Kegelsneden in de Griekse oudheid

J.P. Hogendijk

1. Inleiding

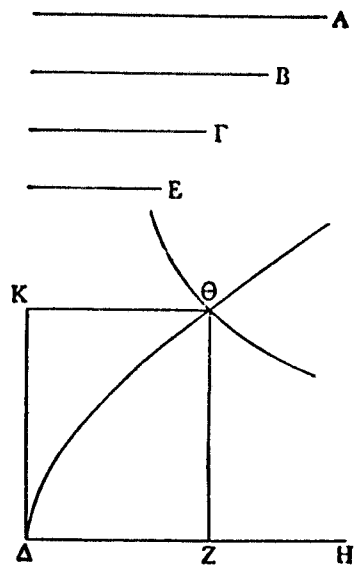
Kegelsnedes zijn omstreeks 350 voor Christus in de Griekse wiskunde ontdekt, en in de twee eeuwen daarna uitgebreid bestudeerd. De moderne termen *ellips*, *parabool*, *hyperbool* en *asymptoot* zijn ontleend aan een Grieks leerboek over kegelsneden, de *Conica* van Apollonius van Perga (ca. 200 v. Chr.).
In deze lezing proberen we een zeer globale indruk te geven van de theorie van de kegelsneden in de Griekse oudheid, met nadruk op zaken die verband houden met deze nu nog steeds gebruikte woorden. We zullen daarbij soms moderne notatie gebruiken, om de zaken voor ons eenvoudig voor te stellen, maar we moeten daarbij bedenken dat er toen niet zulke notatie was. De Grieken hadden geen reëel getalbegrip en ze gebruikten geen algebraïsche symbolen zoals x, y, $+$, $-$, $\times$, echter wel letters om punten en segmenten aan te duiden. Waar wij een "product $x \cdot y$" zouden gebruiken, zouden zij met een "rechthoek met zijden de segmenten A en B" werken, of met een uitdrukking als "de onder $BK\Gamma$", hetgeen betekent de rechthoek met zijden gelijk aan BK en $K\Gamma$.
We kunnen de Griekse wiskunde het beste vergelijken met een ijsberg, waarvan we alleen het gedeelte boven de waterspiegel kunnen zien. De geschiedenis van de kegelsneden moet hier en daar uit tekstfragmenten aan elkaar worden geplakt, en een aantal zaken zijn controversieel. Het is daarom belangrijk de bronnen aan te geven en feitenmateriaal van speculatie te scheiden.

2. Het begin van de kegelsneden. Het Delische altaar

De oudste geschiedenis van de kegelsneden is verbonden met het zogenaamde Delische probleem. Volgens één van de versies van het verhaal heerste in Griekenland eens een epidemie. Het orakel van Delphi werd geraadpleegd en het bleek dat de goden de epidemie pas zouden laten ophouden als er een altaar zou worden geconstrueerd dat het dubbele was van het huidige altaar. Zo ontstond het probleem, een kubus te construeren met als inhoud twee maal de inhoud van een gegeven kubus.
Hippocrates van Chios (ca. 430 v. Chr.) ontdekte dat dit probleem zou kunnen worden opgelost, als men voor elk paar gegeven lijnstukken A en B twee middenproportionalen X en Y zou kunnen vinden, d.w.z. twee lijnstukken zodat $A : X = X : Y = Y : B$. Immers, als A de zijde is van de gegeven kubus, en $B = 2A$, dan is X de zijde van de te construeren kubus; in moderne notatie geldt $X = A\sqrt[3]{2}$. Hippocrates was helaas niet in staat X te vinden; wij kunnen tegenwoordig bewijzen dat dit met passer en lineaal onmogelijk is.
In het commentaar van Proclus (5e eeuw na Chr.) op de *Elementen* van Euclides wordt vermeld[1] dat de kegelsneden ontdekt zijn door Menaechmus. Dit is een meetkundige die omstreeks 350 voor Christus leefde en die connecties had met Plato. We weten dat Menaechmus zich met het Delische probleem

[1] Morrow, p. 91

heeft beziggehouden, en er een oplossing van heeft gegeven met kegelsneden. Die oplossing is bewaard door Eutocius (omstreeks 500 na Christus) in een commentaar op een boek van Archimedes over de bol en de cylinder (Figuur 1, zie de tekst en vertaling in THOMAS, vol. 1, pp. 278-283). De twee



Figuur 1:

gegeven segmenten zijn A en E. Menaechmus (of Eutocius) begint met de *analyse*, die we hier vrij zullen weergeven. In de analyse veronderstellen we dat de gevraagde segmenten er al zijn, en we proberen dan af te leiden hoe ze kunnen worden gevonden. Stel dus, dat de gevraagde segmenten B en Γ zijn, dat wil zeggen

$$A : B = B : \Gamma = \Gamma : E.$$

Teken twee lijnen $\Delta K = B$ en $\Delta Z = \Gamma$ loodrecht op elkaar, en maak rechthoek $\Delta Z\Theta K$. Nu is ten eerste $A : B = \Gamma : E$, dus rechthoek (A, E) = rechthoek (B, Γ) = rechthoek $\Delta Z\Theta K$. De oppervlakte van die rechthoek is dus bekend. Punt Θ ligt daarom op een hyperbool met asymptoten ΔK en ΔZ die door een gegeven punt gaat. (Wij denken daarbij aan een hyperbool met vergelijking $xy = c$ met $c = A \cdot E, x = \Delta Z, y = \Theta Z$). De twee loodrechte halve lijnen waarop ΔZ en ΔK zijn afgezet kunnen als gegeven worden beschouwd, en de hyperbool is dan bepaald.
Verder hebben we: $B^2 = A \cdot \Gamma$ (dwz het vierkant met zijde B heeft dezelfde oppervlakte als de rechthoek met zijden A en Γ). Dus geldt: $\Theta Z^2 = A \cdot \Delta Z$. Wij herkennen hierin de vergelijking van een parabool $y^2 = px$ met $p = A, x = \Delta Z, y = \Theta Z$. De tekst concludeert nu dat Θ op een parabool ligt door Δ. De as is ΔZ en de parameter is A; hier gebruiken we het woord parameter als

