit zie ik volkomen.

Gij zoudt misschien met reden kunnen denken, dat dit toevallig zoo uitkwam; maar zie daar nog verscheidene andere, grootere en kleinere driehoeken, gelijkzijdige, gelijkbeenige, regthoekige, stomphoekige enz.; neem de proef. Zie daar, gij ziet, dat voor alle hetzelfde plaats heeft.

Hier neem ik eene vier- vijf- zeshoekige figuur, en vertoon door de proef, dat ook voor die figuren hetzelfde als voor den driehoek plaats heeft.

Wat dunkt u nu, VICTOR! *zijn deze verschillende proeven geen bewijs voor de waarheid der gestelde leerstelling?*

Ik zou denken, ja; men ziet het zoo duidelijk.

Maar ziet gij wel, waarom het gestelde zoo is, waarom het niet anders zijn kan?

Dit zie ik juist niet in.

Wel nu, dan is het ook geen betoog; want een betoog moet de gronden aanwijzen, waarom iets zoo is, en noodzakelijk zoo zijn moet, en dit blijkt niet uit al de proeven, die ik u heb voorgehouden; deze geven u geene algemeene zekerheid, omdat duizend zulke proeven niet bewijzen, dat in eene volgende proef het gestelde zal bevestigd worden; die verschillende proeven maken de waarheid der gestelde eigenschap wel hoogst waarschijnlijk, maar niet algemeen zeker. Laat ons dus zien, of wij dit bewijs niet kunnen ontdekken.

Nemen wij den vijfhoek ABCDE. *Men verlenge de zijden AB, BC, CD, DE, EA tot in het oneindige; | verkrijgen wij dan niet de oneindiglijk voort-* [432]
loopende lijnen AF, BG, CH, DI en EK?

Dit is duidelijk.

Ontstaan dus niet de hoeken KAF, FBG, GCH, HDI en IEK, die wij door de letters a, b, c, d en e zullen aanwijzen, en zijn deze niet de supplementen der hoeken A, B, C, D en E?

Dit is zonder twijfel.

Indien gij nu de figuur met oplettendheid beschouwt, ziet gij dan niet, dat al die supplementen, te zamen genomen, de geheele vlakte, die rondom den vijfhoek is uitgestrekt, volkomen volmaken?

Dit zie ik zeer duidelijk.

Indien de hoeken van den vijfhoek veranderen, de zijden grooter of kleiner worden, zal dan nog hetzelfde plaats hebben?

De leerling bedenkt zich een weinig.

Indien de lijn BCG *den stand* $BC'G'$ *aanneemt, dan veranderen te gelijk de hoeken* ABC *en* BCD*, en dus ook derzelver supplementen; maar blijven daarom de supplementen* FBG'*,* $G'C'H$*,* d*,* e *en* a*, niet de onbepaalde vlakte rondom den vijfhoek* $ABC'DE$*, even als te voren, vervullen?*

O ja, dit blijkt mij duidelijk.

Beschouw een voor een de figuren voor eenen driehoek, vierhoek, zeshoek, zevenhoek, achthoek enz.; zal, aangaande die veelhoeken, niet noodzakelijk hetzelfde moeten plaats hebben? zullen in die alle de supplementen der hoeken niet de geheele vlakte rondom den veelhoek volmaken?

Ik zie de algemeenheid daarvan volkomen in.

Indien men dus bij de som van al de supplementen der | hoeken de bepaalde uitgebreidheid van den veelhoek mede er bijvoegt, heeft men dan niet de geheele onbepaalde vlakte-uitgebreidheid? [433]

Dit kan niet missen.

Waaraan is nu die onbepaalde vlakte gelijk?

Aan vier regte hoeken.

Wat besluit gij daar uit?

Dat de som van de supplementen van al de hoeken eens veelhoeks, te zamen genomen met de begrensde uitgebreidheid des veelhoeks, gelijk is aan vier regte hoeken.

Die gevolgtrekking is zeer juist; maar dit besluit is nu geheel wat anders, dan hetgeen in de stelling gesteld is: hebben wij ons ook in de redenering bedrogen?

Men bedenkt zich.

Ik ga voort te vragen: *kan eene vlakte, die rondom begrensd is, wel een gedeelte van de onbegrensde vlakte uitmaken?*

Neen; want dan zou die begrendse vlakte, een zeker aantal malen genomen, gelijk of grooter, dan de onbegrensde vlakte, kunnen worden; en dit is niet mogelijk; want hoeveel millioenen malen de veelhoek grooter genomen wordt, hij blijft toch altijd van rondom begrensd, en dus is de bepaalde uitgebreidheid van den veelhoek, met de onbegrensde vlakte, minder, dan de éénheid tot het allergrootste getal, dat men schrijven of uitspreken kan.

Gij wilt dus zeggen, dat de uitgebreidheid van den veelhoek niets is, in vergelijking van de onbegrensde vlakte?

De begrensde vlakte van eenen veelhoek is slechts eene uitgebreide plaats in de onbegrensde vlakte, en geenszins een gedeelte van dezelve; zoo min als eene regte lijn, alhoewel zij op zich zelve eene uitgebreidheid is, het geringste gedeelte van eenen driehoek kan uitmaken.

Wat besluit gij dan eindelijk? | [434]

Dat de som van al de supplementen van de hoeken des veelhoeks, te zamen met de uitgebreidheid van den veelhoek, hetzelfde is, als de som van de supplementen der hoeken; hetzelfde, als vier regte hoeken.

Lees nu het betoog; dit zult gij volkomen begrijpen.

IV Voorbeeld. Nemen wij nog tot een voorbeeld de *XI stelling van het IV Boek: "de inhouden van de gelijkvormige driehoeken staan tot elkander in dezelfde reden, als de vierkanten, die op de eveneens geplaatste zijden beschreven zijn."* Na deze stelling gelezen te hebben, vervolg ik:

Wat wordt hier ondersteld, Pieter?

Vooreerst, dat er twee gelijkvormige driehoeken ABC en DEF zijn, en ten anderen, dat op twee eveneens geplaatste zijden AB en DE twee vierkanten ABKI en DEML zijn beschreven.

Wat zijn gelijkvormige driehoeken?

Het zijn driehoeken, welker zijden, in dezelfde volgorde genomen, tot elkander in dezelfde reden staan AB : DE = BC : EF = AC : DF.

En wat zijn twee gelijkstandige zijden?

Die zijden, welke in die evenredigheid de termen van dezelfde reden zijn.

En vierkanten, op die zijden beschreven?

Vierkanten zijn gelijkzijdige, regthoekige parallelogrammen, en vierkanten, op de zijden beschreven, vierkanten, welker zijden aan de zijden van die driehoeken gelijk zijn.

Wat wordt nu als het noodzakelijke gevolg van de voorwaarde gesteld?

Dat de inhouden der gelijkvormige driehoeken ABC en DEF tot elkander staan in dezelfde reden, als de inhouden van de vierkanten ABKI en DEML.

| *Wat wil dat zeggen?* [435]

Dat wil zeggen, dat wanneer de inhouden der driehoeken onderling meetbaar zijn, en derhalve eene gemeene maat hebben, de inhouden der vierkanten ABKI en DEML insgelijks meetbaar zullen zijn, en eene gemeene maat hebben: indien nu de gemeene maat der driehoeken op den driehoek ABC, bij voorbeeld, twintig maal, en op den driehoek DEF dertien maal begrepen is, zal de gemeene maat der vierkanten op het vierkant AB*KI twintig maal, en op het vierkant DEML dertien maal bevat zijn.

Wij verstaan dus nu de stelling volkomen. Laat ons, om tot het bewijs te komen, uit de toppunten der driehoeken de loodlijnen CG en FH op de basis

AB en DE laten vallen, en in de vierkanten de hoekpuntslijnen BI en EL trekken. Beschouw, Paulus! *de driehoeken ABC en ABI eens aandachtiglijk!* . . . . . *Hebben die driehoeken niet dezelfde basis?*

De lijn AB is hunne gemeene basis.

