Taylorreeksen in het Sanskriet. Deel 2.

Jan Hogendijk

Mathematisch Instituut, Universiteit Utrecht

Workshop NWD 31 januari 2020

"Gedichten" in het Sanskriet

Heel belangrijk al sinds de tijd van de Veda's (voor Christus)

Regels voor: metrum, lichte (korte) en zware (lange) lettergrepen.
Het hoeft niet te rijmen.
B.v. het standaard śloka metrum (vier keer 8 lettergrepen): de vijfde tot en met de zevende zijn: (1) licht-zwaar-zwaar, (2) licht-zwaar-licht (3) licht-zwaar-zwaar (4) licht-zwaar-licht.

Ook veel andere schema's.

Mādhava (ca. 1400). Het vers vidvān. Teksten p. 1

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro
nirviddhāṇganarendraruṅ nigaditeṣv eṣu kramāt pañcasu
ādhastyād guṇitād abhīṣṭadhanuṣaḥ kṛtyā vihṛtyantimasy-
āptam śoddhyam upary upary atha ghanenaivam dhanuṣy antataḥ

Eerst oefenen met iets eenvoudigers!

Structuur van deel 2 van deze workshop

Voorbereiding voor het begrijpen van het vers *vidvān*:

3. Oefenen in een eenvoudig geval: de Sinustabel van Mādhava.

4. Getalsysteem (kaṭayapādi) om getallen in gedichten te coderen.

Daarna:

5. Werken aan het vers *vidvān*

6. Voor wie nog niet genoeg heeft: de Cosinus.

7. Vragen, discussie. Afsluiting. Hebben we ook iets geleerd over "onze" wiskunde?

Bijdrage van Dr Kim Plofker (rechts) aan deze NWD workshop: zij heeft de hele Sinustabel van Mādhava voor ons uit het Sanskriet vertaald.

Mādhava's Sinustabel, eerste couplet (van $3^o 45'$ met intervallen van $3^o 45'$ tot 15^o)

Sanskriet	vertaling (Kim Plofker)
śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ	De beste mensen hebben de beste naam.
himādrir veda*bh*āvanaḥ	De bergen in de Himalaya zijn de oorsprong van kennis
tapano *bh*ānuḥ sūktajño	De brandende zon kent de Vedische hymnen.
ma*dh*yamaṁ vid*dh*idohanaṁ	Ken de middelste melk-gever

Mādhava's Sinustabel, tweede couplet (van $18^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 30^o)

Sanskriet	vertaling (Kim Plofker)
*dh*igājyo nā śanaṁ kaṣṭaṁ	Helaas! veroveren is vernietiging
*ch*anna*bh*ogā śayāṁbikā	Een goede vrouw die verborgen voedsel eet
mṛgāhāro nareśo yaṁ	Deze koning brengt herten
vīro raṇajayotsukaḥ	De held verlangt naar overwinning in de strijd

Mādhava's Sinustabel, derde couplet (van $33^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 45^o)

Sanskriet	vertaling (Kim Plofker)
mūlaṁ viṣud*dh*aṁ nāḷasya	De wortel van de stengel is gereinigd
gāneṣu viraḷā narāḥ	Mensen zijn zeldzaam in gezangen
aśud*dh*iguptā coraśrīḥ	De voorspoed van de dief wordt beschermd door onreinheid
s̀aṅkukarṇo nageśvaraḥ	De Heer van de berg heeft puntige oren

Mādhava's Sinustabel, vierde couplet (van $48^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 60^o)

Sanskriet	vertaling (Kim Plofker)
tanūjo gar*bh*ajo mitraṃ	Een zoon uit de baarmoeder geboren is een vriend
śrīmān atra su*kh*ī sa*kh*e	Vriend, een hoog persoon is gelukkig hier
śaśī rātrau himāhāro	De maan is 's nachts de brenger van kou
vegajñaḥ pa*th*isin*dh*uraḥ	De onstuimige ziel is een olifant op het pad

Mādhava's Sinustabel, vijfde couplet (van $63^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 75^o)

Sanskriet	vertaling (Kim Plofker)
*ch*āyālayo gajo nīlo	De donkere olifant rust in de schaduw
nirmalo nāsti satkule	In een goede familie is men niet zonder zonde
rātrau darpaṇam a*bh*rāṅgaṁ	's Nachts heeft een spiegel een lichaam van wolken
nāgas tuṅgana*kh*o balī	De machtige Naga (slang-demon) heeft sterke klauwen