in de moderne vertalingen van de *Conica* van Apollonius. Menaechmus heeft waarschijnlijk een andere term voor p gebruikt, maar we weten niet welke, omdat de bewerker Eutocius de tekst volgens de normen van Apollonius gemoderniseerd heeft.
Dan volgt nu de *synthese*, dat is de echte constructie en het bewijs. Begin met twee loodrechte halve lijnen te kiezen die elkaar in Δ ontmoeten. Teken een hyperbool met asymptoten die beide lijnen, en zo dat elke rechthoek onder de hyperbool (als in Figuur 1) oppervlakte $A \cdot E$ heeft. Teken een parabool met top Δ, as één van beide lijnen en parameter A. Deze twee krommen snijden elkaar in een punt Θ. Laat uit Θ loodlijnen ΘZ en ΘK neer als in de figuur. ΔZ en ΔK zijn dan de gevraagde segmenten. Het bewijs gaat analoog aan de redenering in de analyse.
We concluderen dat Menaechmus de eigenschappen kende die overeenkomen met onze moderne vergelijkingen $y^2 = px$ van de parabool en $xy = c$ van de hyperbool. Het is zeer waarschijnlijk dat hij deze krommen als snede van een kegel en een vlak kende, en dat hij ook de ellips kende. Dat kunnen we opmaken uit een opmerking van de meetkundige Eratosthenes (ca. 250 v.Chr.), die zelf ook een constructie van het Delische probleem heeft bedacht met een toestel, en die daarop zeer trots was. Hij schreef een gedicht waarin stond dat zijn oplossing beter was dan vele andere, en waarin hij onder andere zei dat je de oplossing niet moest vinden "...door de kegel te snijden in de triaden van Menaechmus ...". De *triaden* worden meestal geïnterpreteerd als de drie kegelsneden die wij nu hyperbool, parabool en ellips noemen.[2] Hoe Menaechmus de eigenschappen van de kegelsneden uit de definitie van een kegel heeft afgeleid weten we niet, voor speculaties hierover zie bijvoorbeeld ZEUTHEN, pp. 455-469.
De parabool en de hyperbool van Menaechmus helpen ons niet bij het in de praktijk construeren van een altaar dat twee keer zo groot is als het oorspronkelijke. Zij laten wel zien, dat dit altaar bestaat in de ideale wiskundige wereld, tenminste als aannemelijk gemaakt kan worden dat kegelsneden daarin bestaan. De zuivere wiskunde van dit type heeft zich in de Griekse cultuur uitgebreid kunnen ontwikkelen en lang kunnen handhaven.

3. VAN MENAECHMUS NAAR APOLLONIUS

Over de volgende 150 jaar in de geschiedenis van de kegelsnedentheorie zijn we slecht ingelicht. We weten dat er leerboeken over kegelsneden geschreven zijn door de beroemde Euclides en Aristarchus, maar deze zijn verloren gegaan. Archimedes (ca. 287-212 v. Chr.) zegt af en toe wat over kegelsneden in zijn werken (die grotendeels bewaard zijn). Door dit materiaal te analyseren kan men er gedeeltelijk achter komen wat in zijn tijd bekend was. Zo blijkt dat

[2] Een afwijkende interpretatie is gegeven door W. KNORR in *The ancient tradition of geometric problems*, pp. 61-66. Deze stelt, dat Menaechmus de parabool en hyperbool niet als snede van een kegel met een vlak definiëerde, maar puntsgewijs, en dat de 'triaden' verwijzen naar de hyperbool en twee parabolen in twee oplossingen van het Delische probleem. Hiervan is alleen de eerste zeker van Menaechmus. KNORR moet aannemen dat Eratosthenes (en ook Proclus) de geschiedenis hebben vervalst door Menaechmus in verband te brengen met kegels. Daardoor is deze interpretatie weinig plausibel.

men in de tijd van Archimedes de kegelsnedes definieerde door een omwentelingskegel te nemen en die met een vlak loodrecht op een beschrijvende lijn te snijden. Afhankelijk van de tophoek waren er drie mogelijkheden, en men noemde de kegelsneden de *snede van een scherphoekige kegel* (onze ellips), *snede van een rechthoekige kegel* (onze parabool) en *snede van een stomphoekige kegel* (onze hyperbool).
Archimedes bewees veel stellingen over inhouden en zwaartepunten die met kegelsneden te maken hebben. Zo bepaalde hij de oppervlakte van een paraboolsegment en de inhoud van een figuur die ontstaat door een stuk van een parabool om zijn as te wentelen. Dit is een moderne uitdrukkingswijze, want voor Archimedes was een oppervlakte niet een reëel getal. 'Bepalen' betekende voor hem: bewijzen dat de figuur gelijk is (in oppervlakte of inhoud) aan een andere figuur, die uitgedrukt kon worden in een rechthoek of blok. Voorbeeld: We snijden van een parabool een segment af door een recht lijnstuk. Archimedes bewees dat dit segment gelijk is aan 4/3 maal de ingeschreven driehoek met basis het lijnstuk en top het snijpunt van de parabool met een lijn door het midden van deze basis evenwijdig aan de as van de parabool.[3]
Hieruit blijkt al, dat we de kennis over kegelsneden in de tijd van Archimedes niet moeten onderschatten. Er waren uiteraard ook dingen bekend die bij Archimedes niet werden aangehaald, bijvoorbeeld de brandpunt-richtlijneigenschap van de kegelsneden (dat deze bekend was blijkt uit informatie gegeven door de laat-Griekse schrijver Pappus).