Welke zijn de hoogten dezer driehoeken?

De loodlijn CG is de hoogte van den driehoek ABC, en omdat ABIK een vierkant is, staat AI loodregt op AB, en daarom is AI de hoogte van den driehoek ABI.

Hoe staan nu de inhouden der driehoeken, die dezelfde basis hebben, tot elkander?

In dezelfde reden als hunne hoogten, en wij hebben dus

drieh. ABC : *drieh.* ABI = CG : AI.

Kan men, in plaats van de lijn AI, eene andere stellen?

Ja, de lijn AB, omdat al de zijden van een vierkant even lang zijn.

Wat wordt dan de evenredigheid, die wij gevonden hebben? | [436]

drieh. ABC : *drieh.* ABI = CG : AB . . . . . (1)

Onthoud nu eens deze evenredigheid, en vergelijk nu eens de driehoeken ABC en DEF met elkander! . . . . .

Wat is, Hendrik! *in deze driehoeken aangenomen?*

Er is ondersteld, dat zij gelijkvormig zijn.

Hoe moet dan uit kracht van die gelijkvormigheid CG tot AB staan?

In de gevolgen van de *VIII stelling* van dit boek is bewezen, dat is:

CG :AB = FH : DE.

Indien gij nu deze evenredigheid met de vorige vergelijkt, kunt gij dan uit die twee evenredigheden niet tot eene andere evenredigheid besluiten?

Wij verkrijgen dan de evenredigheid:

drieh. ABC : *drieh.* ABI = FH : DE . . . . . (2)

Deze zal ons dadelijk te pas komen. *Beschouw nu eens,* Willem! *de driehoeken DEF en DEL!* . . . . . *Merkt gij in dezelve iets op?*

Die driehoeken bevinden zich in dezelfde omstandigheid, als de driehoeken ABC en ABI, zij hebben dezelfde basis DE; hunne hoogten zijn FH en DL, voorts is DL = DE, en daarom zal, volgens hetzelfde beginsel als boven,

drieh. DEF : *drieh.* DEL = FH : DE . . . . . (3)

moeten zijn.

Nu komen wij haast aan het einde van het betoog . . . *Indien gij de evenredigheden (2) en (3) met elkander vergelijkt, is er dan uit dezelve niet eene nieuwe evenredigheid te halen?*

O ja! de evenredigheid:

drieh. ABC : *drieh.* ABI = *drieh.* DEF : *drieh.* DEL.

Kunnen de termen dezer evenredigheid door verwisseling der redens niet worden verschikt? | [437]

Omdat al de termen der evenredigheid gelijkslachtige uitgebreidheden zijn, kan men stellen:

drieh. ABC : *drieh.* DEF = *drieh.* ABI : *drieh.* DEL .

Wat gebeurt er, indien men de termen van de tweede reden dezer evenredigheid dubbel neemt?

Dan verkrijgt men naar de bekende beginsels de evenredigheid:

drieh. ABC : *drieh.* DEF = 2 *drieh.* ABI : 2 *drieh.* DEL .

Bedenk u nu eens: wat is twee maal de inhoud van den ABI?

Twee maal die inhoud is gelijk aan het vierkant AKBI, omdat een diagonaal van een parallelogram, en dus ook van een vierkant, hetzelve in twee gelijke en gelijkvormige driehoeken verdeelt.

En wat kan voor twee maal de inhoud van den driehoek DEL gesteld worden?

Om dezelfde reden, de inhoud van het vierkant DEML.

Wel nu! wat kan dus in plaats van de laatste evenredigheid geschreven worden?

drieh. ABC : *drieh.* DEF = *vierk.* ABKI : *vierk.* DEML .

en dat was juist, hetgeen betoogd moest worden.

Na afloop van dit betoog vervolg ik. Ik zal u nu de waarheid van het betoogde eens op eene andere wijze meer zinnelijk voorstellen. Hier neem ik eene lijn AB, gelijk aan 25 deelen op de schaal, die ik u voorhoude, en eene lijn DE, gelijk aan 17 van diezelfde deelen. Op AB maak ik eenen driehoek ABC naar welgevallen. Op DE eenen driehoek DEF, die aan ABC gelijkvormig is. Ik beschrijf op AB en DE de vierkanten ABKI en DEML; dan bevat AI vijfentwintig, en DE zeventien deelen. Door de deelpunten van de lijnen AB en DE trek ik lijnen, die in den eenen driehoek aan AC en BC, en in den anderen driehoek aan DF en EF evenwijdig loopen; en eindelijk | [438]
nog door de deelpunten, die men in AC en DF verkrijgt, lijnen, die aan AB en DE evenwijdig loopen. Eindelijk trek ik nog door de deelpunten van AB en DE lijnen, die aan AI en DL, en door de deelpunten van AI en DL lijnen, die aan AB en DE evenwijdig loopen; dan verkrijg ik de twee figuren, die ik u hier voorhoude: . . . . *Zeg mij nu,* Hendrik! *hoe is de driehoek ABC verdeeld?*

Er is in de gevolgen van de II *stelling* bewezen, dat het geheele oppervlak van dien driehoek in gelijke en gelijkvormige driehoekjes verdeeld is, die alle aan het driehoekje APQ gelijk zijn.

Hoe groot is het aantal dezer gelijke driehoekjes?

Dit aantal is gelijk aan 25 $\times$ 25 = 625: indien er a deelen waren in AB, dan zou het aantal dezer driehoeken $a \times a = a^2$ zijn.

En hoe veel deelen zijn er in het vierkant ABKI?

Dit vierkant is insgelijks in 25 $\times$ 25 = 625 gelijke en gelijkvormige vierkanten verdeeld, die alle aan het vierkant APSR gelijk zijn.

Hoe is het nu met den driehoek DEF, en het vierkant DEML gesteld?

De driehoek DEF is in 17 $\times$ 17 = 289 gelijke en gelijkvormige driehoekjes, elk gelijk aan het driehoekje DTU*, en het vierkant DEML insgelijks in 17 $\times$ 17 = 289 gelijke en gelijkvormige vierkantjes DTWV verdeeld.

Let nu wel, dat wanneer de driehoeken ABC en DEF niet gelijkvormig waren, en men AB in 25, DE in 17 deelen had verdeeld, hetzelfde zou plaats hebben, indien de gelijke deelen van AB niet aan de gelijke deelen van DE gelijk waren; maar nu zijn die deelen gelijk, en dus is AP = DT: is dus niet het vierkant APSR = vierkant DTWV?

Die vierkanten zijn gelijk.

| *Hoe staan dan de inhouden der vierkanten ABKI en DEML tot elkander?* [439]

Volgens de constructie is

vierk. ABKI : *vierk.* DEML = 625 : 289.

Maar indien nu de driehoeken ABC en DEF gelijkvormig zijn, wat kan men dan uit die gelijkvormigheid, ten aanzien van de driehoekjes APQ en DTU, besluiten?

Dat zij gelijk en gelijkvormig zijn; want omdat gelijkvormige driehoeken onderling gelijkhoekig zijn, zoo is vooreerst hoek A = hoek D; en wegens de evenwijdigheid der lijnen, die in elken driehoek aan BC en EF zijn getrokken, zoo is hoek APQ = hoek B, en hoek DTU = hoek E; daar nu hoek B = hoek E is, zoo is hoek APQ = hoek DTU*; bovendien is AP = DT, gevolgelijk (*X St. I B.*) is driehoek APQ gelijk en gelijkvormig aan driehoek DTU.

Kan dan een dezer twee driehoekjes niet als de gemeene maat der driehoeken ABC en DEF worden beschouwd?

Ongetwijfeld; want wij hebben gezien, dat een dezer driehoekjes 625 maal in den driehoek ABC, en 289 maal in den driehoek DEF begrepen is.

Hoe staan dus de inhouden dezer gelijkvormige driehoeken tot elkander?

