Inleiding in de Taylorreeks van de sinus en in de workshop.

Opgave 1: De moderne Taylorreeks. Gebruik de rekenmachine of het programma www.wolframalpha.com op de telefoon, en vul het onderstaande formulier in. Hoe meer decimalen, hoe beter.

1.1 Kies een aantal graden tussen 1 en 45, noem dit $a = \ldots$.

1.2. Type op de rekenmachine in en noteer het resultaat:
$\sin(a) = \ldots$

1.3. Bereken $x = a \cdot \frac{\pi}{180}$ (dit is a in radialen) en vul in:
$x = \ldots$.

Dit is al een benadering van $\sin(a)$.

1.4. Bereken de volgende waarden en vul in; als het goed is zijn het steeds betere benaderingen:

$x - \frac{x^3}{6} = \ldots$

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} = \ldots$

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} = \ldots$

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} = \ldots$

$x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} = \ldots$

(Meer hebben we vandaag niet nodig).

1.5. Hoeveel decimalen extra nauwkeurigheid komen er in elke stap bij?

1.6. Strikvraag: hoe berekent de rekenmachine $\sin(a)$?

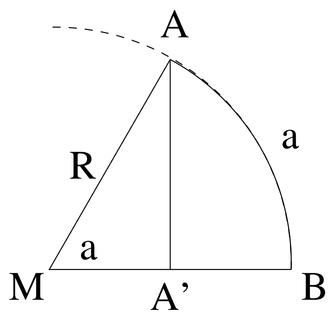
De sinus is in het oude India ontwikkeld (? derde eeuw na Chr.)

We noteren de Indiase sinus van een boog (a) als $\mathrm{Sin}(a)$ met hoofdletter.

De Indiase sinus is geen verhouding in een driehoek, maar een segment in een cirkel met vaste straal (R).

$\mathrm{Sin}(a) = R \sin a$, waarbij $\sin a$ de moderne sinus is. Nota bene: wij gebruiken meestal hoeken, maar de oude de Indiërs gebruikten bogen.

De waarde van R was vast, maar verschillende Indiase auteurs gebruikten verschillende waarden voor R, zoals $R = 60$, ook wel $R = 150$, of $R = 360/(2 \cdot \pi)$ (boog en straal in dezelfde lengtemaat, "graden").



Toelichting bij de figuur:

AA' is de Indiase sinus Sin a van boog a=AB, in een referentiecirkel met middelpunt M en vaste straal R. MA' *is de Indiase cosinus Cos a.*

De Indiërs gebruiken ook de sinus versus $A'B = R$ *- Cos a.*

Opgave 2. We gaan ons nu bezighouden met de ontdekkingen van Madhava (ca. 1350-1420). Probeer het vers "nihatya cāpavargeṇa" (zie het document met teksten p. 1) te begrijpen met behulp van het commentaar van Śankara (zie p. 3, geschreven tussen 1529 en 1566), wij citeren dit commentaar in een anonieme bewerking.

Noteer hierbij de boog met a en de straal van de cirkel (waarin de sinus wordt gedefinieerd) als R. Schrijf het eerste tot en met vijfde resultaat in het commentaar als een formule in a en R, en schrijf ook de uitendelijke waarde van de Indiase sinus in a en R.

Is de methode wiskundig gezien dezelfde als de moderne Taylorreeks?

Hint: in de moderne Taylorreeks is de variabele x in radialen, ga na dat $x = a/R$.

Sleutel tot het kaṭayapadi systeem voor het coderen van decimalen met de 33 medeklinkers in het Sanskrit (de naam is afgeleid van de letters die de decimaal 1 coderen)

1	k	ṭ	p	y
2	*kh*	*ṭh*	*ph*	r
3	g	ḍ	b	l
4	*gh*	*ḍh*	*bh*	v
5	ṅ	ṇ	m	s̀
6	c	t	ṣ	
7	*ch*	*th*	s	
8	j	d	h	
9	*jh*	*dh*		
0	ñ	n		

Cursieve combinaties met de tweede letter een h (zoals *kh*=2, *ṭh*=2) staan voor één medeklinker. Niet te verwarren met de twee medeklinkers k=1, h = 8, en ṭ=1, h=8.

Regels: Elke medeklinker die vlak voor een klinker staat codeert één decimaal. De andere medeklinkers en de klinker(s) zelf doen er niet toe, en ook niet ṃ en ḥ aan het eind.

Elke regel van de sinustabel levert zo 8 codegetallen (b.v. de eerste regel s̀reṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ wordt 22054220.

Daarna wordt de volgorde van de decimalen omgedraaid:l 02245022 en dat is weer een code van een sexagesimaal getal $0224 + \frac{50}{60} + \frac{22}{3600}$, de uiteindelijke sinus van $3^o45'$. Om breuken te vermijden schrijven we dit als 224;50,22.

Opmerking: ṛ is een klinker! niet de verwarren met de medeklinker r.
y telt ook als medeklinker.

Opgave 3. De sinustabel van Mādhava.

3.1. Probeer zoveel mogelijke versregels uit Madhava's sinustabel met het kaṭapayadi systeem te herleiden tot een rij van 8 decimalen, en dan een sinuswaarde, en vul de lege kolommen van de tabel in; als je in een groepje samenwerkt, laat elk groepslid een paar verschillende waarden doen.