4. Apollonius van Perga en zijn *Conica*.

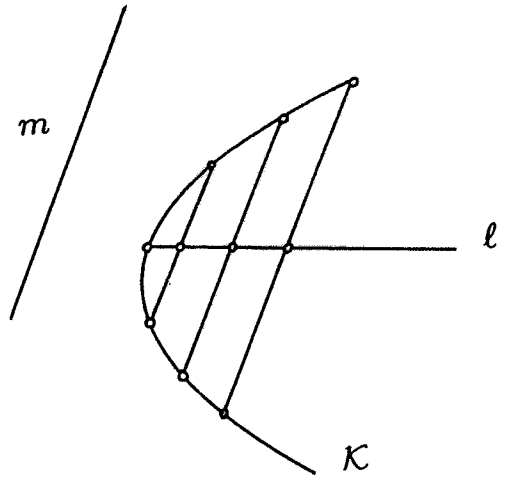
We zijn nu aangekomen bij de hoofdpersoon van dit verhaal, Apollonius van Perga. Zoals bij de meeste Griekse wiskundigen weten we weinig van zijn leven. Hij leefde omstreeks 200 voor Christus, had een zoon die ook Apollonius heette, en was behalve wiskundige ook astronoom. Zijn leerboek over kegelsneden is de *Conica*, die uit 8 "boeken" bestond, met "boek" bedoelen we hier een groot hoofdstuk. De boeken 1 tot 4 zijn in een Griekse versie bewaard, de boeken 5 tot 7 in een Arabische vertaling, en boek 8 is verloren gegaan. De eerste vier boeken zijn in 1566 in een Latijnse vertaling van Commandinus in Bologna gedrukt en ze werden zo in West-Europa bekend.
Naast de *Conica* schreef Apollonius nog een aantal kleinere werkjes over meetkundige constructies met passer en lineaal. Deze zijn op één na verloren gegaan, maar we weten er wel iets over uit beschrijvingen van de al eerder genoemde Pappus van Alexandrië. Zo weten we, dat de "cirkel van Apollonius" en het "raakprobleem van Apollonius" (een cirkel construeren die aan drie gegeven cirkels raakt) in deze verloren gegane werkjes behandeld werden.
De *Conica* zelf begint met een voorwoord, dat volgens kenners van de Griekse taal in een zeer goede stijl geschreven is. We zullen zometeen zien dat Apollonius behalve een goed wiskundige ook een taalkunstenaar was.
Apollonius begint zijn theorie van de kegelsneden als volgt. Hij bekijkt een willekeurige cirkel in een vlak en een punt niet in dat vlak. Alle halve rechten van dat punt naar de cirkel vormen samen een kegel (en de hele rechten twee

[3] Zie Dijksterhuis, *Archimedes*.

kegelnappen). Het punt heet de top van de kegel, de cirkel heet de basis van de kegel, en de lijn die de top met het middelpunt van de basis verbindt heet de as van de kegel. Hij gaat dan deze kegel met een vlak snijden en de snijfiguur bestuderen. Deze snijfiguur kan uit rechte lijnen bestaan of een cirkel of een kegelsnede zijn.
Deze definitie is in twee opzichten algemener dan die van de voorgangers van Apollonius. In de eerste plaats hadden de voorgangers alleen omwentelingskegels gebruikt, die ontstaan door een rechthoekige driehoek om een rechthoekszijde te wentelen. In zulke kegels is de as altijd loodrecht op het vlak van de basiscirkel. Bij Apollonius hoeft de as niet loodrecht op de basis te staan. Ten tweede snijdt Apollonius zijn kegels al in zijn definities met willekeurige vlakken, niet alleen met vlakken loodrecht op een beschrijvende lijn.
Apollonius behandelt eerst twee triviale gevallen: een vlak door de top snijdt de kegel in een driehoek (de basis wordt meegerekend), en een vlak evenwijdig aan de basis snijdt de kegel weer in een cirkel. Daarna stelt hij de vraag, of er nog andere vlakken zijn die de kegel ook in een cirkel snijden. Dit blijkt alleen zo te zijn, als de as niet loodrecht op de basis staat. Dan is er namelijk precies één vlak $\mathcal{V}$ door de as van de kegel loodrecht op het vlak van de basiscirkel $\mathcal{B}$. Er is ook precies één schaar onderling evenwijdige vlakken $\mathcal{W}$ die loodrecht staan op $\mathcal{V}$ en dezelfde hoek maken met de as als vlak $\mathcal{B}$ maar niet evenwijdig zijn aan $\mathcal{B}$. Apollonius noemt zulke vlakken $\mathcal{W}$ "tegengesteld". Hij bewijst ook dat alle andere vlakken dan de tot nu toe genoemde de kegel snijden in een kromme die geen cirkel is.
Apollonius onderzoekt zulke krommen op een manier die anders is dan een moderne aanpak met Cartesische coordinaten. Modern gezegd komt het erop neer, dat Apollonius ook met scheve coordinatenstelsels werkt, waarbij we opmerken dat moderne coördinaten (in de zin van reële getallen) bij Apollonius niet voorkomen. We vinden wel een paar begrippen die we als voorlopers van het huidige coordinaatsbegrip kunnen zien, namelijk diameter en ordinaat. Apollonius definieert deze voor een willekeurige kromme $\mathcal{K}$ (Figuur 2).

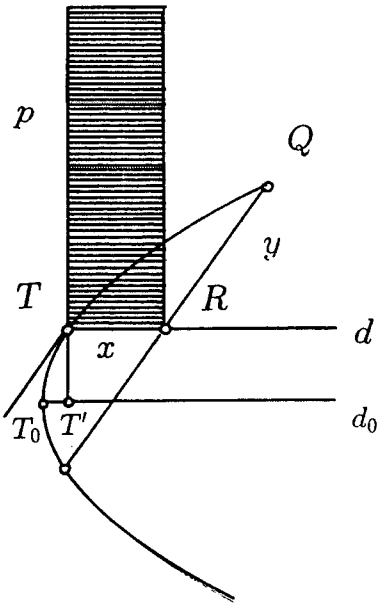
DEFINITIES:

1. een diameter van $\mathcal{K}$ is een rechte lijn ℓ met de volgende eigenschap: er is een andere rechte lijn m zodanig alle segmenten die evenwijdig zijn aan m en waarvan beide eindpunten op $\mathcal{K}$ liggen door ℓ middendoor worden gedeeld.
2. de helften van de segmenten die hierboven genoemd zijn heten *geordend* (Grieks: $\tau\epsilon\tau\alpha\gamma\mu\acute{\epsilon}\nu\omega\varsigma$) getrokken ten opzichte van de diameter ℓ. (De Latijnse vertaling gebruikt *ordinatim ducta*, vandaar dat we vaak het woord *ordinaat* voor zo'n helft van een segment zullen gebruiken. Voor de constante hoek tussen een diameter en de bijbehorende ordinaten gebruiken we het woord *ordinaatshoek*.)
3. een as is een diameter die loodrecht staat op de bijbehorende "geordend getrokken" lijnen (ordinaten).