Mādhava's Sinustabel, zesde couplet (van $78^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 90^o)

Sanskriet	vertaling (Kim Plofker)
*dh*īro yuvā ka*th*ā lolaḥ	Hoe kan een vastbesloten jongen grillig zijn
pūjyo nārījanair *bh*agaḥ	Het geluk moet door vrouwen geëerd worden
kanyagāre nāgavallī	De betelpeper is in het kleinste gedicht
deyo viśvas*th*alī *bh*ṛguḥ	Heer Bhrgu is de top van het heelal

Getallen coderen in gedichten, met het kaṭapayādi-systeem

1	क	ट	प	य
2	ख	ठ	फ	र
3	ग	ड	ब	ल
4	घ	ढ	भ	व
5	ङ	ण	म	श
6	च	त		ष
7	छ	थ		स
8	ज	द		ह
9	झ	ध		ळ
0	ञ	न		

1	*ka*	*ṭa*	*pa*	*ya*
2	*kha*	*ṭha*	*pha*	*ra*
3	*ga*	*ḍa*	*ba*	*la*
4	*gha*	*ḍha*	*bha*	*va*
5	*ṅa*	*ṇa*	*ma*	*śa*
6	*ca*	*ta*		*ṣa*
7	*cha*	*tha*		*sa*
8	*ja*	*da*		*ha*
9	*jha*	*dha*		*ḷa*
0	*ña*	*na*		

Mādhavas Sinustabel in verzen van 8 lettergrepen, eerste couplet van $3^o45'$ met intervallen van $3^o45'$ tot 15^o

Sanskriet

śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ	$\text{Sin}(3^o45')$
himādrir veda*bh*āvanaḥ	$\text{Sin}(7^o30')$
tapano *bh*ānuḥ sūktajño	$\text{Sin}(11^o15')$
ma*dh*yamaṁ vid*dh*idohanaṁ	$\text{Sin}(15^o)$

Decoderen van de eerste zin śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

1. Welke letters doen ertoe? Alleen de 8 medeklinkers die vlak voor een klinker staan.

śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

Decoderen van de eerste zin śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

1. Welke letters doen ertoe? Alleen de 8 medeklinkers die vlak voor een klinker staan.

ś<u>r</u>eṣ<u>*ṭh*</u>aṃ <u>n</u>ā<u>m</u>a <u>v</u>a<u>r</u>iṣ<u>*ṭh*</u>ā<u>n</u>āṁ.

2. Decodeer de decimalen: 22054220

Decoderen van de eerste zin śreṣṭhaṃ nāma variṣṭhānāṁ.

1. Welke letters doen ertoe? Alleen de 8 medeklinkers die vlak voor een klinker staan.

śr̲eṣṭ̲h̲aṃ n̲ām̲a v̲ar̲iṣṭ̲h̲ān̲āṁ.

2. Decodeer de decimalen: 22054220

3. Draai de volgorde om: 02245022.

Decoderen van de eerste zin śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

1. Welke letters doen ertoe? Alleen de 8 medeklinkers die vlak voor een klinker staan.

śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

2. Decodeer de decimalen: 22054220

3. Draai de volgorde om: 02245022.

4. Zet om in het zestigtallig stelsel:

$$0224 + \frac{50}{60} + \frac{22}{3600}$$

Dit is de waarde van de Sinus van $3^o 45'$

Decoderen van de eerste zin śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

1. Welke letters doen ertoe? Alleen de 8 medeklinkers die vlak voor een klinker staan.

śreṣ*ṭh*aṃ nāma variṣ*ṭh*ānāṁ.

2. Decodeer de decimalen: 22054220

3. Draai de volgorde om: 02245022.

4. Zet om in het zestigtallig stelsel:

$$0224 + \frac{50}{60} + \frac{22}{3600}$$

Dit is de waarde van de Sinus van $3^o45'$
(niet hetzelfde als $\sin 3^o45'$ maar $R \sin 3^o45'$, we weten R nog niet).

Opgave 3: Decodeer nog een paar waarden: in elk geval Sin (90^o), Sin (30^o) en nog een of twee. Zie handout 3.

