Antwoorden bij de workshop over de Taylorreeks voor de sinus en cosinus in het Sanskriet.

Opgave 1. Antwoord voor $a = 10^o$

1.2. $\sin(a) = 0{,}17364\ 81776\ 66930\ 34885$

1.3. $x = 0{,}\underline{17}453\ 29251\ 99432\ 95769$

1.4. (decimalen die overeenkomen met die in sin (10^o) zijn onderstreept)

$$x - \frac{x^3}{6} = 0{,}\underline{17364}\ 68290\ 43731\ 65968$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \underline{\ 0{,}17364\ 817}86\ 45354\ 82293$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} = 0{,}\underline{17364\ 81776\ 6}5163\ 36775$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = 0{,}\underline{17364\ 81776\ 66930}\ 46351$$

$$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} = 0{,}\underline{17364\ 81776\ 66930\ 3488}3$$

Opgave 2: Het eerste resultaat is $a \cdot \frac{a^2}{R^2 \cdot (2^2+2)} = \frac{a^3}{3!R^2}$,

het tweede resultaat $a \cdot \frac{a^2}{R^2 \cdot (2^2+2)} \cdot \frac{a^2}{R^2 \cdot (4^2+4)} = \frac{a^5}{5!R^4}$, enz. zo ook het derde resultaat $\frac{a^7}{7!R^6}$, het vierde resultaat $\frac{a^9}{9!R^8}$ en het vijfde resultaat $\frac{a^{11}}{11!R^{10}}$.

De boog en die resultaten schrijven we onder elkaar (dus a, $\frac{a^3}{3!R^2}$, $\frac{a^5}{5!R^4}$, $\frac{a^7}{7!R^6}$, $\frac{a^9}{9!R^8}$, $\frac{a^{11}}{11!R^{10}}$).

In het vers berekent men nu eerst $\frac{a^9}{9!R^8}$-$\frac{a^{11}}{11!R^{10}}$, daarna $\frac{a^7}{7!R^6}$-($\frac{a^9}{9!R^8}$-$\frac{a^{11}}{11!R^{10}}$), en uiteindelijk komt er

$\text{Sin}(a) = a - (\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))))$

Voor we de moderne Taylorreeks kunnen gebruiken, moeten we eerst graden a omzetten in radialen x, waarbij $x = a/R$. Zo krijgen we $Sin(a) = R\sin(x) = R\sin(a/R) = R(\frac{a}{R} - \frac{a^3}{3!R^3} + \frac{a^5}{5!R^5} - \frac{a^7}{7!R^7} + \frac{a^9}{9!R^9} - \frac{a^{11}}{11!R^{11}}) \ldots$

Het vers van Madhava en de moderne Taylorreeks komen dus wiskundig gezien op hetzelfde neer - Madhava heeft geen foutschatting, hij kan bij de term $\frac{a^{11}}{11!R^{10}}$ stoppen omdat dit voor hem nauwkeurig genoeg is.

Opgave 3.1 **Mādhavas sinustabel in verzen van 8 lettergrepen, eerste helft, van $3^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 45^o**

Notatie: $1105; 10, 39$ betekent $1105 + \frac{10}{60} + \frac{39}{3600}$

Sanskrit	a	decimalen	Sin(a)
ṡreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ	$3^o45'$	22054220	0224;50,22
himādrir veda*bh*āvanaḥ	$7^o30'$	85248440	0448;42, 58
tapano *bh*ānuḥ sūktajño	$11^o15'$	61040760	0670;40,16
ma*dh*yamaṁ vid*dh*idohanaṁ	15^o	51549880	0889;45,15
*dh*igājyo nā śanaṁ kaṣṭaṁ	$18^o45'$	93105011	1105;10,39
*ch*anna*bh*ogā śayāṁbikā	$22^o30'$	70435131	1315;34,07
mṛgāhāro nareśo yaṁ	$26^o15'$	53820251	1520;28,35
vīro raṇajayotsukaḥ	30^o	42258171	1718;52,24
mūlaṁ viṣud*dh*aṁ nāḷasya	$33^o45'$	53459091	1909;54,35
gāneṣu viraḷā narāḥ	$37^o30'$	30642902	2092;46,03
aśud*dh*iguptā coraśrīḥ	$41^o15'$	05936622	2266;39,50
ṡaṅkukarṇo nageśvaraḥ	45^o	51150342	2430;51,15

Madhavas sinustabel in verzen van 8 lettergrepen, tweede helft, van $48^o45'$ tot 90^o