Figuur 2:

Als $\mathcal{K}$ een cirkel is, dan is duidelijk dat elke rechte lijn door het middelpunt van de cirkel diameter is in de zin van Apollonius. De ordinaten staan loodrecht op de diameter.
Apollonius gebruikt nu de rest van Boek I, en een deel van de overige boeken van de *Conica* om uit te zoeken hoe de situatie wat dit betreft voor andere kegelsnedes is. Zijn bewijzen zijn zware kost, en we zullen er maar één voorbeeld van geven, dat geen recht doet aan de structuur en de moeilijkheid van het geheel. Maar eerst zullen we proberen het eindresultaat op een min of meer didaktische manier te presenteren. We beginnen met de parabool.
Als de kegel wordt gesneden met een vlak evenwijdig aan een lijn op de kegelmantel, onstaat een oneindige kromme, die Apollonius parabool noemt (op de naamgeving komen we zometeen terug). Elke parabool heeft één as, en elke lijn evenwijdig aan de as is een diameter van de parabool. In elk punt van de parabool kan precies één raaklijn getrokken worden. De ordinaten van een diameter zijn altijd evenwijdig aan de raaklijn in het punt waar de diameter de parabool snijdt. (Figuur 3) Stel nu dat d een diameter is die de parabool in T snijdt, kies een punt Q op de parabool, en laat QR de ordinaat door Q zijn die hoort bij de diameter d (die ordinaat is dus evenwijdig aan de raaklijn in T).
Dan is het vierkant van de ordinaat QR gelijk (d.w.z. gelijk in oppervlakte) aan de rechthoek waarvan één zijde gelijk is aan het stuk RT wat van de diameter afgesneden wordt (Latijn: abscissa), en de andere zijde gelijk aan een segment p wat alleen van de diameter d afhangt, maar niet van de keuze van punt Q (zie Figuur 3). Dit segment tekent Apollonius met eindpunt in T en loodrecht op d. De rechthoek komt dan ook echt in de figuur voor (het gearceerde gedeelte). Als we stellen $QR = y, RT = x$ dan ontstaat de vergelijking $y^2 = px$.
We komen nu op de naamgeving. In het Grieks zeggen we dat deze rechthoek langs p ligt, langsliggen is in het Grieks $\pi\alpha\rho\alpha\beta\alpha\lambda\epsilon\iota\nu$ (van $\pi\alpha\rho\alpha$, langs, en $\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$, werpen). Het segment p heet in het Grieks de *rechtopstaande zijde*, en



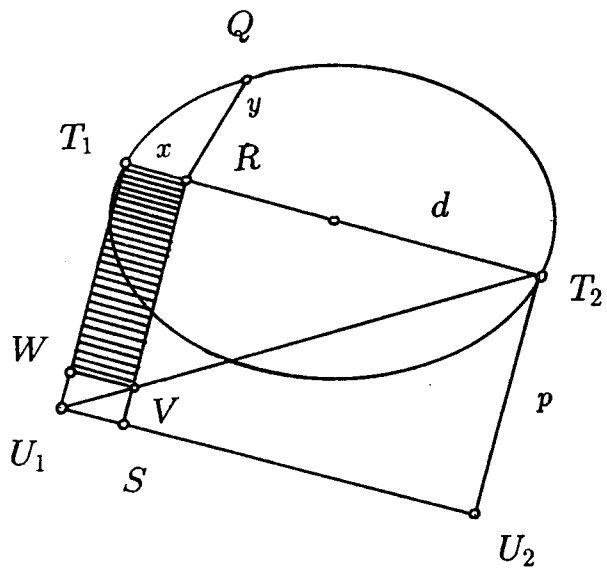
Figuur 3:

ook het *lijnstuk, waarlangs zij (de ordinaten) in vierkant gelijk zijn.* Hieruit is in de zeventiende eeuw het woord *parametrum* ontstaan: het lijnstuk, waarlangs gemeten wordt.[4] Het woord parameter heeft sindsdien een veel algemenere betekenis gekregen, en wordt ook op overdrachtelijke manier in gebieden buiten de wiskunde gebruikt.
Als d_0 de as is en d een willekeurige diameter, zijn de bijbehorende parameters p_0 en p niet gelijk. Stel d_0 snijdt de parabool in T_0 en laat T' de loodrechte projectie zijn van T op de as, dan geldt $p = p_0 + 4T_0T'$ (*Conica* VII:5).[5]
De hyperbool of de ellips kunnen ontstaan als het snijvlak niet door de top gaat en niet evenwijdig is aan een lijn op de kegelmantel. Als elke lijn in het kegeloppervlak door de top heen verlengd wordt, ontstaan twee nappen. Nu zijn er twee mogelijkheden:
a. het snijvlak snijdt maar één van de nappen, er ontstaat dan een ellips (tenzij het vlak evenwijdig aan de basis of tegengesteld aan de basis ligt, dan ontstaat een cirkel);
b. het snijvlak snijdt beide nappen, er ontstaan dan voor Apollonius twee hyperbolen. Een hyperbool bij Apollonius is één tak van wat wij een hyperbool noemen.
Bij elke ellips is er één speciaal punt, het middelpunt, met de eigenschap dat alle rechte lijnen door het middelpunt diameters zijn. In elk punt op de ellips kan één raaklijn aan de ellips getrokken worden, en de ordinaten van een diameter zijn weer evenwijdig aan de raaklijnen in de punten waar de diameter de ellips

[4]Nota bene: In het Nederlandse taalgebied wordt de term: parameter van een parabool meestal gebruikt voor de grootheid p in de vergelijking $y^2 = 2px$, in afwijking van wat in de huidige vertalingen van de *Conica* gebruikelijk is.