3.2. Wat is de straal van de cirkel die gebruikt wordt om deze sinus te definiëren? Hoe zouden de Indiërs aan deze straal gekomen zijn? (Hint: bereken de omtrek die hierbij hoort). Hoe hadden zij op dit idee kunnen komen?

3.3. Check zonder de rekenmachine de nauwkeurigheid van de sinus van 30 graden, dit moet de helft zijn van de sinus van 90, en daarna met de rekenmachine van $3^o 45'$ en een paar andere waarden.

Na deze voorbereiding zijn we klaar voor opgave 4 over het vers *vidvān*.

Opgave 4.1 Lees eerst de 5 woorden aan het begin van het vers als getallen in het katapayadi-systeem, precies zoals in de sinustabel van Madhava. Vind voor elk getal de acht decimalen (vul aan met nullen indien nodig), draai de volgorde om, en vind het bijbehorende getal in het zestigtallig stelsel. Als voorbeeld het eerste getal:

vidvāṃs $= 44 = 44000000 \rightarrow 00000044 \rightarrow \frac{44}{3600}$

De andere vier getallen zijn:

tunnabalaḥ=

kavīśanicayaḥ =

sarvār*tha*śīlas*th*iro =

nirvid*dh*āṇganarendraruṅ =

Opgave 4.2 Probeer zoveel mogelijk van het vers te begrijpen met het commentaar van Shankara. Gebruik daarbij eventueel de volgende hint:

Schrijf c voor de kwartcirkel, a voor de boog waarvan we de sinus willen berekenen.

De methode uit het eerste vers t kan omgeschreven worden als

$Sin(a) = a - (\frac{a}{c})^3(g_5 - (\frac{a}{c})^2(g_4 - (\frac{a}{c})^2(g_3 - (\frac{a}{c})^2(g_2 - (\frac{a}{c})^2 g_1)))))$

voor vaste getallen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5.

Opgave 4.3 Probeer die getallen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 te vinden, we laten dit voor één getal zien:

Omdat $(\frac{a}{c})^3(g_5)$ gelijk moet zijn aan $\frac{a^3}{3!R^2}$

is $g_5 = \frac{c^3}{3!R^2} = \frac{c}{6} \cdot (\frac{c}{R})^2$. Nu geldt $\frac{c}{R} = \frac{\pi}{2}$ omdat c de kwartcirkel is, en $R = \frac{21600}{2\pi}$, dus $c = \frac{21600}{4} = 5400$ (dit zijn boogminuten). En daarom is

$g_5 = 900 \cdot (\frac{pi}{2})^2 = 225\pi^2 = 2220,660990245\ldots \approx 2220 + \frac{39}{60} + \frac{39,56}{3600}$. Dit is dus het getal *nirvid*dh*āṇganarendraruṅ.*

Bereken nu ook de overige getallen g_4 tot en met g_1 en ga na of ze goed in het vers staan!

Opgave 5. Wie klaar is met de sinus kan de cosinus proberen: het eerste vers komt overeen met het vers *nihatya* voor de sinus. Onderzoek of het eerste vers een algemene methode geeft die overeenkomt met de moderne Taylorreeks.

In het tweede vers staan voor de cosinus zes getallen die overeen komen met g_1 tot en met g_5 voor de sinus:

1. stenaḥ, 2. strīpiṡunaḥ, 3. sugan*dh*inaganud, 4. *bh*adrāṅga*bh*avyāsano, 5. mīnaṅgonarasiṃha 6. ūna*dh*anakṛd*bh*ūreva

(de ū in het begin van het zesde getal is geen medeklinker en telt dus niet)

Probeer de getallen te lezen, en daarna net als bij de sinus, de formule uit het eerste vers om te schrijven en de zes getallen in π uit te drukken en te controleren.

Literatuur.

Inleiding: Kim Plofker, *Mathematics in India*, Princeton 2009, zie pp. 217-254 over wiskunde in Kerala.

Kim Plofker, Mathematics and its worldwise history *Nieuw Archief voor Wiskunde,* 5e reeks, 13 (maart 2012) pp. 45-53 (o.a. over de redenering van de sinusreeks in de school van Kerala). Gratis downloaden van http://www.nieuwarchief.nl

Kim Plofker, Relations between Aproximations to the Sine in Kerala Mathematics, in: G. G. Emch, R. Sridharan, M.D. Srinavas, *Contributions to the History of Indian Mathematics*, Delhi 2005, pp. 135-152

Vertalingen van Sanskrit en Malayalam teksten:

David Gold, David Pingree, A hitherto unknown Sanskrit work concerning the Derivation of the Power Series for Sine and Cosine *Historia Scientiarum* 42 (1991), pp. 49-65.

Venketeswara Pai et. al. ed., *Karaṇapaddhati of Putumana Somayājī*, New York and New Delhi, 2018.

K.V. Sarma, *Gaṇita-Yukti-Bhāsa (Rationales in Mathematical Astronomy) of Jyeṣṭhadeva,* Malayalam Text Critically Edited with English Translation, New Delhi 2008, 2 vols.

Rekenwebsite: https://wolframalpha.com

Controversiele literatuur:

G. K. Raju, *Cultural Foundations of Mathematics: The Nature of Mathematical Proof and the Transmission of the Calculus from India to Europe in the 16th c. CE*, Delhi 2007 (beweert dat de differentiaal- en integraalrekening in Kerala is ontdekt en vandaar naar Europa is overgeleverd).

Madhava's sinustabel staat op Wikipedia, met vergelijking met moderne sinuswaarden.