Zij hebben deze verhouding:

drieh. ABC : *drieh.* DEF = 625 : 289.

Maar de verhouding der vierkanten ABKI en DEML wordt door dezelfde getallen voorgesteld; wat volgt daaruit?

Daaruit volgt de evenredigheid:

drieh. ABC : *drieh.* DEF = *vierk.* ABKI : *vierk.* DEML.

Beschouwen wij deze zaak nog wat meer van nabij. Zeg | *mij eens,* WILLEM! *hebben ook de inhouden der driehoeken dezelfde verhouding tot elkander, als de gelijkstandige zijden AB en DE?* [440]

Dit verschilt veel; want omdat AB : DE = 25 : 17, zoo is AB = $1\frac{8}{17}$ DE; en dus is AB iets minder, dan een en een half maal grooter, dan DE; maar *drieh.* ABC : *drieh.* DEF = 625 : 289 zijnde, zoo is *drieh.* ABC = $2\frac{47}{289}$ *drieh.* DEF, dat is *drieh.* ABC is bijna twee en een zesde maal grooter, dan de driehoek DEF.

Gij ziet dus, vervolg ik, dat de inhouden der gelijkvormige driehoeken niet in dezelfde reden zijn, als de eveneens geplaatste zijden. Laten wij ons nu eens de volgende vraag voorstellen. *Een driehoek ABC gegeven zijnde, eenen driehoek DEF te vinden, aan den gegevenen gelijkvormig zijnde, zoodanig, dat de inhoud van ABC tot den inhoud van DEF staat, als het getal a tot het getal b?*

Ik stel, dat AB op onze schaal gemeten zijnde, A deelen van dezelve bevat, indien ik dus door berekening kan vinden hoe veel deelen voor DE moeten genomen worden, dan is alles gevonden: stel derhalve DE = x ; dan is, volgens den betoogden regel:

drieh. ABC : *drieh.* DEF = $A^2 : x^2$

maar volgens de voorwaarde der vraag moet zijn:

drieh. ABC : *drieh.* DEF = $a : b$

derhalve hebben wij de volgende getallen-evenredigheid:

$$a : b = A^2 : x^2$$

uit welke volgt

$$x^2 = A^2 \times \frac{b}{a} = A^2 \times \frac{ab}{a^2}$$

en indien wij uit deze den vierkants-wortel trekken:

$$x = \frac{A}{a} \times \sqrt{ab}.$$

| Nemen wij tot een voorbeeld a = 24, b = 17, en laat op onze schaal [441]

AB = A = 26 deelen bevatten, dan is $\sqrt{ab} = \sqrt{17 \times 24} = \sqrt{408} = 20{,}199$ nagenoeg, en

$$x = \frac{A}{a} \times \sqrt{ab} = \frac{26}{24} \times 20,199 = 21,882.$$

Men zal dus DE = 21,882 deelen op de schaal moeten nemen, en op DE eenen driehoek construeren, die aan ABC gelijkvormig is.

Om hetzelve door eene constructie te verkrijgen, en tevens eene proef te geven, hoe naauwkeurig de constructien met de berekeningen overeenkomen, zoo laat AB=24 deelen genomen zijnde, op AB het vierkant ABHI zijn beschreven. Laat, door constructie, AB:AG = $a : b$ = 24:17 genomen, en GK* evenwijdig aan AI worden getrokken, dan staat vierkant ABHI tot regthoek AGKI, gelijk a tot b = 24:17. Indien wij derhalve de zijde van een vierkant kunnen vinden, dat aan den inhoud van den regthoek AGKI gelijk is, dan zal die zijde van dat vierkant gelijk zijn aan de basis DE van den gevraagden driehoek. Beschrijf op de grootste der twee lijnen AB en AG (die hier AB is) een halven cirkel, die GK in L snijdt, en trek de lijn AL*; deze zal dan de lengte hebben, die aan E*D moet gegeven worden, om aan het vereischte te voldoen; want indien men de koorde BL trekt, dan is de driehoek ALB regthoekig, omdat alle hoeken, die in een halven cirkel staan, regt zijn; maar volgens het theorema van Pythagoras is $\mathrm{AL}^2 = \mathrm{AB} \times \mathrm{AG} = \mathrm{AI} \times \mathrm{AG} =$ regthoek AGKI. - Ik zal nu op de schaal eens 21,882 deelen nemen, en beproeven, of de lijn AL zoo lang is . . . . . . *Ziet gij, hoe naauwkeurig dit uitkomt?*

Ik oefen doorgaans, zoo veel de tijd het toe|laat, mijne toehoorders in het [442]
oplossen van vraagstukken, zoo wel door constructie, als berekening. Ik zal hiervan nog een paar voorbeelden geven.

V Voorbeeld. *Hoe veel diagonalen of hoekpuntslijnen bestaan er in eenen veelhoek van n zijden?*

Door ondervragen breng ik mijne toehoorders aldus tot de oplossing.

Ontstaat niet een diagonaal uit het vereenigen van twee hoekpunten van den veelhoek van n zijden?

Zeer natuurlijk.

Is elke zijde van eenen veelhoek niet tegelijk de vereeniging van hare hoekpunten?

Insgelijks.

Indien dan alle mogelijke diagonalen in eenen veelhoek zijn getrokken, zijn dan, en door deze, en door de zijden des veelhoeks, niet alle hoekpunten, twee aan twee, met elkander verbonden?

Ongetwijfeld; want indien er twee hoekpunten nog niet vereenigd waren, zou er een diagonaal ontbreken.

Indien er nu n dingen zijn, op hoe veel onderscheidene wijzen kunnen dan die dingen, twee aan twee, worden vereenigd?

Wij hebben geleerd, dat zulks op zoo veel onderscheidene wijzen kan geschieden, als door den getallenvorm $\frac{1}{2}n(n-1)$ wordt aangeduid.

Nemen wij dus eens, dat het getal der diagonalen van eenen n-hoek door g wordt voorgesteld, zoudt gij dan eenen getallenvorm kunnen vinden, die de waarde van dit getal uitdrukt?

Door den vorm $\frac{1}{2}n(n-1)$ worden al de lijnen voorge|steld, die de hoekpun- [443]
ten, op alle mogelijke wijzen, twee aan twee genomen, vereenigen; onder deze behooren de zijden van den veelhoek zelve; dit aantal zijden is n ; gevolgelijk is:

$$g = \frac{1}{2}n(n-1) - n.$$

Juist zoo. Breng nu deze vergelijking tot de eenvoudige gedaante:

$$g = \frac{n^2-n}{2} - n = \frac{n^2-n-2n}{2} = \frac{n^2-3n}{2} = \frac{1}{2}n(n-3).$$

Welk is derhalve de regel, om in eens, bij voorbeeld, voor eenen honderdhoek het getal der diagonalen te vinden?

Men vermenigvuldigt het getal, dat de zijden voorstelt, met een getal, dat drie minder is, en deelt het produkt door twee; aldus is $\frac{1}{2} \times 100 \times 97 = 4850$, en zoo veel diagonalen bestaan er in eenen honderdhoek.

Houdt die formule ook voor kleine veelhoeken proef?

Ja, want indien ik *n=3* stel, dan wordt *n-3=0* en $g = (1/2)n(n-3) = \frac{1}{2} \times 3 \times 0 = 0$. Neem *n=4* , dan is $g = \frac{1}{2}.4 \times (4-3) = \frac{1}{2}.4.1 = 2$; dat is, een vierhoek heeft twee diagonalen enz.