[5]Dit is de meest handzame manier waarop Apollonius dit verband aangeeft. In Boek I, prop. 49 geeft hij een minder doorzichtige manier.

snijdt (die twee raaklijnen zijn evenwijdig). Verder is het vierkant van elke ordinaat weer gelijk aan een rechthoek, die gearceerd is in Figuur 4, en die iets ingewikkelder is dan bij de parabool. Stel de diameter d snijdt de ellips in punten T_1 en T_2, kies een punt Q op de ellips dat niet met die twee punten samenvalt en trek de ordinaat QR door Q die bij d hoort (en die dus evenwijdig is aan de raaklijnen in T_1 en T_2). Er zijn nu segmenten T_1U_1=T_2U_2=p, die even lang zijn, loodrecht op d staan en onafhankelijk van Q zijn, zodat het volgende geldt. Trek de diagonaal T_2U_1, trek RS evenwijdig aan T_iU_i, die U_1U_2 in S snijdt en T_2U_1 in V. Trek VW evenwijdig aan d, het snijpunt met T_1U_1 is W. Nu geldt: QR^2 = rechthoek T_1RVW. Apollonius zei: het vierkant van



Figuur 4:

QR is gelijk aan een rechthoek, die langs $p = T_1U_1$ ligt, met breedte T_1R, en waaraan een (kleine) rechthoek VWU_1S "ontbreekt". Ontbreken is in het Grieks $\epsilon\lambda\lambda\epsilon\iota\pi\epsilon\iota\nu$, en Apollonius noemt deze kegelsnede daarom *ellips*. Het segment p heet weer o.a. parameter. Andere benamingen zijn *opstaande zijde* voor p en *dwarse zijde* voor $t = T_1T_2$.
Als we $y = QR, x = RT_1$ stellen, kunnen we $QR^2 = T_1RVW$ vertalen in de vergelijking $y^2 = px - \frac{p}{t}x^2$.
Als we een andere diameter $d' = T_1'T_2'$ kiezen en de notaties p', t' analoog aan p en t definiëren, dan geldt tussen p, t, p', t' het volgende verband:
$t^2 + pt = t'^2 + p't'$.[6]
Voor de hyperbool gelden soortgelijke redeneringen. Het vierkant van de ordinaat schiet in dit geval op analoge manier een kleine rechthoek VWU_1S over ten opzichte van de rechthoek T_1RSU_1 langs het segment p=T_1U_1, en overschieten

[6]Dit is een handzame vorm gebaseerd op Boek VII, prop. 12-13. In Boek I, prop. 50 geeft Apollonius het verband op een minder inzichtelijke manier.

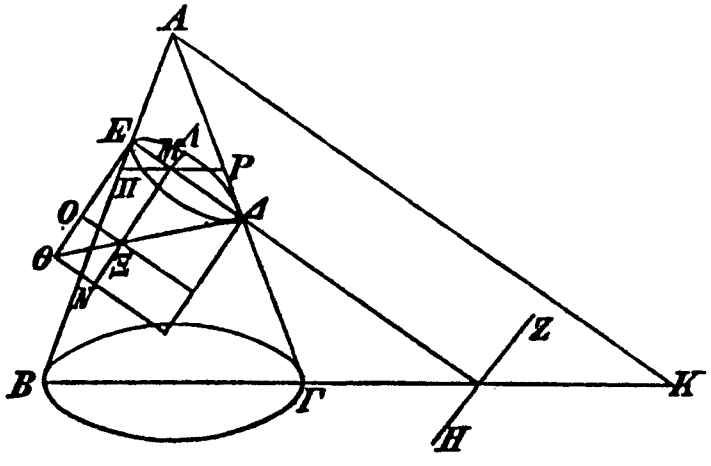
is in het Grieks $\hat{\upsilon}\pi\epsilon\rho\beta\alpha\lambda\lambda\epsilon\iota\nu$. Dit verklaart de naam hyperbool.[7]
We zouden kunnen zeggen: de ellips en de hyperbool ontlenen hun naam aan de $-$ of de $+$ in hun "vergelijkingen" $y^2 = px \pm \frac{p}{t}x^2$.
Aan het eind van Boek I (proposities 52-58) "vindt" Apollonius een kegelsnede met gegeven diameter, parameter en ordinaatshoek. Daarmee bedoelt hij: het vinden van een omwentelingskegel die het vlak in de gevraagde kegelsnede doorsnijdt. De top en een basiscirkel van die kegel worden door middel van een soort 3-dimensionale passer- en lineaalconstructie gevonden. De praktische betekenis van deze constructie is nihil; het gaat er waarschijnlijk alleen om dat een kegelsnede met gegeven diameter (of dwarse zijde), parameter en ordinaatshoek in filosofisch opzicht bekend kan worden verondersteld.
In Boek II bewijst Apollonius, dat er door het middelpunt van de hyperbool twee lijnen zijn met een speciale eigenschap, namelijk: zij hebben geen gemeenschappelijk punt met de hyperbool, maar de hyperbool heeft wel een snijpunt met elke rechte lijn door het middelpunt die in één van de hoeken tussen deze twee lijnen ligt. Samentreffen is in het Grieks $\sigma\upsilon\mu\pi\iota\pi\tau\epsilon\iota\nu$ en de twee speciale lijnen doen dit in geen enkel punt met de hyperbool, vandaar dat die twee speciale lijnen de asymptoten heten. Eigenlijk is deze term niet zo gelukkig, omdat er veel meer lijnen door het middelpunt zijn die de hyperbool niet ontmoeten.
Apollonius bewijst vele stellingen over de hyperbool en zijn asymptoten, onder andere een stelling (*Conica* II:12) die zich laat vertalen in de moderne vergelijking $xy = c$ van een hyperbool ten opzichte van zijn asymptoten. We hebben deze stelling in de constructie van Menaechmus gezien. De *Conica* bevat nog veel meer stellingen over andere onderwerpen zoals pool en poollijn, brandpunten, normalen enzovoort, waar we nu niet op ingaan. We verwijzen de lezer daarvoor naar de boeken in de bibliografie aan het eind van dit artikel.

