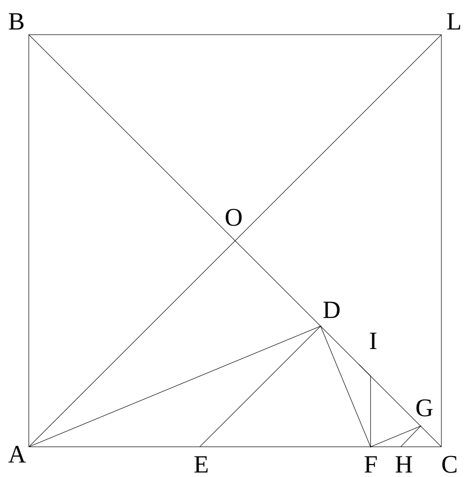
Drie opgaven naar aanleiding van Van Swindens bewijs, en twee kettingbreuken.

De eerste drie sommen bestaan elk uit twee onderdelen. Onderdelen a gaan over het meetkundig bewijs van irrationaliteit. In deze onderdelen wordt gesteld dat twee lijnstukken een gemene maat g hebben en vervolgens wordt een tegenspraak afgeleid. De twee lijnstukken hebben dus geen gemene maat en daarom is hun verhouding irrationaal. De onderdelen b doen voorwerk voor het numeriek benaderen van de irrationale verhouding.

Som 1 is eigenlijk niet een echte som maar een korte herhaling van Van Swindens bewijs. Som 2 is speciaal voor deze workshop bedacht. Som 3 is geïnspireerd door het werk van historici van de Griekse wiskunde.

U kunt naar believen de sommen op volgorde maken, of eerst alle a-sommen en dan de b-sommen.



Opgave 1a. Kijk naar de figuur van Van Swinden (zie voor een uitleg paragraaf 4 van de handout). Neem aan dat AB en BC een gemene maat g hebben. Dan zijn er dus natuurlijke getallen p en q met $AB = pg$ en $BC = qg$.

Laat zien dat g ook een gemene maat is van EC en DC.

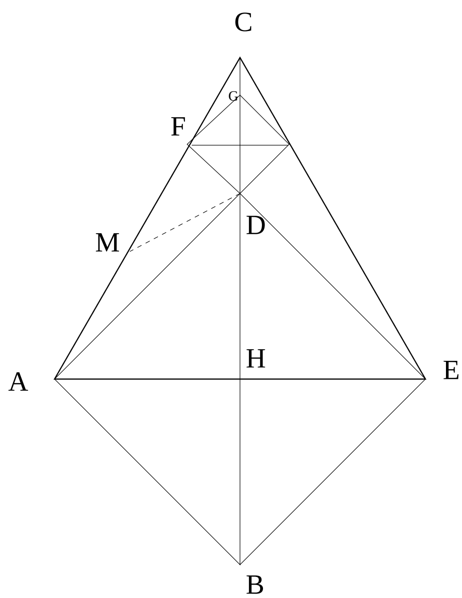
Kunnen we nu direct inzien dat AB en BC geen gemene maat kunnen hebben?

Opgave 1b. Laat zien dat $BC = AC + DC$,

$AC = \mathbf{2} \cdot DC + FC$,

$DC = \mathbf{2} \cdot FC + GC$.

Hoe gaat het proces nu verder?



We laten nu zien hoe ongeveer dezelfde redenering kan worden gebruikt voor de hoogtelijn en de halve basis van een gelijkzijdige driehoek (in moderne termen de verhouding $HC : AH = \sqrt{3} : 1$).

Opgave 2a. AEC is een gelijkzijdige driehoek en H het midden van de basis. We stellen dat HC en AH een gemene maat g hebben.

We tekenen het vierkant $AEDB$. Laat zien dat AC=2AH en AH=HB. Laat zien dat BC en AC ook dezelfde gemene maat g hebben. We gaan nu verder uit van BC en AC. (In moderne termen is $BC/AC = \frac{1}{2}(\sqrt{3} + 1)$.

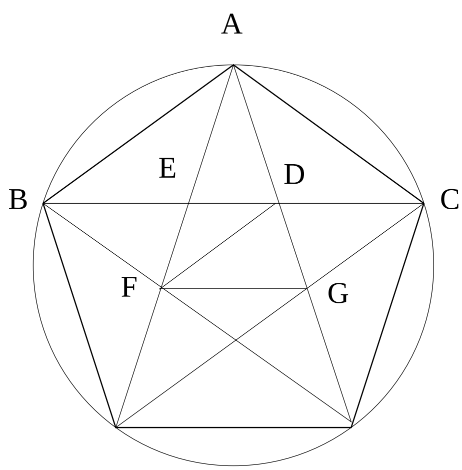
Laat zien dat $AC = BD$. Laat zien dat AC en DC nu ook dezelfde gemene maat g hebben.

Verleng ED en vind het snijpunt F met AC. Teken het vierkant met zijde DF. Laat zien dat de hoeken in driehoek ADF $15^o, 90^o$ en 75^o zijn. Stel M is het midden van AF. Trek DM. Laat nu zien dat $AM = FM = DM$. Laat zien dat driehoek MDC gelijkbenig is, en concludeer $DM = DC$ en $AF = 2\ DC$.

Laat nu zien dat DC en FC dezelfde gemene maat g hebben.

Kunnen we nu inzien dat $AC : BC$ irrationaal is? En $HC : AH$?

Opgave 2b. Laat zien $BC = \mathbf{1} \cdot AC + DC$, en $AC = \mathbf{2} \cdot DC + FC$.
Hoe gaat het proces verder?



Opgave 3a. Nu bekijken we de diagonaal BC en de zijde $AB = AC$ van een regelmatige vijfhoek. Veronderstel dat BC en AB een gemene maat g hebben.

Ga na dat het volgende geldt:

$AC = BD$

$BC = \mathbf{1} \cdot BD + CD$

$CD = BE = DF$

$BD = \mathbf{1} \cdot BE + ED$

Concludeer dat g een gemene maat is van DF en DE.

Kunnen we nu inzien dat BC en AB een irrationale verhouding hebben?

Opgave 3b. Laat zien hoe het proces verder gaat.

Opgave 4. Bepaal met behulp van opgave 2b of door een losse berekening de wijzergetallen voor $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)$.
(Hint voor het berekenen van de wijzergetallen zonder opgave 2b: de eerste stap is $\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1) = 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{3}-1)$ en zo verder.)

Stel de kettingbreuk op en vind een benadering in vier stappen met het schema van Jacob de Gelder.

Als geheugensteuntje volgt hier het schema voor $\sqrt{2}$.

	1	2	2	2	2
$\frac{1}{0}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{17}{12}$	$\frac{41}{29}$
+	-	+	-	+	-

Het is nu ook mogelijk de kettingbreuk te geven van $\sqrt{3}$, omdat geldt:

$$\sqrt{3} = 1 + \frac{1}{\frac{1}{2}(\sqrt{3}+1)}.$$

Opgave 5. Wie klaar is kan nu uit opgave 3 een kettingbreuk bepalen voor de verhouding tussen diagonaal en zijde van de vijfhoek. Welke benaderingsbreuken vindt u met het schema van Jacob de Gelder? Herkent u deze getallen?