VI Voorbeeld. *Vraagstuk. Er zijn uit een punt A in dezelfde vlakte drie onbepaalde lijnen AB, AC en AD getrokken, makende de hoeken BAC en CAD; in de middelste dezer lijnen is een punt P gegeven: men vraagt door dit punt P eene lijn te trekken, die door de lijn AB in Q, en door de lijn AD in R bepaald wordt, zoo dat de deelen QP en PR van de lijn QR tot elkander* *staan in reden van de getallen a en b, of in reden van twee gegevene lijnen a en b.*

Gij ziet, dat men door het punt P, binnen de beenen van den hoek BAD, verschillende lijnen QPR kan trekken aan de beenen AB en AD; maar gij ziet immers duidelijk, | dat, naarmate men de lijnen anders en anders trekt, de [444] reden van PQ tot QR zal veranderen; men zou dus door eene groote menigte van beproevingen de begeerde moeten zoeken: dit kunnen wij nu met behulp der gronden, die wij geleerd hebben, gemakkelijker, in eens, en zeker vinden. *Ziet iemand uwer daar eenig middel op?*

Niemand antwoordt.

Ik vervolg. De Ouden onderstelden, dat de vraag was opgelost, bestudeerden de figuur, en trachtten, door middel van het trekken van lijnen, met behulp van de gronden, die zij geleerd hadden, een verband tusschen het bekende en het onbekende te zoeken, om, dit verband gekend hebbende, uit hetzelve de oplossing af te leiden. Laat ons zien, of wij dit kunnen doen.

Ik stel, dat QPR de begeerde lijn is; hoe moet dan, Pieter! *QP tot PR staan?*

Als QR de ware lijn is, dan is QP:PR = *a:b*.

Indien ik de lijn PE evenwijdig aan AB trek, merkt gij dan in de figuur niets op?

Na een weinig bedenkens, o ja! dan is QP:P*R = AE:ER.

Wordt niet ondersteld, dat de lijnen AB, AC, AD in stelling gegeven zijn?

Die zijn in stelling gegeven, en dus zijn de hoeken BAC en CAD in grootte bekend.

Is ook niet het punt P gegeven?

Dit is insgelijks gegeven.

Als dit punt gegeven is, is dan ook de lijn AP niet in grootte of lengte bekend?

Ongetwijfeld.

Is er dus ten aanzien van den driehoek AEP niets op te merken?

Die is nu in alles bekend; want de zijde AP, de hoek EAP, | en de hoek [445] EPA = hoek BAC, zijn bekend, dus ook de lijn AE.

Zeer wel; maar nu moet AE tot ER staan, als a tot b, of a:b=AE:ER; is er nu een middel bekend, om ER door constructie te vinden?

Dit hebben wij in de eenvoudige werkstukken geleerd. Men trekke uit A eene onbepaalde lijn AX. Men neme op dezelve AF=a deelen, FG=b deelen, zoo a en b getallen zijn, of AF=a, FG=b, zoo a en b lijnen zijn. Men vereenige de punten E en F door de lijn EF, en trekke GR evenwijdig aan EF, dan is AE:ER = AF:FG = $a : b$.

Is dus nu het punt R niet bekend, en door het uitvinden van dit punt de begeerde lijn QR gevonden?

Alles is nu gevonden; want indien ik van dit punt R door het gegevene punt P eene regte lijn trek, dan is QP : PR = AE : ER = AF : FG = $a : b$, en dit was het, dat wij zochten.

VII VOORBEELD. Wij zullen eene leerstelling nemen, die in onze Beginselen niet voorkomt. - STELLING. *Wanneer men uit de twee hoekpunten A en C van een scheefhoekigen driehoek de loodlijnen AE en CD op de overstaande zijden BC en AB laat vallen, dan ontmoeten die loodlijnen elkander in een punt P; indien men nu uit het derde hoekpunt B door dit punt P eene lijn BPF trekt, dan zal die lijn de derde zijde BF regthoekig doorsnijden.* Laat ons zien, of wij dit betoogen kunnen.

Trek eens uit het punt P de lijnen PG en PH, evenwijdig aan AC en BC . . . . . . *Ziet gij de regthoekige driehoeken ACD en GPD? is in deze iets merkwaardigs?*

Zij zijn gelijkvormig; want omdat hoek CAD = hoek PGD is (wegens de evenwijdige lijnen AC en PG), en om | dezelfde reden hoek ACD = hoek [446]
GPD, zoo zijn zij onderling gelijkhoekig, en daarom gelijkvomig.

*Hoe staat dan AD tot G*D?*

Wij hebben de evenredigheid

AD : GD = CD : PD . . . . (1).

*Zijn ook de driehoeken BCD en H*PD niet gelijkvormig?*

Ja, wegens de evenwijdige lijnen BC en PH, zijn de hoeken CBD en PHD gelijk, als ook de hoeken BCD en HPD.

Volgt dus niet de evenredigheid,

BD : DH = CD : PD . . . . (2)?

Dit is duidelijk.

Welke evenredigheid kunt gij nu uit (1) en (2) halen?

Deze nieuwe evenredigheid:

AD : GD = BD : DH.

Wat is nu in de V Stelling IV Boek *geleerd?*

Daar is geleerd, dat men besluiten mag:

AD × DH = GD × BD . . . . . (a).

Onthoud deze vergelijking: maar gaan wij verder. *De hoek E is regt uit de onderstelling: wat moet dus de hoek APH zijn?*

Die hoek is dan ook regt; omdat PH evenwijdig is aan BC.

En wat volgt daaruit?

Daaruit volgt dat AD $\times$ DH = PD^2 is.

Vergelijk nu deze laatste vergelijking eens met de vergelijking (a); wat besluit gij dan?

Dan besluit ik, dat ook noodzakelijk

$$\mathrm{PD}^2 = \mathrm{GD} \times \mathrm{BD}$$

moet zijn.

Maar als in den driehoek BPG die vergelijking plaats heeft, wat moogt gij daaruit besluiten?

Dat de hoek BPG regt is. | [447]

Indien de hoek BPG regt is, wat zal dan de hoek F zijn?

Insgelijks regt; want PG is evenwijdig aan AC.

Gij ziet dus, dat het gestelde waar is. *Hebt gij wel opgemerkt, dat de loodlijnen, die uit de hoekpunten van eenen driehoek op de overstaande vallen, elkander in hetzelfde punt doorsnijden.*

Dit heb ik dikwijls opgemerkt, maar er de reden niet van kunnen nagaan.

Dit kan nu echter gemakkelijk bewezen worden. *Stellen wij eens, dat CD, AE en BG die loodlijnen zijn, die elkander in drie onderscheidene punten doorsnijden; indien men dan van B door P de lijn BPF trekt, wat zal die lijn?*

Loodregt op AC staan.

Wij zouden derhalve uit hetzelfde punt B twee loodlijnen BF en BG op de lijn AC hebben; is dit mogelijk?

Dit is onmogelijk.

En wat volgt daaruit?

Dat de drie loodlijnen elkander in hetzelfde punt P moeten doorsnijden.

VIII* VOORBEELD. Ik stel de volgende vraag. *Aan denzelfden kant van de onbepaalde lijn PQ zijn twee punten A en B met betrekking tot dezelve in stelling gegeven: men begeert eenen cirkel te construeren, wiens omtrek door deze twee gegevene punten gaat, en de gegevene lijn PQ ergens aanraakt.*

Laat ons zien, of wij deze vraag kunnen oplossen. *Herinnert gij u,* VICTOR! *waar alle punten liggen, die even ver van de punten A en B afstaan?*

Die liggen (zie XX *Stelling, I Boek*) in eene onbepaal|de lijn CD, die de [448]
lijn AB midden door deelt, en regthoekig op dezelve staat.

Indien wij op die lijn CD een punt M nemen, en van M tot A eene regte *lijn MA trekken, en dan eindelijk uit M met MA als straal eenen cirkel beschrijven, zal dan de omtrek van dien cirkel ook door het punt B gaan?*

Zeer natuurlijk, omdat al de stralen van eenen cirkel even lang zijn.

Maar zal die cirkel altijd de lijn PQ aanraken?

Dit zal niet voor alle punten M plaats hebben; want zoo wij het punt D zelf nemen, zal die gegevene lijn PQ door het middelpunt gaan, en dus geene raaklijn kunnen zijn.