Opgave 3: Decodeer nog een paar waarden: in elk geval Sin (90^o), Sin (30^o) en nog een of twee. Zie handout 3.

Sin (90^o) = deyo viśvas*tha*lī *bh*ṛguḥ
$\rightarrow 84447343 \rightarrow 34374448 \rightarrow 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600} = 3437;44,48$
$= R$. Hoe verklaar je deze R?

Opgave 3: Decodeer nog een paar waarden: in elk geval Sin (90^o), Sin (30^o) en nog een of twee. Zie handout 3.

Sin (90^o) $=$ deyo viśvas*tha*lī *bh*ṛguḥ
$\rightarrow 84447343 \rightarrow 34374448 \rightarrow 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600} = 3437; 44, 48$
$= R$. Hoe verklaar je deze R?
(Verklaring: De omtrek $2\pi R = 21600 = 60 \cdot 360$, het aantal boogminuten van de cirkel. De straal is $\frac{60 \cdot 360}{2\pi} \approx 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600}$. Voor de Indiërs was de boogminuut een lengtemaat!)

Opgave 3: Decodeer nog een paar waarden: in elk geval Sin (90^o), Sin (30^o) en nog een of twee. Zie handout 3.

Sin (90^o) = deyo viśvas*tha*lī *bh*ṛguḥ
$\rightarrow 84447343 \rightarrow 34374448 \rightarrow 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600} = 3437; 44, 48$
$= R$. Hoe verklaar je deze R?
(Verklaring: De omtrek $2\pi R = 21600 = 60 \cdot 360$, het aantal boogminuten van de cirkel. De straal is $\frac{60 \cdot 360}{2\pi} \approx 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600}$.
Voor de Indiërs was de boogminuut een lengtemaat!)

Sin (30^o)= vīro raṇajayotsukaḥ 42258171 $\rightarrow$ 1718;52,24, dit is $\frac{R}{2}$!

Opgave 3: Decodeer nog een paar waarden: in elk geval Sin (90^o), Sin (30^o) en nog een of twee. Zie handout 3.

Sin (90^o) = deyo viśvas*tha*lī *bhṛ*guḥ
$\rightarrow 84447343 \rightarrow 34374448 \rightarrow 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600} = 3437; 44, 48$
$= R$. Hoe verklaar je deze R?
(Verklaring: De omtrek $2\pi R = 21600 = 60 \cdot 360$, het aantal boogminuten van de cirkel. De straal is $\frac{60 \cdot 360}{2\pi} \approx 3437 + \frac{44}{60} + \frac{48}{3600}$. Voor de Indiërs was de boogminuut een lengtemaat!)

Sin (30^o)= vīro raṇajayotsukaḥ 42258171 $\rightarrow$ 1718;52,24, dit is $\frac{R}{2}$!

Controle van Sin(3^o $45'$): $R \sin(3^o 45') = \frac{21600}{2\pi} \cdot \sin(3^o 45') =$
$224,839396310\ldots = 224 + \frac{50}{60} + \frac{21{,}8}{3600}$ correct.

Nu het vers *vidvān*

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro nirviddhāṇganarendraruṅ
De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.

Nu het vers *vidvān*

vidvāṃs tunnabalaḥ kavīśanicayaḥ sarvārthaśīlasthiro nirviddhāṇganarendraruṅ
De wijze koning wiens leger verslagen is verzamelt de beste raadgevers om zich heen en blijft in alles standvastig; dan verslaat hij de koning wiens leger nog niet vernietigd is.

Dit zijn vijf (gecodeerde) getallen van acht decimalen: als er minder zijn vul je de rest aan met nullen, en dan als in de Sinustabel.
vidvāṃs=44 $= 44000000 \to 00000044 \to 0000 + \frac{00}{60} + \frac{44}{3600}$

