Taylorreeksen in het Sanskriet

Jan Hogendijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Workshop NWD 31 januari 2020

Achtergrond van deze workshop

Is de vorm waarin wij wiskunde doen, de enig mogelijke?

Zoek wiskunde van hoog niveau die in een andere cultuur is ontwikkeld, en kijk hoe dat anders is.

Dit is moeilijk, soms vervelend; soms begrijp je niet waarom je bepaalde dingen moet doen; het is duizelingwekkend, enz.

(Dat hebben sommige leerlingen ook als ze "onze" wiskunde leren; "wat is nou x?")

Structuur van deze workshop

1. Voorbeeld: Taylorreeks voor de sinus en cosinus. Eerst de Westerse vorm (Newton 1665)

2. Zuid India (Kerala) 1400: inleiding, talen, wat is de sinus? het vers *nihatya* bestuderen.

3.-6: Komt nog (het vers vidvān)

7. Vragen, discussie. Afsluiting. Hebben we ook iets geleerd over "onze" wiskunde?

Handout 1: de moderne Taylorreeks voor de sinus.

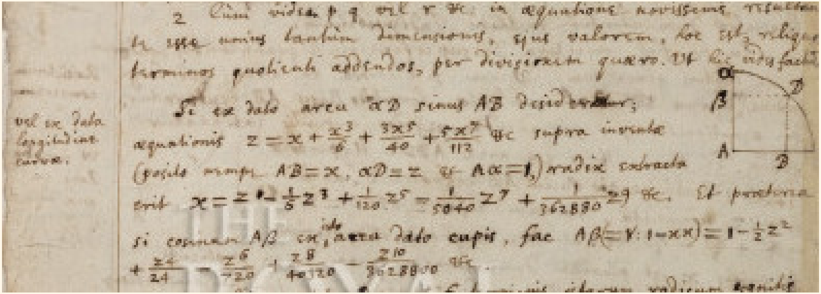
Probeer in groepjes te werken! Leuker, sneller en je leert er meer van.

Handout 1: de moderne Taylorreeks voor de sinus.

Voorbeeld: $a = 10^o$

$$
\begin{aligned}
\sin(a) &= 0{,}17364\ 81776\ 66930\ 34885 \\
x = a \cdot \frac{\pi}{180} &= 0{,}\underline{17}453\ 29251\ 99432\ 95769 \\
x - \frac{x^3}{6} &= 0{,}\underline{17364}\ 68290\ 43731\ 65968 \\
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} &= 0{,}\underline{17364\ 817}86\ 45354\ 82293 \\
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} &= 0{,}\underline{17364\ 81776\ 6}5163\ 36775 \\
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} & \\
+\frac{x^9}{9!} &= 0{,}\underline{17364\ 81776\ 66930}\ 46351 \\
x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} & \\
+\frac{x^9}{9!} - \frac{x^{11}}{11!} &= 0{,}\underline{17364\ 81776\ 66930\ 3488}3
\end{aligned}
$$

“Taylorreeks” voor sinus en cosinus ontdekt door Newton ca. 1665, hier in ms. it 1669


2 Cum vides p, q vel r &c in aequatione novissime resultante esse unius tantum dimensionis, ejus valorem, hoc est, reliquos terminos quotienti addendos, per divisionem quaero. Ut hic vides factum.

Si ex dato arcu αD sinus AB desideretur; aequationis $z = x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} + \frac{5x^7}{112}$ &c supra inventa (posito nempe $AB = x$, $\alpha D = z$ & $A\alpha = 1$) radix extracta erit $x = z - \frac{1}{6}z^3 + \frac{1}{120}z^5 - \frac{1}{5040}z^7 + \frac{1}{362880}z^9$ &c. Et praeterea si cosinum Aβ ex isto arcu dato cupis, fac $A\beta (= \sqrt{1-xx}) = 1 - \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^4}{24} - \frac{z^6}{720} + \frac{z^8}{40320} - \frac{z^{10}}{3628800}$ &c.

vel ex data longitudine curvae.