Nemen wij eens, dat M het punt zij, dat aan al die voorwaarden voldoet: indien wij dan uit M de lijn MR loodregt op PQ laten vallen, en uit M met MR als straal eenen cirkel beschrijven, wat zal er dan gebeuren?

Dan zal die cirkel de lijn PQ aanraken, omdat de raaklijn altijd regthoekig staat op den straal, die door het raakpunt gaat.

Maar zal nu die cirkel, die uit M met MR beschreven wordt, altijd door de gegevene punten A en B gaan?

Geenszins. *Wat wordt dan vereischt?*

Dat MA = MR zij.

Wij hebben dus de vraag vereenvoudigd. Zij komt daarop neder, om op de lijn DC een punt M te zoeken, zoodanig, dat de afstand van dat punt tot de lijn PQ gelijk zij aan den afstand van het punt M tot A, of dat MR = MA zij. *Men onderstelle, dat M wezenlijk dit punt zij; men trekke de onbepaalde lijn DA, men late CE lood|regt op PQ vallen, en trekke CF evenwijdig aan* [449] *AM. Wat dunkt u, zijn dan de driehoeken DRM en DEC niet gelijkvormig?*

Zij zijn gelijkvormig, omdat zij bij D denzelfden hoek hebben, en regthoekig zijn.

Volgt dan niet de evenredigheid

MR : CE = DM : DC?

Deze ligt klaar voor oogen.

Zijn ook de driehoeken DAM en DFC niet gelijkvormig?

Deze zijn gelijkvormig, omdat AM evenwijdig is aan CF.

Volgt uit deze driehoeken niet de evenredigheid

MA : CF = DM : DC?

Indien gij deze evenredigheid met de vorige vergelijkt; wat volgt dan uit dezelve?

Dan volgt deze nieuwe evenredigheid:

MR : CE = MA : CF

of MR : MA = CE : CF

Moet niet, om aan de voorwaarde der vraag te voldoen, MR = MA zijn?

Dit moet noodzakelijk plaats hebben.

Maar wat volgt dan?

Dat ook CE = CF is.

Nu zullen wij er haast komen! De stelling van de punten A en B met betrekking tot de lijn PQ is gegeven; is dan ook niet gegeven deellijn AB?

Dit lijdt geen twijfel.

Kan men dan ook de lijn DC, die deze lijn AB regthoekig doorsnijdt, en midden doordeelt, niet construeren?

Dit hebben wij reeds menigmaal gedaan.

Is dan ook de loodlijn CE niet gegeven?

Die is insgelijks gegeven. | [450]

Is dan ook niet gegeven de onbepaalde lijn DA?

Deze is insgelijks bekend.

Waar valt die lijn?

Binnen in den hoek QDC.

Indien men dus uit C met CE als straal eenen cirkel beschrijft, zal dan die cirkel niet altijd de lijn DA doorsnijden?

Noodzakelijk.

Maar in hoe veel punten?

In de punten F en F′.

Gaan wij nu te rug. Indien wij die punten F en F′ gevonden, en de lijnen CF en CF' hebben getrokken, kan men dan uit het punt A geene lijnen trekken, die evenwijdig aan CF en CF′ loopen?

Ja! zie daar de lijnen AM en AM′, Laat ik nu de loodlijnen MR en M′R′ op PQ vallen, dan is MR = MA en M′R′ = M′A; zoo men dus uit M en M′ met MR en M′R′ als stralen cirkels beschrijft, dan zullen deze cirkels door de punten A en B gaan, en de lijn PQ in de punten R en R′ aanraken.

En aldus is de vraag in den trant der oude meetkundigen opgelost. Laat ons nu eens zien, of wij dezelve in den trant der nieuwere kunnen oplossen.

Omdat de punten A en B met betrekking tot de lijn PQ in stelling zijn gegeven, zoo is gegeven 1^o. de lengte van de lijn AB; gevolgelijk de lengte van AC − BC; benevens de lijn CD, die loodregt op AB, en de lijn CE, die loodregt op PQ staat.

Men zal de lengte dezer lijnen in getallen kunnen voorstellen, indien men dezelve met eene schaal meet. Laat CD = a, CE = b en AC = c deelen zijn. Indien men wist, hoe veel deelen DM bevatte, dan zou het middelpunt van | [451]
den begeerden cirkel bekend zijn. Stel DM = x, en zien wij, of er mogelijkheid is, om het getal x door berekening te vinden. Laat MR loodregt op PQ vallen,

en trek de lijn MA, dan moet de lengte van DM zoodanig bepaald worden, dat RM = AM = BM zij.

Zeg mij, hoe wordt, indien DC = a, en DM = x deelen is, MC gevonden?

Door x deelen van a deelen af te trekken; MC = $a - x$.

In den regthoekigen driehoek ACM is AC = c deelen, en CM = a − x deelen, zou men dan AM kunnen berekenen?

Men moet de getallen $a-x$ en c in het vierkant brengen, en uit de som van deze tweede magten den tweeden magtswortel trekken, men heeft namelijk: $\mathrm{AM}^2 = \mathrm{CM}^2 + \mathrm{AC}^2 = (a-x)^2 + c^2 = x^2 - 2ax + a^2 + c^2$

Ziet gij niet, dat de driehoeken DMR en DCE gelijkvormig zijn?

Deze zijn gelijkvormig, omdat MR en CE beide regthoekig op PQ staan, en dus evenwijdig zijn.

Staat dan niet DC:CE = DM:MR?

Dit is klaar.

Wat kan men in getallen voor die evenredigheid schrijven?

$$a : b = x : \mathrm{MR}.$$

Indien dus a, b en x in getallen bekend waren; wat zou dan MR worden?

Dan wordt MR = $\frac{bx}{a}$ en $\mathrm{MR}^2 = \frac{b^2x^2}{a^2}$

Wij hebben dus twee vormen, een voor AM² en een voor MR²; nu moet AM=MR zijn; welke vergelijking volgt hieruit? | [452]

Hieruit volgt de vergelijking

$$\frac{b^2x^2}{a^2} = x^2 - 2ax + a^2 + c^2.$$

Indien men uit deze vergelijking x oplost, dan zal de lijn DM in deelen van de schaal, en bijgevolg het middelpunt van den gezochten cirkel bekend worden. Laat ons nu eens zien, hoe gij de vergelijking oplost.

Ik vermenigvuldig dezelve eerst met a^2 en dan verkrijg ik

$$b^2x^2 = a^2x^2 - 2a^3x + a^2(a^2 + c^2)$$

en na deze gesorteerd te hebben verkrijg ik:

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^3x + a^2(a^2 + c^2) = 0$$

en nu blijkt het, dat deze vergelijking eene vierkante of tweede magtsvergelijking is, welke, om dezelve tot de oplossing gereed te maken, door den coëfficient $a^2 - b^2$ van den eersten term moet gedeeld worden; als wanneer wij verkrijgen:

$$x^2 - \frac{2a^3}{a^2 - b^2}x + \frac{a^2(a^2 + c^2)}{a^2 - b^2} = 0$$

Wanneer men nu deze vergelijking naar den regel oplost, dan zal men vinden

$$x = \frac{a^3}{a^2 - b^2} \pm \sqrt{\frac{a^6}{(a^2 - b^2)^2} - \frac{a^2(a^2 + c^2)(a^2 - b^2)}{(a^2 - b^2)^2}}$$

Ja, maar kan men den getallenvorm, die onder het wortelteeken voorkomt, niet onder eene eenvoudige gedaante brengen?