Opgave: lees en decodeer de overige getallen

vv$=44 = 44000000 \rightarrow 00000044 \rightarrow 0000 + \frac{00}{60} + \frac{44}{3600}$

tunnabalaḥ$=$

kavīśanicayaḥ$=$

sarvārthaśīlasthiro $=$

nirviddhāṇganarendraruṅ $=$

Opgave 4.1: lees en decodeer de overige getallen

vv=44 $= 44000000 \to 00000044 \to 0000 + \frac{00}{60} + \frac{44}{3600}$

tunnabalaḥ=6033 $= 60330000 \to 00003306 \to \frac{33}{60} + \frac{06}{3600}$

Opgave 4.1: lees en decodeer de overige getallen

vv=44 $= 44000000 \to 00000044 \to 0000 + \frac{00}{60} + \frac{44}{3600}$

tunnabalaḥ=6033 $= 60330000 \to 00003306 \to \frac{33}{60} + \frac{06}{3600}$

kavīśanicayaḥ=14506100 $\to 00160541 \to 16 + \frac{05}{60} + \frac{41}{3600}$

Opgave 4.1: lees en decodeer de overige getallen

vv=44 $= 44000000 \rightarrow 00000044 \rightarrow 0000 + \frac{00}{60} + \frac{44}{3600}$

tunnabalaḥ=6033 $= 60330000 \rightarrow 00003306 \rightarrow \frac{33}{60} + \frac{06}{3600}$

kavīśanicayaḥ=14506100 $\rightarrow 00160541 \rightarrow 16 + \frac{05}{60} + \frac{41}{3600}$

sarvārthaśīlasthiro $= 74753720 \rightarrow 02735747 \rightarrow 273 + \frac{57}{60} + \frac{47}{3600}$

Opgave 4.1: lees en decodeer de overige getallen

vv=44 $= 44000000 \to 00000044 \to 0000 + \frac{00}{60} + \frac{44}{3600}$

tunnabalaḥ=6033 $= 60330000 \to 00003306 \to \frac{33}{60} + \frac{06}{3600}$

kavīśanicayaḥ=14506100 $\to 00160541 \to 16 + \frac{05}{60} + \frac{41}{3600}$

sarvārthaśīlasthiro $= 74753720 \to 02735747 \to 273 + \frac{57}{60} + \frac{47}{3600}$

nirviddhāṅganarendraruṅ
$=04930222 \to 22203940 \to 2220 + \frac{39}{60} + \frac{40}{3600}$

Opgave 4.2. Wat betekent nu het vers *vidvān*? Lees ook het commentaar van Śankara (teksten p. 3)

Opgave 4.2. Wat betekent nu het vers *vidvān*? Lees ook het commentaar van Śankara (teksten p. 3)

Wie er niet uitkomt mag om p. 3 van handout 3 vragen, daarop staan hints.

Opgave 4.2. Wat betekent nu het vers *vidvān*? Lees ook het commentaar van Śankara (teksten p. 3)

Wie er niet uitkomt mag om p. 3 van handout 3 vragen, daarop staan hints.

Hint: We hadden gezien

$$\mathrm{Sin}(a) = a - (\frac{a^3}{3!R^2} - (\frac{a^5}{5!R^4} - (\frac{a^7}{7!R^6} - (\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}))))$$

Noem c de kwartcirkel. Dan kunnen we de formule omschrijven tot

$$Sin(a) = a - (\frac{a}{c})^3(g_5 - (\frac{a}{c})^2(g_4 - (\frac{a}{c})^2(g_3 - (\frac{a}{c})^2(g_2 - (\frac{a}{c})^2 g_1))))$$

voor vaste getallen g_1, g_2, g_3, g_4, g_5 - de wijze koning enz.

Het is niet in te zien wat de reden is voor de kwartcirkel c maar daar gaat het hier niet om.

De getallen van de wijze koning ...".

Als

$$a - \left(\frac{a^3}{3!R^2} - \left(\frac{a^5}{5!R^4} - \left(\frac{a^7}{7!R^6} - \left(\frac{a^9}{9!R^8} - \frac{a^{11}}{11!R^{10}}\right)\right)\right)\right) =$$

$$= a - \left(\frac{a}{c}\right)^3\left(g_5 - \left(\frac{a}{c}\right)^2\left(g_4 - \left(\frac{a}{c}\right)^2\left(g_3 - \left(\frac{a}{c}\right)^2\left(g_2 - \left(\frac{a}{c}\right)^2 g_1\right)\right)\right)\right)$$

dan

$$g_5 = \frac{c^3}{3!R^2}, \qquad g_4 = \frac{c^5}{5!R^4},$$

$$g_3 = \frac{c^7}{7!R^6}, \qquad g_2 = \frac{c^9}{9!R^8}, \qquad g_1 = \frac{c^{11}}{11!R^{10}}$$