5. Een bewijs uit de *Conica*

We geven nu een voorbeeld van een stelling van Apollonius met bewijs, namelijk propositie 13 van Boek I (Apollonius ed. Heiberg vol. 1, p. 48-53; Ver Eecke p. 28-31). Het doel hiervan is nog een tipje van de sluier over zijn theorie op te lichten, en de lezer een gevoel te geven van de sfeer van het boek. In de stelling bewijst Apollonius de "vergelijking" $QR^2 = T_1RVW$ van de ellips, voor één speciale diameter. Dit is de "oorspronkelijke diameter", waarmee bedoeld wordt: de enige diameter waarvan Apollonius in de stereometrische figuur laat zien dat het een diameter is. De andere lijnen door het middelpunt van een ellips zijn ook diameters, maar het bewijs daarvan is veel ingewikkelder, en de kegel wordt daar niet opnieuw bij gebruikt.
Apollonius presenteert zijn stellingen volgens een vast ritueel, dat ook in de *Elementen* van Euclides wordt gebruikt. De stelling begint met de zogenaamde *protasis*, dat is een formulering in algemene termen (woorden tussen haakjes zijn door mij aan de tekst toegevoegd ter verduidelijking):

[7] Apollonius heeft in de benaming van de kegelsneden bestaande terminologie aangepast. In de tijd van Euclides en daarvoor bestonden al de parabolische, hyperbolische en elliptische aanpassingsproblemen. Zie hiervoor het in de bibliografie genoemde artikel van Grootendorst.

"Als een kegel gesneden wordt met een vlak door de as, en ook gesneden wordt door een ander vlak dat beide zijden van de driehoek door de as ontmoet, en dat niet evenwijdig aan de basis getrokken is en ook niet tegengesteld is, als verder het vlak van de basis van de kegel en het snijvlak elkaar ontmoeten in een rechte loodrecht op de basis van de driehoek door de as of (loodrecht op) het verlengde daarvan (d.w.z. van die basis), dan zal elke rechte die vanaf de kegelsnede getrokken is, evenwijdig aan de doorsnede van de vlakken, tot aan de diameter van de snede, in vierkant gelijk zijn aan een zekere oppervlakte die langs een zekere rechte ligt, (namelijk een rechte) waartoe de diameter van de kegelsnede een verhouding heeft die het vierkant van de rechte getrokken uit de top van de kegel, evenwijdig aan de diameter van de kegelsnede tot de basis van de driehoek, (heeft) tot de (rechthoek) die bevat wordt door de stukken die door hem (die rechte) tot de zijden van de driehoek worden afgesneden, met als breedte het stuk dat erdoor van de diameter wordt afgesneden tot de top van de kegelsnede, en die een figuur mist (*ἔλλείπον*) die gelijkvormig is en gelijkvormig ligt met de (rechthoek) bevat door de diameter en de rechte waarlangs zij (i.e. de ordinaten) in vierkant gelijk zijn (*παρ' ἣν δύνανται*). Laat zo'n kegelsnede een ellips genoemd worden."
Het is niet aan te nemen, dat de lezer na het lezen van deze volzin ook werkelijk begrijpt wat er aan de hand is. Het is dan ook niet duidelijk welk doel Apollonius nastreefde met zulke enorm gecompliceerde algemene formuleringen. Gelukkig volgt hierna de *ekthesis*, dat is opnieuw de stelling, maar nu met wat notatie en een figuur (Figuur 5, overgenomen uit Heiberg's editie). Die luidt hier aldus: "Laat er een kegel zijn met top punt A en basis cirkel $B\Gamma$.



Figuur 5:

Laat hij gesneden zijn met een vlak door de as die als snede driehoek $AB\Gamma$ maakt. Laat hij door een ander vlak gesneden zijn dat beide zijden van de driehoek door de as ontmoet en dat niet evenwijdig aan de basis van de kegel getrokken is en niet tegengesteld, en laat hij als snede in het oppervlak van de