Ja, wanneer men het produkt $a^2(a^2+c^2)(a^2-b^2)$ eerst door vermenigvuldiging ontwikkelt en van a^6 aftrekt; dan verkrijgt men $a^4(b^2 - c^2) + a^2b^2c^2$, of $a^2[a^2(b^2 - c^2) + b^2c^2]$; wij hebben dus:

$$x = \frac{+a^3 \pm a\sqrt{a^2(b^2 - c^2) + b^2c^2}}{a^2 - b^2} \quad \ldots\ldots(\mathrm{A})$$

Wanneer nu a, b en c in getallen gegeven zijn, zal | *men de twee waarden van x, dat is, de lengte van de lijnen DM en DM', dat is, de plaats van de middelpunten der twee begeerde cirkels verkrijgen. Laat ons beproeven, of die berekening met onze vorige constructie overeenstemt. Op onze schaal is DC = a = 36 deelen, CE = b = 28, en AC = c = 16 deelen, bereken nu eens de waarden van x.* [453]

Wij hebben $a^2-b^2 = 36\times36-28\times28 = 512$; $b^2-c^2 = 28\times28-16\times16 = 528$; $(b^2 - c^2)a^2 = 528 \times 1296 = 684288$; $b^2c^2 = 784 \times 256 = 200704$; $a^3 = 46656$; derhalve:

$$x = \frac{+46656 \pm 36\sqrt{684288 - 200704}}{512}$$

$$x = \frac{+46656 \pm 36\sqrt{483584}}{512}$$

Nu is $\sqrt{483584} = 695,402$ nagenoeg, en dus $36\sqrt{483584} = 25034,472$; wij hebben dus: $x = \frac{21621,528}{512} = 40,276$ en $x = \frac{71690,472}{512} = 140,003$.

Ik vervolg. Ik neem op de schaal 40,276 deelen. Ziet gij, dat dit juist de lengte van de lijn DM is? Ik neem nog op de juiste schaal 140,003 deelen; ziet gij, dat dit is de lengte van DM'? Zoo stemt de berekening met de constructie overeen.

Gij ziet dus, dat hoezeer de wegen verschillen, de uitkomsten dezelfde zijn; de eerste manier van oplossen is in de trant der Ouden; in dezelve stelt men zich de figuur in derzelver geheel voor, zonder op de verhouding of de reden der deelen te letten; in de laatste manier onderstelt men, dat bekenden en onbekenden in eenheden van dezelfde maat zijn uitgedrukt, en men zoekt, met behulp van de bekende eigenschappen der figuur, en uit de voorwaarden der vraag, eene vergelijking, waardoor eene der onbeken|den, waarvan al [454] het overige afhangt, gevonden wordt; men brengt alzoo het meetkunstige vraagstuk tot een rekenkunstig, behandelt het tot aan het einde der oplossing als zoodanig. Maar beschouwen wij de verkregen formule (A) eens wat nader. *Zeg mij eens,* PIETER! *zal die formule altijd bestaanbaar zijn?*

Zij zal alleen bestaanbaar zijn, zoo de vorm $a^2(b^2 - c^2) + b^2c^2$, die onder het wortelteeken staat, positief is; want negatief zijnde, zoo zijn de wortels onbestaanbaar, en de gegevens met het gevraagde onderling strijdig.

Zoek eens, wat men verkrijgen kan, indien men den getallenvorm, onder het wortelteeken staande, gelijk nul stelde.

Dan verkrijgen wij $a^2(b^2 - c^2) + b^2c^2 = 0$, of $b^2c^2 = a^2(c^2 - b^2)$, waaruit de vierkante wortel is $bc = a\sqrt{c^2 - b^2}$.

Volgt hier niet uit, dat $\frac{bc}{a} = \sqrt{c^2 - b^2}$ *is?*

Ongetwijfeld.

Maar indien men den vorm onder het wortelteeken gelijk nul stelt, wat wordt dan x*?*

Dan wordt $x = \frac{a^3}{a^2 - b^2}$, en er bestaat derhalve slechts eene waarde voor DM, men vindt dus slechts eenen cirkel.

Laat ons eens zien, of dit met de figuur overeenkomt.

Verleng eens BA tot in S, en stel eens, dat A in S valt, is dan niet ES = $\sqrt{c^2 - b^2}$ *?*

Dit volgt uit den regthoekigen driehoek ECS.

Is niet die regthoekige driehoek ECS gelijkvormig met den regthoekigen driehoek CDS?*

Die gelijkvormigheid bestaat, omdat DCS eene regte hoek is.

| *Is dan niet DC : CE = CS : ES, of* $a : b = c : ES$*?* [455]

Dit is eene erkende waarheid.

Wordt derhalve niet ES = $\frac{bc}{a}$*, en hebben wij zoo even niet gezien, dat ES =* $\sqrt{c^2 - b^2}$ *is?*

Juist, en dus is $\frac{bc}{a} = \sqrt{c^2 - b^2}$.

Kunt gij hier iets uit besluiten?

Het blijkt nu, dat wanneer een der gegevene punten in de lijn PQ valt, de wortel-grootheid in de formule verdwijnt.

Maar zoo die wortel-uitdrukking nul wordt, dan verkrijgen wij slechts eene waarde voor DM, en eenen cirkel $x = \frac{a^3}{a^2-b^2}$*; zal dit nu ook met de figuur overeenkomen?*

Dit zie ik niet duidelijk in.

Rigt uit S de loodlijn ST op PQ, die DC in T ontmoet; zoo gij dan uit T met TS als straal eenen cirkel beschrijft, zal dan die cirkel de lijn PQ niet in T aanraken, en door de punten A en B gaan?

Daar is geen twijfel aan.

Zie nu eens, of gij de waarde van de lijn DT kunt berekenen.

Na eenig bedenken, Dit zal moeijelijk gaan.

Laat ons zien! is niet $DC \times CS = CE \times DS$*, of* $ac = b \times DS$*, en derhalve* $DS = \frac{ac}{b}$ *?*

Dit zie ik.

Is niet $DE^2 = a^2 - b^2$*?*

Dit is ook waar.

Volgt uit de gelijkvormige driehoeken DCE en CES niet $CS : CE = CD :$
DE*, of* $c : b = a : \sqrt{a^2 - b^2}$ *? |* [456]

Dit is insgelijks waar.

Derhalve wordt $\frac{c}{b} = \frac{a}{\sqrt{a^2-b^2}}$ *en* $\frac{ac}{b} = \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$ *?*

Ongetwijfeld.

Beschouw nu eens de gelijkvormige driehoeken DCE en DTS, en zie eens, of gij geene formule voor DT kunt vinden.

Men heeft DE : DS = DC : DT, dat is $\sqrt{a^2 - b^2} : \frac{a^2}{\sqrt{a^2-b^2}} = a : \mathrm{DT}$, en deze oplossende, komt:

$$\mathrm{DT} = \frac{a^3}{a^2 - b^2}$$

Ziet gij nu, hoe alles weder met elkander overeenstemt? maar zetten wij onze beschouwing voort! Is niet, indien het punt A in S valt, $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$

Dit volgt uit de vergelijkingen, die wij gevonden hebben.

Goed; maar zal nu die waarde van c den vorm, die in de formule (A) onder het wortelteeken staat, vernietigen?

Uit $c = \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$ volgt eerst $c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2}$; derhalve wordt: $b^2 - c^2 = b^2 -$

$\frac{a^2b^2}{a^2-b^2} = \frac{a^2b^2-b^4-a^2b^2}{a^2-b^2} = \frac{-b^4}{a^2-b^2}$ en omdat $b^2c^2 = +\frac{a^2b^4}{a^2-b^2}$ is, zoo wordt:

$$a^2(b^2-c^2) + b^2c^2 = -\frac{a^2b^4}{a^2-b^2} + \frac{a^2b^4}{a^2-b^2} = 0$$

en nu blijkt, dat wezenlijk die waarde van c de wortel-uitdrukking doet verdwijnen. | [457]

Indien wij c kleiner dan $\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$ *nemen, wat betekent dat in de figuur.*

Dat het gegeven punt A op de lijn CS tusschen C en S valt, en dus het punt B op het verlengde van die lijn.