Kerala, zuid-India, ca. 1400

Kerala, zuid-India

Wiskunde in Kerala, ca. 1400

onderdeel van sterrenkunde

activiteit van Brahmanan (priesters), maar soms ook andere kasten

volkstaal: Malayālam (Dravidische taalgroep)

geleerde taal: Sanskriet (Indo-Europese taalgroep)

schrijfmateriaal: palmbladen. Veel aandacht voor uit het hoofd leren.

Teksten worden uitgedeeld.

Sanskriet: taal van priesters

Taal van de Veda's, Bhagavad-Gita. Indo-Europese taalfamilie. Geschreven in nagari schrift van links naar rechts. 33 medeklinkers, ca. 10 klinkers; combinaties van medeklinkers hebben aparte vormen.

निहत्य चापवर्गेण चापं तत्तत्फलानि च ।
हरेत् समूलयुग्वर्गैस्त्रिज्यावर्गहतैः क्रमात् ॥ ४४० ॥
चापं फलानि चाधोऽधो न्यस्योपर्युपरि त्यजेत् ।
जीवाप्त्यै, संग्रहोऽस्यैव[2] 'विद्वान्' इत्यादिना कृतः ॥ ४४१ ॥

Vers nihatya (p. 1, teksten) in nagari.

Malayalam: volkstaal

Dravidische taal, andere taalgroep dan Sanskriet, totaal verschillend!

7. ജ്യാവർഗ്ഗാനയനം

അനന്തരം 'നിഹത്യ ചാപവർഗ്ഗേണ' എന്ന ന്യായത്തിങ്കന്നു കുറഞ്ഞൊരു വിശേഷം കൊണ്ടു ജ്യാവർഗ്ഗമുണ്ടാകും എന്നതിനെ ചൊല്ലുന്നു. ഇവിടെ ചാപവർഗ്ഗത്തെ ചാപവർഗ്ഗംകൊണ്ടുതന്നെ ഗുണിക്കുന്നു. ചാപവർഗ്ഗത്തേയും ഫലങ്ങളേയും[1] കീഴെ കീഴെ വെക്കുന്നൂതും. പിന്നെ രണ്ടു തുടങ്ങി മൂന്ന്, നാല്, അഞ്ച് എന്നിങ്ങനെയുള്ള നിരന്തരസംഖ്യകളുടെ വർഗ്ഗങ്ങളിൽനിന്നു തന്റെ തന്റെ മൂലാർദ്ധത്തെ കളഞ്ഞ ശേഷത്തെക്കൊണ്ട് വ്യാസാർദ്ധ വർഗ്ഗത്തെ ഗുണിച്ച് അവറ്റെക്കൊണ്ടു ഹരിപ്പൂ. ഇത്രേ വിശേഷമുള്ളൂ. ഒടുക്കത്തേതു ശേഷിക്കുന്നത് ജ്യാവർഗ്ഗം. പിന്നെ ഈ ന്യായംകൊണ്ടു ശര വർഗ്ഗത്തേയും ഉണ്ടാക്കാം. ഇവിടെ 'വിദ്വാംസ്തുന്നബലഃ' എന്നതിന്റെ സ്ഥാനത്തു 'ശൌരിർജ്ജയതി' എന്നു തുടങ്ങിയുള്ളവ.

Sanskriet in Malayalam schrift: handschrift op palmblad (collectie Whish)

Indiase Sinus: we schrijven hem met hoofdletter.

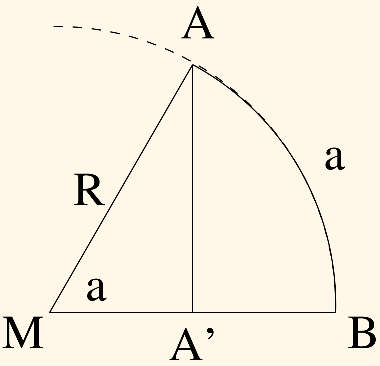
Indiase Sinus van a is lengte van lijnsegment AA' in de cirkel met straal een vaste R.