Berekening van de getallen van de wijze koning

$$\frac{c}{R} = \frac{\pi}{2}.$$

Mādhava gebruikte

$$R = \frac{21600}{\pi}$$

en dus $c = 5400$. Daarom:

$$g_5 = \frac{c^3}{3!R^2} = 5400 \cdot \frac{1}{6} \cdot (\frac{\pi}{2})^2 = 225\pi^2 = 2220,660990245\ldots$$

$$\approx 2220 + \frac{39}{60} + \frac{39,56}{3600}$$

. De afgeronde waarde hiervan is gecodeerd als nirvid*dh*āṇganarendraruṅ. (2220;39,40).

Berekening van de getallen van de wijze koning (vervolg)

$$g_4 = \frac{c^5}{5!R^4} = \frac{5400}{5!} \cdot (\frac{\pi}{2})^4 = 273,9630685 \approx 273 + \frac{57}{60} + \frac{47,04}{3600}$$

$$g_3 = \frac{5400}{7!} \cdot (\frac{\pi}{2})^6 = 16,0946852\ldots \approx 16 + \frac{5}{60} + \frac{40,87}{3600}$$

$$g_2 = \frac{5400}{9!} \cdot (\frac{\pi}{2})^8 = 0,5515562\ldots = \frac{33}{60} + \frac{5,60}{3600}$$

$$g_1 = \frac{5400}{11!} \cdot (\frac{\pi}{2})^{10} = 0,0123719\ldots \approx \frac{44,54}{3600}.$$

Conclusie: de methode in het vers klopt!

Hoe wist Madhava dit - kon hij het beredeneren?

1. Voor het gemak stellen we $R = 1$, dan krijgen we de moderne sinus en cosinus.
2. Verdeel een boog a met $0 \leq a \leq 90^o$ in een groot aantal (N) gelijke stukjes ter lengte h, dus $a = Nh$.
Dan zie je met gelijkvormige driehoekjes:

$$\sin(a) = \sum_{i=1}^{N} (\sin(ih) - \sin((i-1)h) \approx \sum_{i=1}^{N} h \cdot \cos(ih) \qquad (1)$$

$$1 - \cos(a) = \sum_{i=1}^{N} (\cos((i-1)h) - \cos(ih)) \approx \sum_{i=1}^{N} h \cdot \sin(ih) \qquad (2)$$

Hoe wist Mādhava dit - kon hij het beredeneren?

We beginnen met de benadering $\sin(x) \approx x$.

Dit in (2) invullen levert

$$1 - \cos(a) = \sum_{i=1}^{N} h \cdot \sin(ih) = h^2 \sum_{i=1}^{N} i \approx \frac{h^2 N^2}{2} = \frac{a^2}{2}$$

, dus

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}.$$

Hoe wist Mādhava dit - kon hij het beredeneren?

$$\cos(a) \approx 1 - \frac{a^2}{2}$$

in (1) invullen levert

$$\sin(a) \approx \sum_{i=1}^{N} h \cdot \cos(ih) \approx \sum_{i=1}^{N} (h - \frac{h^3 i^2}{2}) = Nh - \frac{h^3}{2} \sum_{i=1}^{N} i^2 \approx Nh - \frac{h^3}{2} \cdot \frac{N^3}{3} =$$

$$= a - \frac{a^3}{2 \cdot 3}.$$

Dit vullen we weer in (2) in, we krijgen dan

$$1 - \cos(a) \approx \frac{a^2}{2} - \frac{a^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

enz.

Wat moest Mādhava hiervoor weten?

$$\sum_{i=1}^{N} i \approx \frac{N^2}{2},$$

$$\sum_{i=1}^{N} i^2 \approx \frac{N^3}{3},$$

...

$$\sum_{i=1}^{N} i^k \approx \frac{N^{k+1}}{k+1},$$

Dit was allemaal bekend!

Wat voor kennis was er nog meer in de school van Mādhava?

$$arctan(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} \dots$$

benaderingen van π
schattingen van de fout.

Conclusie

In de school van Mādhava deed men hoogontwikkelde wiskunde, maar frustrerend anders dan wij gewend zijn.

Het kan ons wel een spiegel voorhouden!