Zeer wel! en dan is de vraag mogelijk, en de eerste meetkunstige oplossing heeft ons geleerd, dat er twee cirkels aan de voorwaarden voldoen. Laat ons nu eens onderzoeken, of zulks ook met de formule (A) zal overeenkomen. Stellen wij tot dat einde

$$c = \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}} - r \ldots .(\mu)$$

dan is c kleiner dan $\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$. *Zeg mij nu,* HENDRIK! *wat wordt* c^2*?*

Voor de tweede magt dezer vergelijking vind ik:

$$c^2 = \frac{a^2b^2}{a^2-b^2} - 2r \times \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}} + r^2.$$

Goed, en wat wordt dan $b^2 - c^2$*?*

Ik vind na behoorlijke herleiding:

$$b^2 - c^2 = -\frac{b^4}{a^2-b^2} + 2r \times \frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}} - r^2.$$

En wanneer gij die vergelijking met a^2 *vermenigvuldigt?*

Dan verkrijg ik:

$$a^2(b^2-c^2) = - * \frac{a^2b^4}{a^2-b^2} + 2r \times \frac{a^3b}{\sqrt{a^2-b^2}} - a^2r^2 \ldots (\alpha)$$

Nu zoudt gij ook gemakkelijk de waarde van b^2c^2 *kunnen berekenen?*

Deze wordt uit het voorgaande:

$$b^2c^2 = +\frac{a^2b^4*}{a^2-b^2} - 2r \times \frac{ab^3}{\sqrt{a^2-b^2}} + b^2r^2 \ldots (\beta)$$

Indien gij nu de vergelijkingen (α) en (β) | optelt, verkrijgt gij dan in de aangenomene onderstelling niet de waarde van den vorm, die onder het wortelteeken staat? [458]

Ik verkrijg bij die optelling:

$$a^2(b^2-c^2)+b^2c^2=2r\times ab\frac{(a^2-b^2)}{\sqrt{a^2-b^2}}-(a^2-b^2)r^2.$$

Kunt gij die vergelijking niet onder een beteren vorm voorstellen?

$$a^2(b^2-c^2)+b^2c^2=r(a^2-b^2)\times\{\frac{2ab}{\sqrt{a^2-b^2}}-r\}\ .\ .\ .\ .\ .\ (\psi)$$

Merk nu op, dat a altijd grooter dan b is, en dat derhalve [*in de vergelijking $c=ab:\sqrt{a^2-b^2}-r$]* de factor $r(a^2-b^2)$ positief is, en dat ook positief is $2ab:\sqrt{a^2-b^2}$: nu blijkt het, dat r altijd kleiner dan c is, maar $c=ab:\sqrt{a^2-b^2}-r*$ zijnde, zoo is $2ab:\sqrt{a^2-b^2}-r$ altijd grooter dan c, en dus positief; en hieruit volgt, dat zoo lang het punt A op de lijn CS valt, de grootheid onder het wortelteeken altijd positief zal blijven, en dat dus de formule (A) voor x twee waarden zal geven. - *Maar wat wordt de vergelijking (ψ), wanneer A in S valt?*

Deze wordt nul, omdat in dit geval $r=0$ is.

Wanneer ik in de vergelijking (μ) aan r eene negatieve waarde geef, wat zal zij dan worden?

$$c=\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}+r$$

En wat beteekent dat dan?

Dit beteekent, c grooter dan $\frac{ab}{\sqrt{a^2-b^2}}$ te nemen.

En wat wil dat dan in de figuur zeggen?

Het punt A aan den anderen kant van de lijn PQ op het verlengde van CS te stellen.

En waar valt dan het punt S? | [459]

Aan de andere zijde van PQ.

Is dan de vraag mogelijk?

In geenen deele.

Maar indien r in de vergelijking (μ) negatief gesteld wordt, wat wordt dan de vergelijking (ψ)?

Die wordt dan natuurlijk:

$$a^2(b^2 - c^2) + b^2c^2 = -r(a^2 - b^2) \times \{\frac{2ab}{\sqrt{a^2 - b^2}} + r\}$$

en deze is *per se* altijd negatief.

Zie daar dus wederom eene nieuwe proef van volkomene overeenstemming tusschen de meet- en rekenkunstige oplossingen. - Maar gaan wij verder. - *Stellen wij eens, dat de punten A en B vallen in eene lijn, welke evenwijdig ligt aan PQ, wat moet er dan gebeuren?*

Dan moeten de punten D en E in elkander vallen, en a moet dan gelijk b worden.

Wat zal in die onderstelling de grootheid onder het wortelteeken worden?

Deze zal worden: $a^2(b^2-c^2)+b^2c^2 = a^2(a^2-c^2)+a^2c^2 = a^4-a^2c^2+a^2c^2 = a^4$

*En wat wordt dan de formule (*A*)?*

Deze wordt, omdat $\sqrt{a^4} = \pm a^2$ is:

$$x = \frac{a^3 \pm a^3}{a^2 - a^2}$$

Laat ons zien, wat deze formule beteekent. *Weet gij nog wel uit de beginselen der stelkunst,* dat:

$$\frac{a^3 + x^3}{a^2 - x^2} = \frac{(a + x)(x^2 - *ax + a^2)}{(a + x)(a - x)} = \frac{x^2 - ax + a^2}{a - x}$$

en

$$\frac{a^3 - x^3}{a^2 - x^2} = \frac{(a - x)(x^2 + *ax + a^2)}{(a - x)(a + x)} = \frac{a^2 + ax + x^2}{a + x}$$

Wanneer ik nu in deze vergelijkingen $x = a$ stel, wat zal ik dan verkrijgen?

| Dan zal ik voor de twee wortels vinden: [460]

$$x = \frac{a^3 + a^3}{a^2 + a^2} = \frac{a^2 + a^2 + a^2}{a + a} = \frac{3a^2}{2a} = 1\frac{1}{2}a$$

$$x' = \frac{a^3 - a^3}{a^2 - a^2} = \frac{a^2 - a^2 + a^2}{a - a} = \frac{a^2}{0} = \infty$$

Wat wil dit zeggen?

Dat in onze oorspronkelijke figuur DM $= 1\frac{1}{2}a$ en DM$'$ oneindig groot is; zoo dat er nu eigenlijk maar een cirkel bestaat.

Stemt dit nu met de figuur overeen?

Indien men eene nieuwe figuur voor dit geval opmaakt, zal men het alzoo bevinden.

Zeg mij nog eens, wanneer de punten A en B in eene lijn liggen, die loodregt op PQ staat, wat zal er dan gebeuren?

Dan loopt DC evenwijdig aan PQ, en omdat wij de waarden van a en x van het punt D geteld hebben, worden a en x oneindig groot, en wij kunnen om die reden uit de formule (A) niets halen.

Nog eene vraag: zoudt gij eene formule kunnen vinden voor de stralen der cirkels?

Wij hebben gevonden MR $= \frac{bx}{a}$; indien wij dus de waarde van x met $\frac{b}{a}$ vermenigvuldigen, en de straal $=r$ stellen:

$$r = \frac{a^2 b \pm b\sqrt{(b^2 - c^2)a^2 + b^2 c^2}}{a^2 - b^2}$$

Wat wil het zeggen, indien ik b=c stel?

Dat BA loodregt op PQ staat; dit is het geval, dat wij zoo even beschouwden.

Maar wat wordt dan de waarde van r? | [461]

Deze wordt na eene behoorlijke herleiding:

$$r = \frac{a^2 b \pm b^3}{a^2 - b^2} = b \times \frac{a^2 \pm b^2}{a^2 - b^2}$$

Deel teller en noemer dezer breuk eens door a^2, wat verkrijgt gij dan?

$$r = b \times \frac{1 \pm \frac{b^2}{a^2}}{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

Maar indien a oneindig groot is, wat wordt dan $\frac{b^2}{a^2}$?

Dit gebroken wordt dan nul.

En wat de waarde van r?

Dan wordt $r = b$

Dit zult gij ook door constructie vinden.