Sanskrit	a	decimalen	Sin(a)
tanūjo gar*bh*ajo mitraṃ	$48^o45'$	60834852	2584;38,06
śrīmān atra su*kh*ī sa*kh*e	$52^o30'$	25027272	2727;20,52
śaśī rātrau himāhāro	$56^o15'$	55228582	2858;22,55
vegajñaḥ pa*th*isin*dh*uraḥ	60^o	43017792	2977;10,34
*ch*āyālayo gajo nīlo	$63^o45'$	71313803	3083;13,17
nirmalo nāsti satkule	$67^o30'$	05306713	3176;03,50
rātrau darpaṇam a*bh*rāṅgaṁ	$71^o15'$	22815523	3255;18,22
nāgas tuṅgana*kh*o balī	75^o	03630233	3320;36,30
*dh*īro yuvā ka*th*ā lolaḥ	$78^o45'$	92141733	3371;41,29
pūjyo nārījanair *bh*agaḥ	$82^o30'$	11028043	3408;20,11
kanyagāre nāgavallī	$86^o15'$	11320343	3430;23,11
deyo viśvas*th*alī *bh*ṛguḥ	90^o	84447343	3437;44,48

3.2. De straal van de cirkel die gebruikt wordt om deze sinus te definiëren is de laatste regel, R=Sin(90^o)=3437;44,88.

De omtrek is $2\pi R = 2\pi \cdot 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600} = 21599,99\ldots \approx 21600 = 60 \cdot 360$. dus dat is de cirkelomtrek in minuten. De Indiers hebben deze minuten als lengtemaat gezien en wilden ook de straal in dezelfde lengtemaat meten, daarom kozen ze $R = \frac{21600}{2/pi}$.

3.3. Als R=3437;44,48=Sin(90^o) dan zou moeten gelden Sin(30^o) = R/2 = 1718;52,24, dit is correct.

Sin(3^o $45'$)=$\frac{21600}{2/pi} \cdot \sin(3^o 45') = 224,839396310\ldots = 224 + \frac{50}{60} + \frac{21,8}{3600}$ correct.

Opgave 4.1 vidvāṃs = 44 = 44000000 → 00000044 → $\frac{44}{3600}$
tunnabalaḥ= 6033 = 60330000 → 00003306 → $\frac{33}{60} + \frac{06}{3600}$
kavīśanicayaḥ = 14506100 → 00160541 → $16 + \frac{05}{60} + \frac{41}{3600}$
sarvār*tha*śīlas*th*iro = 74753720 → 02735747 → $273 + \frac{57}{60} + \frac{47}{3600}$
nirvid*dh*āṇganarendraruṅ = 04930222 → 22203940 → $2220 + \frac{39}{60} + \frac{40}{3600}$

Opgave 4.2 De methode uit het eerste vers was $Sin(a) = a - (\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))))$ en dit kan omgeschreven worden als

$Sin(a) = a - (\frac{a}{c})^3(g_5 - (\frac{a}{c})^2(g_4 - (\frac{a}{c})^2(g_3 - (\frac{a}{c})^2(g_2 - (\frac{a}{c})^2 g_1)))))$. Wellicht overzichtelijk voor Mādhava: als $\frac{a}{c}$ klein is kunnen we na een paar termen stoppen. Merk op dat $c = R \cdot \frac{\pi}{2}$.

Opgave 4.3. $(\frac{a}{c})^5(g_4) = \frac{a^5}{5!R^4}$ dus $g_4 = \frac{c^5}{5!R^4} = \frac{5400}{5!} \cdot (\frac{\pi}{2})^4 = \frac{45}{16}\pi^4 = 273,9630685\ldots$
$\approx 273 + \frac{57}{60} + \frac{47,04}{3600}$ (moderne berekening).
Op dezelfde manier
$g_3 = \frac{5400}{7!} \cdot (\frac{\pi}{2})^6 = \frac{15}{896}\pi^6 = 16,0946852\ldots \approx 16 + \frac{5}{60} + \frac{40,87}{3600}$
$g_2 = \frac{5400}{9!} \cdot (\frac{\pi}{2})^8 = \frac{5}{86016} \cdot \pi^8 = 0,5515562\ldots = \frac{33}{60} + \frac{5,60}{3600}$
$g_1 = \frac{5400}{11!} \cdot (\frac{\pi}{2})^{10} = 0,0123719\ldots \approx \frac{44,54}{3600}$.

Opgave 5: De antwoorden zijn voor een deel in de literatuur te vinden maar vermoedelijk niet allemaal.