kegel lijn ΔE maken. Laat de doorsnede van het snijvlak en het vlak van de basis van de kegel ZH zijn, die loodrecht is op $B\Gamma$. Laat de diameter van de (kegel)snede ΔE zijn, en laat in E loodrecht op $E\Delta$ (lijn) $E\Theta$ getrokken zijn, en door A evenwijdig aan $E\Delta$ (lijn) AK, en laat het zo gemaakt zijn dat het (vierkant) van AK tot de (rechthoek) onder $BK\Gamma$[8] is als ΔE tot $E\Theta$. Laat een of ander punt Λ op de snede genomen zijn, en laat door Λ evenwijdig aan ZH (lijn) ΛM getrokken zijn. Ik zeg dat ΛM in vierkant gelijk is aan een of ander oppervlak, dat langs $E\Theta$ ligt, als breedte (lijn) EM heeft, en een figuur mist die gelijkvormig is aan de (rechthoek) onder $\Delta E\Theta$."
Hierop volgt het bewijs:
"Want laat $\Delta\Theta$ getrokken zijn, en door M laat $M\Xi N$ evenwijdig aan ΘE getrokken zijn, en door Θ en Ξ laat ΘN en ΞO evenwijdig aan EM getrokken zijn, en laat door M evenwijdig aan $B\Gamma$ ΠMP getrokken zijn. Dan, omdat ΠP evenwijdig is aan $B\Gamma$, en ook ΛM evenwijdig is aan ZH, is het vlak door ΛM en ΠP evenwijdig aan het vlak door ZH en $B\Gamma$, dat is de basis van de kegel. Als dus door ΛM en ΠP een vlak wordt gelegd, zal de snede een cirkel met diameter ΠP zijn. En ΛM is een loodlijn daarop. Dus is de (rechthoek) onder ΠMP gelijk aan het (vierkant) van ΛM. Maar omdat het (vierkant) van AK staat tot de (rechthoek) onder $BK\Gamma$ als $E\Delta$ tot $E\Theta$, en de verhouding van het (vierkant) van AK tot de (rechthoek) onder $BK\Gamma$ samengesteld is uit (de verhouding die) AK heeft tot KB en AK staat tot $K\Gamma$, maar AK staat tot KB is gelijk aan EH staat tot HB, dat is EM tot $M\Pi$, en AK staat tot $K\Gamma$ is ΔH staat tot $H\Gamma$, dat is ΔM staat tot MP, daarom is de verhouding van ΔE staat tot $E\Theta$ samengesteld uit die van EM tot $M\Pi$ en die van ΔM tot MP. De verhouding, samengesteld uit die van EM tot $M\Pi$ en die van ΔM tot MP, is de verhouding van de (rechthoek) onder $EM\Delta$ tot de (rechthoek) onder ΠMP. Dus de (rechthoek) onder $EM\Delta$ staat tot de (rechthoek) onder ΠMP als ΔE staat tot $E\Theta$, dat is als ΔM staat tot $M\Xi$. Zoals ΔM staat tot $M\Xi$, als ME als gemeenschappelijke hoogte genomen wordt, zo staat de (rechthoek) onder ΔME tot de (rechthoek) onder ΞME. Dus de (rechthoek) onder ΔME staat tot de (rechthoek) onder ΠMP als de (rechthoek) onder ΔME staat tot de (rechthoek) onder ΞME. Dus de (rechthoek) onder ΠMP is gelijk aan de (rechthoek) onder ΞME. Er is aangetoond dat de (rechthoek) onder ΠMP gelijk is aan het (vierkant) van ΛM. Dus de (rechthoek) onder ΞME is gelijk aan het (vierkant) van ΛM. Dus ΛM is gelijk in vierkant aan MO, die langs ΘE ligt, breedte EM heeft, en die een figuur ON mist die gelijkvormig is aan de (rechthoek) onder $\Delta E\Theta$. Laat zo'n snede ellips genoemd worden, lijn $E\Theta$ (de lijn) waarlangs in vierkant gelijk zijn de (rechten) die naar ΔE geordend getrokken worden, en laat dezelfde rechte ($E\Theta$) ook opstaande (zijde) heten, $E\Delta$ dwarse (zijde)."
Dit bewijs moet gemakkelijk te volgen geweest zijn voor een lezer die ervaring had met het werken met rechthoeken en verhoudingen. De doorsnee lezer uit de Griekse oudheid had deze ervaring in ruime mate verkregen door het bestuderen

[8] In moderne termen BK maal $K\Gamma$. Apollonius gaat er niet van uit dat BK en $K\Gamma$ in de figuur een rechthoek maken, en dat is hier ook niet zo. Hij bedoelt een rechthoek waarvan de ene zijde gelijk is aan BK en de tweede zijde aan $K\Gamma$.

van de *Elementen* van Euclides. Het bewijs is gebaseerd op een eigenschap van de cirkel, $\Lambda M^2 = \Pi M \cdot MP$, die in de *Elementen* bewezen wordt. Modern komt dit neer op de vergelijking $y^2 = (r - x)(r + x)$ als we de oorsprong in het middelpunt van de cirkel nemen, de straal r stellen, en $\Lambda M = y, \Pi M = x$ kiezen. De rest van het bewijs berust op het gebruik van gelijkvormigheden. Hieruit komt de vergelijking van de ellips met $t = E\Delta, p = E\Theta = (\frac{BK \cdot K\Gamma}{AK^2}) \cdot t$. Uit het bewijs blijkt dat p en t onafhankelijk zijn van de ordinaat ΛM en alleen afhangen van de kegel en het snijvlak. De hoek tussen de diameter $E\Delta$ en de ordinaten ΛM is constant maar hoeft niet recht te zijn. Verder zit er nog een klein addertje onder het gras. Apollonius begint met het kiezen van een driehoek door de as van de kegel en hij snijdt de kegel daarna met een vlak dat de basis van de kegel snijdt in een lijn loodrecht op de basis van die driehoek. De lezer moet zelf inzien dat als een kegel met een vlak gesneden wordt dat als snede een ellips oplevert, het altijd mogelijk is een vlak door de as te kiezen dat de basis snijdt in een lijn loodrecht op de doorsnede van basis en snijvlak. Dit vlak door de as snijdt de kegel dan in de "driehoek door de as". Pas dan is duidelijk dat de stelling op dit snijvlak toegepast kan worden.
In het algemeen veronderstelt Apollonius nogal veel inzicht van de lezer. Dit blijkt ook uit het feit dat wanneer Apollonius een eerdere stelling uit de *Conica* noemt, hij dit bijna nooit vermeldt; kennelijk verwacht hij dat de lezer de verbanden zelf legt. Het bovenstaande bewijs is relatief gemakkelijk; de meeste bewijzen in de *Conica* zijn zeer veel gecompliceerder. In Boek V, over maximale en minimale afstanden van een gegeven punt in het vlak tot een gegeven kegelsnede, komen stellingen voor die zo ingewikkeld zijn dat het Griekse alfabet niet voldoende letters bevat om de punten in de figuren alle een naam te geven.
Een bijzonder aspect van de stijl van Apollonius is zijn gebruik van werkwoordsvormen (zie hiervoor HEATH, p. clxv). Hij zegt niet vaak "we trekken een lijn" maar bijna altijd "laat een lijn getrokken zijn". Dit taalgebruik past in de al eerder genoemde Griekse opvatting dat de wiskundige objecten zich bevinden in een eeuwige wiskundige wereld. Iets construeren is daarom in feite onmogelijk, omdat alles er al is. In deze wereld kunnen we alleen objecten aanwijzen.
Voor verdere voorbeelden van bewijzen van Apollonius verwijzen we de lezer naar de Franse vertaling van VER EECKE, of de Engelse parafrase van HEATH. Aanbevolen lectuur is bijvoorbeeld proposities 34 en 36 van Boek I, over de existentie en uniciteit van raaklijnen aan een ellips en een hyperbool in een gegeven punt. Apollonius bewijst dit op een correcte en fraaie manier, die verrassend anders is dan tegenwoordig gebruikte methoden.