Wij achten deze voorbeelden voldoende te zullen zijn, om een denkbeeld te geven van de leerwijze, die behoorde gevolgd te worden, om met een gewenscht gevolg de aankomelingen in de gronden der wetenschappen te onderwijzen; van eene leerwijze, die, indien men bekwaam genoeg is, om de

zedelijke beweegredenen mede in werking te brengen, het best zal geschikt zijn, om de aandacht gaande te houden en buigbaar te maken, en om tevens, door eene onophoudelijke oefening, zijne leerlingen aan orde te gewennen, het geheugen, de voorstellingskracht en het oordeel op te scherpen, en door onophoudelijke oefening te ontwikkelen, en tot volle kracht te brengen. De oplettende lezer zal uit de aandachtige lezing | van die voorbeelden hebben [462]
kunnen opmerken, hoe inderdaad deze leerwijze, die niet nieuw, maar zoo oud als Socrates is, moet zamenloopen, om zich in het gebruik der rede en natuurlijke redeneerkunde te oefenen; hij zal oordelen, of wij derhalve gegronde reden hebben gehad, om de beoefening der reken- en meetkunst (daar men in dezelve de voorwerpen zijner beschouwing zinnelijk voor oogen heeft) als het geschiktste middel ter verstandsontwikkeling aan te prijzen.

Men vergisse zich echter niet, door te denken, dat de antwoorden, die ik in den mond mijner respondenten gelegd heb, altijd zoo vlot op de vragen volgen: men moet integendeel zijne respondenten van zelf tot die antwoorden brengen, door hen dezelve te laten herhalen: wat ik in de voorbeelden heb voorgesteld, zijn slechts schetsen, die men naar de omstandigheden en de vatbaarheid zijner respondenten moet wijzigen; in geen geval zou men deze leerwijze slechter uitvoeren, dan wanneer men de bijgebragte voorbeelden letterlijk zou willen volgen. Het eenige middel, om deze leerwijze magtig te worden, bestaat in eene grondige eigenoefening van het onderwerp, dat men anderen leert. Al heeft men zijn geheele compendium vast in het hoofd, het zal weinig baten; wanneer men het niet door en door bearbeid, en van alle kanten bezien heeft, zal men nooit de voorgeschrevene leerwijze kun|nen [463]
volgen; gebrek aan duidelijke kennis zal de vragen, die men te doen heeft, belemmeren, en men zal niet in staat zijn, om de verkeerde en onnaauwkeurige antwoorden zijner respondenten te verbeteren.

Het is wegens de moeijelijkheid, die hieraan verknocht is, te verwachten, dat al die genen, die aan den ouden en gemakkelijken slenter gewoon zijn, niet zullen nalaten, verscheidene aanmerkingen tegen dezelve te maken. *Zij zullen* (dit is hunne gewone manier van spreken) *die leerwijze ten uiterste langdradig vinden;* het zal heeten: *de jonge lieden te lang bij de beginselen op te houden;* men zal zeggen: *het is beter hen toepassingen te leeren maken,* en zoo zal men zich in bedenkingen trachten uit te putten, om zich van de moeite te ontslaan, van zich door oefening met eene betere leerwijze bekend te maken. Zij, die echter zoo willen, mogen hunnen weg gaan; die na zoo veel overtuigende redenen, als wij hebben bijgebragt, zich niet willen laten overreden, blijven gerustelijk in hunne verkeerde begrippen, dwalingen en

vooroordelen voortgaan; meer bewijsredenen, dan wij in deze Verhandeling en opgegevene proeven hebben bijgebragt, zouden voor hen overtollig zijn: wij hebben reeds onze eigene ondervinding, en de vele gelukkige uitkomsten, die onze leerwijze heeft opgeleverd, voor ons, en deze doen in het oor|deel [464]
van het algemeen meer af, dan de magtspreuken dergenen, die, onder het uiterlijk van een geleerd en kundig man, hunne onbedrevenheid kunstig weten te verbergen; de schade, welke die verkeerde leerwijze kan aanbrengen, zal jaarlijks verminderen; het aantal der bekwame leeraren toenemen; en waarom zouden wij ons dan nog langer ophouden met het bijbrengen van andere bewijsgronden, welke, indien het reeds gezegde geene klem van overtuiging heeft kunnen te weeg brengen, toch even vruchteloos zouden verspild worden.

Maar wij zijn aan degenen, die tot hiertoe den ouden slenter hebben gevolgd, en door onze bijgebragte redenen zijn overtuigd geworden, dat de voorgestelde leerwijze veel beter en doelmatiger is, een welmeenenden raad verschuldigd. Zij bestuderen voor zich zelve de gronden van voren af aan, ontwerpen op papier voor zich voorbeelden van de Socratische manier, naar de modellen, die wij hebben opgegeven. Zij zullen, na korte tijd werkens, bevinden, dat zij die leerwijze meer en meer magtig zullen worden, en de uren, die zij aan het onderwijs besteden, zullen voor hen aangenamer afloopen.

Zoo wij ons met reden mogen vleijen: dat wij door dit geschrift de welwillenden onder de leeraars der jeugd, die zelve nog onderrigt behoeven | (en wie [465]
behoeft dit niet? ik zelf heb het nog dagelijks noodig!), dienst, hulp en teregtwijzing hebben aangebragt; niet minder hebben wij gegronde reden, om te verwachten, dat allen, die tot hiertoe, wegens gebrek aan genoegzame kunde in den aard en het doel van het wetenschappelijke onderwijs, hetzelve tot hiertoe ongenegen gebleven waren, aangaande dit gewigtig punt tot andere gedachten zullen komen, en, in plaats van bloote aanschouwers te blijven, door hun gezag en hunnen invloed zullen helpen medewerken, om aan hetzelve een onbelemmerden loop te geven. Dat allen, wien het, na het lezen dezer Verhandeling, nog schemeren mogt (want het is moeijelijk, opgevatte en oud gewordene denkbeelden zoo spoedig te laten varen), herlezen, overdenken en beproeven wat wij gezegd hebben; dat zij het met de uitkomsten en daadzaken vergelijken! de tijd en overdenking zullen hen eindelijk overtuigen. Onze Verhandeling is geen fraai opgesteld geschrift, dat den uiterlijken schijn heeft van wel opgesteld te zijn; zij is de vrucht van eene langdurige en opzettelijke studie van den natuurlijken zamenhang en het verband der dingen; en ik twijfel niet, of men zal daarvan meer en meer overtuigd worden, en gevoelen, dat men wel en goed handelt en werkt, wanneer men in alles de

natuur getrouw volgt.

Dat ook zij, welke tot hiertoe ter goeder trouw gemeend hebben, dat het onderwijs van de be|ginselen der wetenschappen met de inrigting eener [466] goede Latijnsche School onbestaanbaar is, overwegen wat wij gezegd hebben, en onze gronden, indien zij kunnen, door voorhanden zijnde daadzaken wederspreken! dat zij aanwijzen, in welk punt van onze voorgedragene leerwijze, dezelve aan het leeren van Grieksch en Latijn nadeelig zou kunnen zijn! Is de onderhoudene leerwijze, die ik voorgesteld heb, niet die, welke (zoo als de ondervinding mij zelven geleerd heeft) ook in het leeren der oude talen en letterkunde kan gevolgd, en behoorde gevolgd te worden? Is dit vreemd, welaan men legge zich op dezelfde toe! welhaast zal men ook van het letterkundige onderwijs rijker vruchten trekken.

Dat eindelijk allen, die bij het onderwijs belang hebben, ouders, voogden, en ware beminnaars van hun vaderland, overdenken wat ik heb gezegd! dat zij oordelen, of waarlijk mijn oogmerk geweest zij de bevordering van het erkennen der waarheid, van welke alleen de éénheid van denkwijze afhangt, door welke, en door niets anders, rust, orde en geluk in den staat kunnen gevestigd worden, en bestendig gevestigd blijven!

EINDE