Moderne sinus:

$$\sin a = \frac{AA'}{R}$$

, dus $Sin(a) = R\sin(a)$.

Modern: sinus van een hoek a.
India: Sinus van een boog a
"halve koorde"



Het eerste vers van Mādhava over de Sinus, zie Teksten p. 1

nihatya cāpavargeṇa cāpam tattatphalāni ca
haret samūlayugvargais trijyāvargahataiḥ kramāt
cāpam phalāni cādho 'dho nyasyopary upari tyayet
jīvante saṉgraho 'syaiva vidvān ityādinā kṛtaḥ

Het eerste vers van Mādhava over de Sinus, zie Teksten p. 1

nihatya cāpavargeṇa cāpam tattatphalāni ca
haret samūlayugvargais trijyāvargahataiḥ kramāt
cāpam phalāni cādho 'dho nyasyopary upari tyayet
jīvante sa̲ngraho 'syaiva vidvān ityādinā kṛtaḥ

Nadat de boog en alle (eerdere) resultaten met het kwadraat van de boog vermenigvuldigd zijn, moet men delen door de kwadraten van de even getallen plus de wortels daarvan, maal het kwadraat van de straal, op volgorde. Nadat de boog en de resultaten onder elkaar opgeschreven zijn, moet men van beneden naar boven aftrekken. Een samenvatting hiervan staat in het vers vidvān.

Opgave 2: komt dit op hetzelfde neer als de Taylorreeks voor de sinus?

Bekijk ook het commentaar van Śankara (teksten, p. 3)

Opgave 2: komt dit op hetzelfde neer als de Taylorreeks voor de sinus?

Bekijk ook het commentaar van Śankara (teksten, p. 3)

Het vers zegt: eerste resultaat

$$a \cdot \frac{a^2}{R^2 \cdot (2^2 + 2)} = \frac{a^3}{3! R^2}$$

tweede resultaat

$$a \cdot \frac{a^2}{R^2 \cdot (2^2 + 2)} \cdot \frac{a^2}{R^2 \cdot (4^2 + 4)} = \frac{a^5}{5! R^4}$$

enz.

Opgave 2: schrijf de boog en de resultaten onder elkaar

$$a$$

$$\frac{a^3}{3!R^2}$$

$$\frac{a^5}{5!R^4}$$

$$\frac{a^7}{7!R^6}$$

$$\frac{a^9}{9!R^8}$$

$$\frac{a^{11}}{11!R^{10}}$$

Opgave 2: trek af van beneden naar boven

$$\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}$$

$$\frac{a^7}{7!R^6} - \left(\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}\right)$$

$$\frac{a^5}{5!R^4} - \left(\frac{a^7}{7!R^6} - \left(\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}\right)\right)$$

$$\frac{a^3}{3!R^2} - \left(\frac{a^5}{5!R^4} - \left(\frac{a^7}{7!R^6} - \left(\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}\right)\right)\right)$$

$$a - \left(\frac{a^3}{3!R^2} - \left(\frac{a^5}{5!R^4} - \left(\frac{a^7}{7!R^6} - \left(\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}\right)\right)\right)\right)$$

Opgave 2: trek af van beneden naar boven

$$\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}$$

$$\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}})$$

$$\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))$$

$$\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}})))$$

$$a - (\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))))$$

Dan krijg je

$$\mathrm{Sin}(a) = a - (\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))))$$

Met de moderne Taylorreeks krijg je:

$$\mathrm{Sin}(a) = R \sin \frac{a}{R} =$$

Met de moderne Taylorreeks krijg je:

$$\mathrm{Sin}(a) = R \sin \frac{a}{R} =$$

$$= R((\frac{a}{R}) - \frac{1}{3!}(\frac{a}{R})^3 + \frac{1}{5!}(\frac{a}{R})^5 - \frac{1}{7!}(\frac{a}{R})^7 + \frac{1}{9!}(\frac{a}{R})^9 - \frac{1}{11!}(\frac{a}{R})^{11} \dots)$$

$$= a - (\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))))$$

(Ongeveer) hetzelfde dus!