6. WAAROM KEGELSNEDEN?

Er bestonden enkele toepassingen van kegelsneden in de theorie van brandspiegels. Het was in de tijd van Apollonius bekend dat een parabolische spiegel (die ontstaat door een parabool om zijn as te roteren) de zonnestralen evenwijdig aan de as naar het brandpunt terugkaatst. Er is echter geen aanwijzing dat zulke spiegels in de oudheid zijn gemaakt. Men kan daarom beter spreken

van een pseudo-toepassing, die in dezelfde categorie valt als de constructie van Menaechmus van een altaar met inhoud twee maal die van een gegeven altaar. Het heeft 1800 jaar geduurd voordat bekend werd dat de stellingen uit de *Conica* van Apollonius serieuze toepassingen hadden buiten de wiskunde. Dit werd duidelijk in 1604, toen Kepler ontdekte dat de planeten elliptische banen beschrijven met de zon in een brandpunt.
In de Griekse oudheid werden kegelsneden wel veel gebruikt om andere problemen uit de (zuivere) wiskunde op te lossen. Een eenvoudig voorbeeld is de trisectie van een gegeven hoek. Een veel ingewikkelder voorbeeld is het probleem van de *locus van drie of vier lijnen.* Gegeven: een verhouding α, vier rechte lijnen l_i, en vier andere rechte lijnen m_i, alle in hetzelfde vlak, zodat lijn m_i niet evenwijdig is aan lijn l_i voor $1 \leq i \leq 4$. Gevraagd alle punten P in het vlak die aan de volgende eigenschap voldoen: Van P trekken we een lijn evenwijdig aan m_i die l_i in Q_i snijdt. Er moet nu gelden

$$\frac{PQ_1 \cdot PQ_2}{PQ_3 \cdot PQ_4} = \alpha.$$

Het blijkt dat de verzameling punten P die aan deze eigenschappen voldoen uit twee kegelsnedes bestaat. Volgens Apollonius had Euclides dit probleem gedeeltelijk opgelost, en een deel van de motivatie van zijn eigen *Conica* is het geven van een volledige oplossing van dit probleem.[9]
Echter, voor Apollonius hebben zijn wiskundige stellingen een intrinsieke waarde, en toepassingen in andere wiskundige problemen of buiten de wiskunde waren voor hem niet essentieel. Zijn *Conica* is een monument van de zuivere wiskunde. Het is een wonder dat dit boek de late oudheid en de vroege middeleeuwen overleefd heeft. Het voortbestaan van de boeken V tot VII is te danken aan de Arabische cultuur, waar meer belangstelling voor zuivere wetenschap bestond dan in het middeleeuws Christelijke Europa.
Toen de Europese wiskundigen uit de zeventiende eeuw belangstelling kregen voor krommen, vonden zij in de *Conica* een enorme massa interessant materiaal. Zij hebben het arsenaal van krommen geweldig uitgebreid, en waren al spoedig in staat de kegelsneden op elegantere manier te behandelen, en daardoor had de *Conica* vanaf het eind van de zeventiende eeuw alleen nog historische waarde. De invloed van dit boek is desondanks enorm geweest, en de woorden ellips, parabool en hyperbool zullen ons daaraan blijven herinneren.

[9] De generalisatie van dit probleem tot zes of meer lijnen is behandeld door René Descartes in zijn Géométrie (1637).

LITERATUUR

1. E.J. DIJKSTERHUIS, *Archimedes.* Kopenhagen 1956. (Engelse vertaling. Het hoofdstuk over de kwadratuur van de parabool is in de oorspronkelijke Nederlandse versie verschenen in het tijdschrift *Euclides* 17 (1940), pp. 31-40.)
2. A. GROOTENDORST, "Over de geometrische algebra van de Grieken en de oorsprong van de woorden parabool, ellips en hyperbool". In: A. GROOTENDORST, *Grepen uit de geschiedenis van de wiskunde.* Delft 1988, pp. 49-63.
3. T.L. HEATH, *Apollonius of Perga, treatise on conic sections.* Cambridge 1896.
4. J.L. HEIBERG (ED.), *Apollonii Pergaei quae Graece exstant cum commentariis antiquis*, Leipzig (Teubner) 1890. 2 vols.
5. J.L. HEIBERG (ED.), *Archimedes Opera Omnia.* 3 vols. Leipzig (Teubner) 1915.
6. W.R. KNORR, *The ancient tradition of geometric problems.* Boston 1986. Herdruk New York (Dover 1993).
7. G. MORROW, *Proclus. A commentary on the First Book of Euclid's Elements.* Princeton (Princeton University Press) 1970.
8. I. THOMAS, *Selections illustrating the history of Greek mathematics.* 2 vols. Cambridge - London, 1968 (Loeb Classical Library no. 335)
9. P. VER EECKE, *Les Coniques d'Apollonius de Perge.* Oeuvres traduites pour la première fois du Grec en Français, Brugge 1928.
10. B.L. VAN DER WAERDEN, *Ontwakende wetenschap*, Groningen 1950
11. H. ZEUTHEN, *Die Lehre von den Kegelschnitten im Altertum.* Kopenhagen 1886, herdruk Hildesheim 1966.